

FICHA TÉCNICA

TÍTULO
Antenas: análise e projeto

AUTOR
José Rocha Pereira

DESIGN E SERVIÇOS DE PRÉ-IMPRESSÃO
Mafalda Frade

EDITORA
UA Editora
Universidade de Aveiro
Serviços de Biblioteca, Informação Documental e Museologia

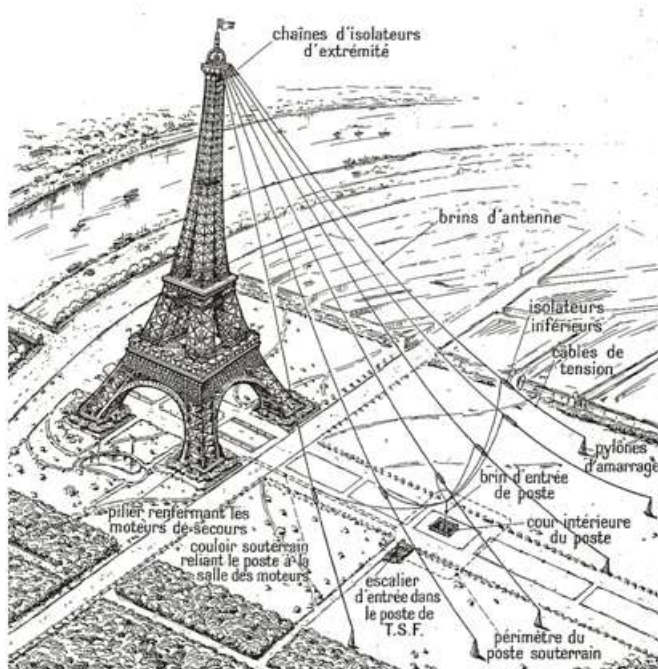
1ª EDIÇÃO – FEVEREIRO 2022

ISBN
978-972-789-733-9

José Rocha Pereira

Antenas: análise e projeto

UA Editora
2021



Aminh' Alma fugiu pela Torre Eiffel acima,
 – A verdade é esta, não nos criemos mais ilusões –
 Fugiu, mas foi apanhada pela antena da T.S.F.
 Que a transmitiu pelo infinito em ondas hertzianas...

(Em todo o caso que belo fim para a minha Alma!...]

Mário de Sá-Carneiro
 Paris, agosto 1915

Para a Branca

Para o Pedro e o João

Para a Camila, o José e a Carolina

Índice

Capítulo 1- Definições e Conceitos Fundamentais.....	15
1.1 Introdução	15
1.2 Tipos de antenas	16
1.3 Como radiam as antenas.....	18
1.4 Parâmetros fundamentais das antenas	21
1.4.1 Densidade de potência radiada.....	21
1.4.2 Intensidade de radiação	22
1.4.3 Diagrama de radiação	23
1.4.3.1 Principais características dum diagrama de radiação.....	24
1.4.4 Diretividade e ganho.....	27
1.4.5 Eficiência.....	29
1.4.6 Polarização	30
1.4.7 Impedância de entrada	33
1.4.8 Largura de banda.....	35
1.4.9 Área efetiva	36
1.5 Fórmula de Friis	38
1.6 Equação básica de RADAR	39
1.7 Temperatura de ruído duma antena	41
Referências	42
Exercícios	43
Capítulo 2 - Antenas Filiformes.....	47
2.1 Fundamentos de eletromagnetismo	47
2.1.1 Breve revisão das equações de Maxwell	47
2.1.2 Conceito de dualidade	49
2.1.3 Aplicação das equações de Maxwell a problemas de radiação	51
2.2 Dipolo elétrico infinitesimal	54
2.2.1 Expressões dos campos radiados.....	55
2.2.2 Potência radiada e resistência de radiação.....	56
2.2.3 Regiões envolventes do dipolo	58
2.2.4 Diagrama de radiação, Diretividade e Área efetiva	59
2.3 Dipolo magnético infinitesimal	61
2.4 Dipolo curto	62
2.5 Dipolo de comprimento finito	64
2.5.1 Obtenção dos campos radiados	66
2.5.1.1 Regiões envolventes do dipolo	67
2.5.1.2 Expressões dos campos radiados na região de campo distante.....	70
2.5.2 Densidade de potência, intensidade de radiação e diagrama de radiação.....	71
2.5.3 Potência radiada e resistência de radiação.....	73
2.5.4 Diretividade	74

2.5.5 Caso particular importante: Dipolo de meio comprimento de onda	76
2.5.6 Dipolos alinhados segundo um eixo genérico	77
2.5.6.1 Dipolo orientado segundo o eixo dos xx	78
2.5.6.2 Dipolo orientado segundo o eixo dos yy	79
2.6 Dipolos colocados acima dum plano separador de dois meios	81
2.6.1 Dipolo elementar colocado verticalmente à altura h	81
2.6.1.1 Monopolo	89
2.6.2 Dipolo elementar colocado horizontalmente à altura h	90
2.7 Comprimento efetivo dum dipolo	100
2.8 Antena em forma de aro	102
2.8.1 Aro elementar	103
2.8.1.1 Campo radiado a grande distância	103
2.8.1.2 Potência radiada e resistência de radiação	107
2.8.2 Aro de maiores dimensões	108
2.8.2.1 Aro quadrado com um perímetro de um comprimento de onda	108
2.8.2.2 Aro circular com um perímetro de um comprimento de onda	114
Referências	116
Exercícios	116

Capítulo 3 - Distribuições Contínuas..... 119

3.1 Introdução	119
3.2 Exemplos de distribuições unidimensionais.....	120
3.2.1 Distribuição retangular.....	120
3.2.2 Distribuição triangular.....	122
3.2.3 Distribuição cossinusoidal	123
3.3 Aplicação dos teoremas da transformada de Fourier às distribuições contínuas	124
3.3.1 Teorema da mudança de escala. Comprimento da distribuição e largura de feixe.	124
3.3.2 Teorema do atraso. Variação da orientação do feixe.....	126
3.3.3 Teorema da modulação. Interferómetro.	128
Referências	129
Exercícios	130

Capítulo 4 - Agregados..... 133

4.1 Introdução	133
4.2 Agregado linear uniforme	136
4.2.1 Determinação das características do Fator de Agregado.....	140
4.2.1.1 Determinação da posição dos máximos	140
4.2.1.2 Determinação da posição dos nulos.....	143
4.2.1.3 Direção dos lobos secundários.....	144
4.2.1.4 Nível do primeiro lobo secundário.....	145
4.2.1.5 Largura de feixe a meia potência (LFMP)	146
4.2.1.6 Diretividade.....	147
4.2.1.7 Ganho	154
4.2.2 Resumo das principais características dos agregados	155
4.2.3 Técnica gráfica de obtenção do diagrama polar a partir do gráfico de $ FA(\Psi) $	156

4.3 Agregado planar uniforme.....	161
4.4 Agregado tridimensional	164
4.5 Agregado linear não uniforme	169
4.5.1 Agregado com amplitudes não uniformes	170
4.5.1.1 Agregado binomial.....	172
4.5.1.2 Agregado Dolph-Tschebyscheff.....	173
4.5.1.3 Comparação entre os agregados uniforme, binomial e Dolph-Tschebyscheff.....	180
4.5.2 Agregado com espaçamento não uniforme entre elementos	181
Referências.....	184
Exercícios	185

Capítulo 5 - Antenas de condutores cilíndricos 189

5.1 Introdução	189
5.2 Equações integrais	189
5.2.1 A equação de Hallén.....	190
5.2.2 A equação de Pocklington	192
5.3 Solução da equação integral. Introdução ao Método dos Momentos.....	194
5.4 Solução da equação integral pela aplicação mais geral do Método dos Momentos.	199
5.4.1 Funções de subdomínio.....	201
5.4.1.1 Impulso triangular.....	201
5.4.1.2 Impulso sinusoidal	201
5.4.2 Funções de domínio inteiro	202
5.5 Distribuição de corrente num dipolo cilíndrico	202
5.6 Impedância de entrada dum dipolo cilíndrico	204
5.6.1 Raio equivalente.....	208
5.7 Diagrama de radiação dum dipolo cilíndrico.....	209
5.8 Impedância mútua	210
5.9 Cálculo do ganho dum agregado de dipolos cilíndricos	216
5.10 Dipolo dobrado.....	219
5.11 Elementos parasitas.....	222
5.11.1 Efeito dum dipolo parasita no diagrama de radiação	223
5.12 Antena Yagi-Uda.....	226
5.12.1 Projeto duma antena Yagi	227
5.12.2 Exemplos de projeto de antenas Yagi.....	229
5.12.3 Antena Yagi com elementos em forma de aros quadrados.....	240
5.13 Antena Log-Periódica de dipolos	242
5.13.1 Análise simplificada	243
5.13.2 Análise detalhada	246
5.13.3 Projeto duma ALPD	247
5.13.4 Exemplos de projeto de ALPD.....	250
5.14 Antena Helicoidal	256
5.14.1 Estudo do modo axial	257
5.14.2 Estudo do modo transversal.....	266
5.15 Alimentação e adaptação de antenas de condutores cilíndricos.....	268
Referências.....	273
Exercícios	274

Capítulo 6 - Antenas de abertura.....	279
6.1 Introdução	279
6.2 Princípio de equivalência: Princípio de Huygens.....	279
6.3 Expressões do campo radiado a grande distância	282
6.4 Campo radiado por uma abertura plana situada num plano condutor perfeito	289
6.4.1 Equações do campo radiado a grande distância.....	289
6.4.2 Diretividade	291
6.5 Campo radiado por uma abertura plana retangular com distribuição uniforme	293
6.5.1 Equações do campo radiado a grande distância.....	294
6.5.1.1 Principais características do diagrama de radiação.....	296
6.6 Campo radiado por uma abertura plana retangular com distribuição cossinusoidal.....	298
6.6.1 Equações do campo radiado a grande distância.....	298
6.6.1.1 Principais características do diagrama de radiação.....	300
6.7 Campo radiado por uma abertura circular plana com distribuição uniforme	303
6.7.1 Equações do campo radiado a grande distância.....	304
6.7.1.1 Principais características do diagrama de radiação.....	306
6.8 Campo radiado por uma abertura circular plana com distribuição não uniforme.....	308
6.9 Distribuições bidimensionais contínuas	309
6.9.1 Abertura retangular com distribuição uniforme	310
6.9.2 Abertura retangular com distribuição cossinusoidal	312
6.9.3 Abertura retangular com distribuição cossinusoidal quadrada	313
6.9.4 Abertura circular com distribuição uniforme.....	316
6.10 Campo radiado a grande distância por uma abertura plana em espaço livre.....	317
6.10.1 Abertura retangular com distribuição uniforme em espaço livre	319
6.11 Cornetas eletromagnéticas	323
6.11.1 Corneta setorial aberta segundo o plano E.....	323
6.11.1.1 Diagrama de radiação	324
6.11.1.2 Diretividade.....	327
6.11.2 Corneta setorial aberta segundo o plano H	329
6.11.2.1 Diagrama de radiação	330
6.11.2.2 Diretividade.....	333
6.11.3 Corneta piramidal.....	335
6.11.3.1 Diagrama de radiação	336
6.11.3.2 Diretividade.....	338
6.11.3.3 Projeto duma corneta piramidal ótima	339
6.11.4 Corneta cónica.....	342
6.11.4.1 Diagrama de radiação	342
6.11.4.2 Diretividade.....	346
6.11.4.3 Projeto duma corneta cónica ótima	348
6.11.5 Cornetas corrugadas	350
6.11.6 Centro de fase	352
6.11.6.1 Determinação experimental do centro de fase	353
6.12 Refletores	355
6.12.1 Refletor de canto.....	356
6.12.2 Refletor parabólico axialmente simétrico alimentado pela frente	358
6.12.2.1 Geometria da superfície.....	359

6.12.2.2 Diagrama de radiação	361
6.12.2.3 Diretividade e ganho	369
6.12.2.4 Projeto simples dum paraboloide.....	375
6.12.2.5 Efeitos do erro de posicionamento do alimentador no foco.....	376
6.12.3 Refletor parabólico alimentado fora do eixo.....	378
6.12.3.1 Diagrama de radiação	379
6.12.3.2 Projeto simples dum refletor Offset	380
6.12.4 Antenas de duplo refletor	384
6.12.4.1 Antenas axialmente simétricas de duplo refletor.....	384
6.12.4.1.1 Projeto simples de antenas axialmente simétricas de duplo refletor.....	386
6.12.4.2 Antenas de duplo refletor alimentadas fora do eixo.....	387
6.12.4.2.1 Projeto simples de antenas de duplo refletor alimentadas fora do eixo	388
6.12.5 Outros refletores.....	390
6.12.5.1 Refletor parabólico cilíndrico.....	390
6.12.5.2 Refletor esférico.....	391
6.12.5.3 Tolerância do acabamento superficial dos refletores	392
Referências	393
Exercícios.....	394

Capítulo 7 - Antenas impressas..... 399

7.1 Introdução	399
7.2 Antena retangular.....	400
7.2.1 Campo radiado pelo modelo de radiação duma antena retangular.....	402
7.2.2 Resistência de entrada e diretividade duma antena retangular.....	403
7.2.3 Determinação da impedância de entrada usando o modelo da linha de transmissão	403
7.2.4 Projeto simples duma antena retangular usando o modelo da linha de transmissão	406
7.3 Métodos de análise de antenas impressas.....	407
7.4 Antena circular	409
7.5 Métodos de adaptar a impedância de entrada.....	411
7.6 Técnicas para aumentar a largura de banda.....	412
7.7 Métodos de obter polarização circular	413
7.8 Obtenção de dupla frequência.....	416
7.9 Agregados de antenas impressas	417
7.9.1 Agregado linear transversal de quatro patches para a frequência de 1.5GHz	417
7.9.2 Agregado planar de quatro patches para a frequência de 2.4GHz	419
7.9.3 Agregado planar com polarização circular esquerda para a frequência de 5.8GHz.....	421
7.9.4 Antena adaptativa para a frequência de 1.5GHz.....	423
Referências	428
Exercícios.....	429

Capítulo 8 - Antenas e agregados impressos multibanda para comunicações sem fios..... 431

8.1 Introdução	431
8.2 Monopolos impressos multibanda compactos e eletricamente pequenos	432
8.2.1 Monopolo fractal dual banda.....	432

8.2.2 Antena fractal tipo ILA	435
8.2.3 Monopolos impressos compactos com uma indutância do tipo chip.....	436
8.3 Monopolo impresso planar de baixo custo para terminais móveis.....	438
8.4 Agregados de monopolos impressos.....	443
8.4.1 Agregado de monopolos fractais.....	444
8.4.2 Agregado antenas em L invertido para aplicações MIMO	446
8.5 Desenvolvimentos recentes.....	449
8.6 Conclusões.....	451
Referências	451

Prefácio

Este livro destina-se essencialmente a alunos de cursos de ensino superior em Engenharia Eletrotécnica, Eletrónica e Telecomunicações, embora também seja útil para engenheiros que sintam necessidade de rever matérias ou de se atualizar. Supõe-se que os estudantes que usarão este livro já tenham adquirido em disciplinas anteriores conhecimentos de Física, nomeadamente de Eletromagnetismo, de Matemática, particularmente de cálculo integral e diferencial e de análise vetorial, e que também tenham estudado a propagação de ondas eletromagnéticas.

O livro pretende abordar de uma forma integrada a teoria e o projeto das antenas mais relevantes e comumente utilizadas, sendo a abordagem aqui tomada resultante da experiência acumulada pelo autor em numerosos anos de ensino de disciplinas de conteúdo programático semelhante ao abordado no texto, incluindo medidas de antenas no laboratório de radiofrequência e na câmara anecoica. Essa múltipla experiência permitiu fazer uma ligação frequente entre os conteúdos teóricos e os aspetos práticos que vão sendo abordados no texto.

Os assuntos são apresentados numa sequência que começa na teoria básica até ao estudo de antenas mais complexas induzindo uma compreensão e um amadurecimento mais profundos dos pontos anteriores. As equações relevantes são deduzidas e muitos resultados e conclusões são apresentados em forma de gráficos. Quando considerado conveniente, são inseridos resultados experimentais recolhidos em trabalhos realizados.

O livro está organizado em oito capítulos: Definições e Conceitos Fundamentais, Antenas Filiformes, Distribuições Contínuas, Agregados, Antenas de condutores cilíndricos, Antenas de abertura, Antenas impressas e Antenas e agregados impressos multibanda para comunicações sem fios.

O primeiro capítulo aborda os conceitos fundamentais e as principais definições tais como diretividade, ganho, diagrama de radiação etc. que serão depois usados nos outros capítulos.

O segundo capítulo começa com uma revisão dos fundamentos do eletromagnetismo seguida do estudo do dipolo infinitesimal de espessura desprezável. Com base nesta análise são estudadas antenas filiformes de diversos comprimentos e formas.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo da relação de Fourier entre uma distribuição contínua de corrente e a radiação por ela produzida, como uma extensão dos resultados obtidos no capítulo anterior.

O quarto capítulo aborda a teoria dos agregados de antenas. Primeiramente são estudadas as principais características dos agregados uniformes lineares, planares e tridimensionais. Seguidamente são analisados os agregados não uniformes em amplitude e também os agregados não uniformes em espaçamento entre elementos.

O quinto capítulo é um dos principais deste livro e nele são estudadas as antenas feitas com condutores cilíndricos que são muito comuns tais como os dipolos de diversos comprimentos, as antenas Yagi, as log-periódicas e as antenas em hélice. Neste capítulo é utilizado o simulador eletromagnético NEC para analisar alguns projetos e comparar os resultados simulados com os previstos pela teoria.

O sexto capítulo que também é dos principais deste livro, é dedicado ao estudo das antenas de abertura. Começa-se por deduzir a teoria das aberturas radiantes com base no princípio da equivalência ou de Huygens. Seguidamente são estudadas e analisadas as principais antenas de abertura como as cornetas eletromagnéticas e os refletores, nomeadamente os refletores parabólicos. Neste capítulo é utilizado o simulador eletromagnético GRASP-SE desenvolvido pela empresa TICRA para analisar alguns projetos e comparar os resultados simulados com os previstos pela teoria.

O sétimo capítulo aborda a teoria das antenas impressas. Estas antenas pertencem ao grupo das antenas ressonantes e por isso são de banda estreita sendo sobretudo utilizadas a frequências entre 1 e 100GHz. São antenas muito usadas que têm a vantagem de serem conformáveis.

Finalmente o oitavo capítulo é dedicado à utilização de monopolos impressos compactos e multibanda numa variedade de aplicações tais como WLAN, RFID e terminais móveis. São aqui abordadas várias técnicas de projetar antenas de baixo custo e de dimensões reduzidas.

No fim de cada capítulo, são propostos exercícios de aplicação, com o propósito de ajudar o leitor a compreender as matérias abordadas.

Em alguns capítulos o autor desenvolveu diversos scripts em Matlab para traçar gráficos e projetar algumas antenas. Estes scripts, assim como outros documentos, podem ser obtidos através da seguinte ligação:

https://www.dropbox.com/sh/n9j4dx4eo4oqm67/AABDyZkU_rjWeuqlvhaetW5Ya?dl=0

ou da ligação:

http://livro_antenas_diversos.av.it.pt/.

A utilização deste livro num curso de ensino superior depende do respetivo plano de estudos. Num cenário em que existe uma disciplina obrigatória sobre Antenas com uma escolaridade semanal de 4 ou 5 horas é possível usar quase todo o conteúdo do livro, cabendo ao docente decidir a profundidade com que deverão ser abordadas as diversas matérias.

Num plano onde existe uma disciplina obrigatória sobre Antenas com uma escolaridade semanal de 3 ou menos horas, não será possível usar todo o conteúdo do livro pelo que o docente terá de decidir que capítulos não serão lecionados e qual a profundidade com que deverão ser abordadas as restantes matérias. Se neste plano de estudos, a esta disciplina obrigatória se seguir outra optativa, então nessa poderão ser lecionadas as matérias não lecionadas anteriormente e aprofundadas algumas outras.

Num cenário em que existe uma disciplina obrigatória geral na qual há uma parte sobre Antenas obviamente não será possível usar todo o conteúdo do livro, pelo que o docente terá de decidir criteriosamente que capítulos não serão lecionados e, no que diz respeito aos restantes capítulos, qual a profundidade com que deverão ser abordadas as restantes matérias. Neste cenário, presume-se que a esta disciplina generalista seguir-se-á uma outra optativa para complementar o que já foi ensinado, podendo recorrer-se aos capítulos não lecionados antes.

Sendo assim, este livro pretende ser um auxiliar, quer na formação universitária, quer no aprofundamento de conhecimentos ou de formação profissional ao longo da vida.

Em termos da notação utilizada chama-se a atenção para o facto de as grandezas que variam explicitamente com o tempo serem representadas num estilo do tipo caligráfico, sendo encimadas por uma seta quando são vetores. As grandezas complexas são representadas em maiúsculas no tipo de letra usada no texto, mas realçadas a negrito. No caso de ser um vetor cujas componentes são fasores, ele será representado a negrito e encimado por uma seta. Os vetores unitários, isto é, os versores, são representados em minúsculas em negrito e encimados por um acento circunflexo.

O autor gostaria de agradecer à Universidade de Aveiro onde lecionou muitos anos, por lhe ter permitido obter a formação necessária para a sua progressão académica e, conseqüentemente os conhecimentos necessários para escrever este livro. O autor também agradece ao Instituto de Telecomunicações, que acompanhou desde o início da sua atividade, e que lhe proporcionou os meios indispensáveis para a execução de diversos trabalhos experimentais relevantes para alguns dos resultados apresentados neste livro.

Finalmente, o autor quer expressar um grande agradecimento a muitos dos colegas de ambas as instituições pela troca de ideias e de sugestões que foram muito importantes para enriquecer os conhecimentos do autor. O autor agradece também ao pessoal administrativo e técnico destas instituições pelo apoio valioso que lhe souberam dar, duma maneira muito simpática, ao longo da sua carreira.

José Rocha Pereira

Capítulo 1

Definições e Conceitos Fundamentais

1.1 Introdução

É hoje em dia de uso geral a recepção de informação através de ondas eletromagnéticas que se propagam livremente no meio que nos rodeia. São exemplos bem conhecidos: a Rádio, a Televisão (quer a difundida por via terrestre quer a diretamente recebida de satélites) e o sistema GPS. As ondas eletromagnéticas recebidas pelos utilizadores são emitidas por emissores tendo-se neste caso sistemas unidireccionais. São também bem conhecidos sistemas bidireccionais nos quais os utilizadores transmitem e recebem informação transmitindo e recebendo ondas eletromagnéticas. O exemplo mais corrente é sem dúvida a utilização dos telemóveis. São também conhecidos os simples *walkie-talkies*, as comunicações entre radioamadores, as comunicações entre as forças policiais e militares.

O esquema básico dum sistema de comunicações, usando ondas eletromagnéticas propagando-se em meio livre, está representado na Figura 1.1. Nele se pode ver que um dos componentes fundamentais é a interface entre as ondas eletromagnéticas que se propagam ao longo dum percurso determinado através de um guia de ondas apropriado e as ondas eletromagnéticas que se propagam em meio livre. Este componente é designado por antena.

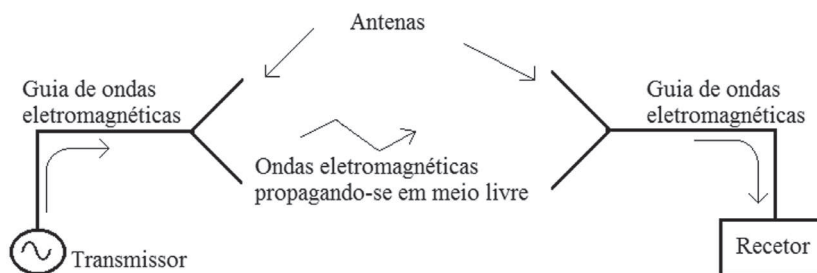


Figura 1.1 Esquema básico dum sistema de comunicações, usando ondas eletromagnéticas propagando-se em meio livre.

Para além dos sistemas de comunicações as antenas são também usadas em sistemas de deteção remota como o RADAR (*RAdio Dection And Ranging*) e a radioastronomia.

Do mesmo modo que as estruturas usadas para guiar ondas eletromagnéticas podem assumir formas diversas tais como: linhas bifilares, cabos coaxiais, linhas impressas, condutores metálicos ocos (normalmente designados por guias de onda), também as antenas têm diversas configurações dependendo essencialmente da frequência das ondas eletromagnéticas que vão transmitir e/ou receber.

1.2 Tipos de antenas

As antenas podem assumir diversas formas sendo algumas bem conhecidas do grande público, tais como as antenas dos automóveis, as antenas Yagi de recepção de televisão terrestre e as parabólicas de recepção de televisão transmitida por satélite. Fundamentalmente as antenas podem-se agrupar em dois grandes grupos: as antenas constituídas por um fio condutor no qual existe uma corrente elétrica e as antenas formadas por uma abertura onde existe uma determinada distribuição de campo eletromagnético.

No caso das antenas filiformes o fio condutor pode ter diversas formas: direito, enrolado em forma de hélice, em forma dum aro normalmente circular ou quadrado. Estas antenas resultam da modificação apropriada das linhas bifilares, no caso do dipolo e do aro, e dos cabos coaxiais no caso do monopolo e da hélice, tal como se mostra na Figura 1.2.

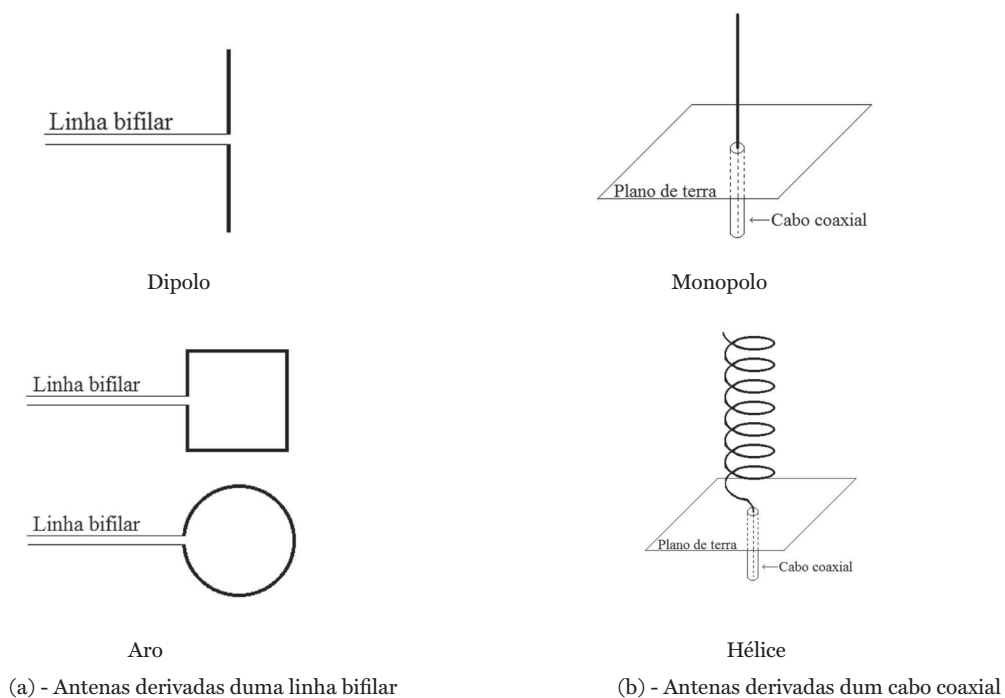


Figura 1.2 Configurações de antenas filiformes.

No caso das antenas de abertura, umas resultam da modificação apropriada das guias de onda retangulares e circulares, tal como se mostra na Figura 1.3, outras derivam da aplicação de conceitos normalmente usados na ótica como é o caso dos refletores cilíndricos e parabólicos e das lentes, como se mostra na Figura 1.4.

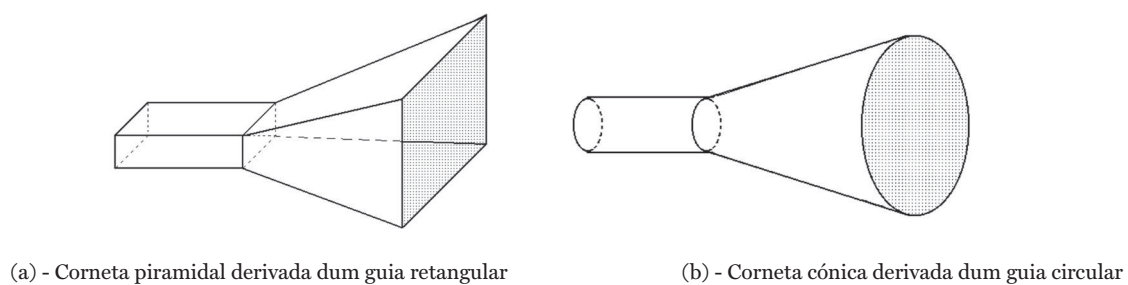
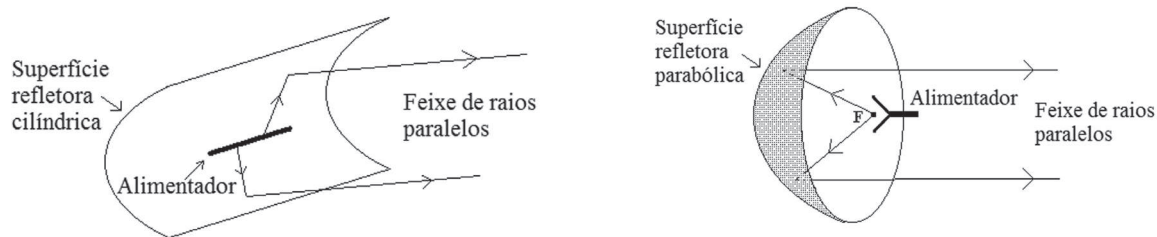


Figura 1.3 Configurações de antenas de abertura derivadas de guias de onda.



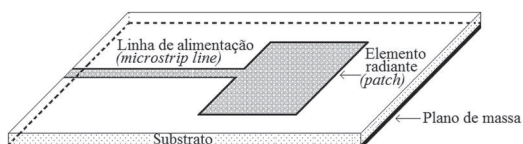
(a) - Refletor cilíndrico e refletor parabólico



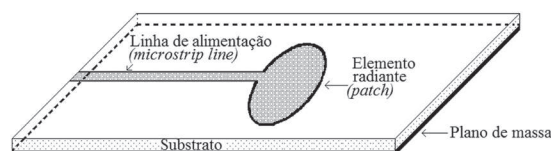
(b) - Lentes

Figura 1.4 Configurações de antenas que derivam da aplicação de conceitos usados em ótica.

Outro tipo importante de antenas e bastante usado hoje em dia são as antenas impressas ou *microstrip* que resultam da modificação apropriada de linhas impressas, tal como se mostra na Figura 1.5.



(a) - Antena impressa de forma retangular



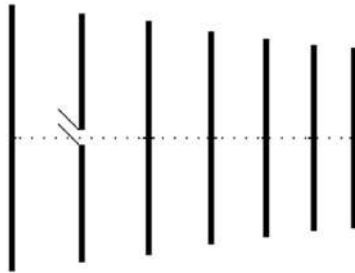
(b) - Antena impressa de forma circular

Figura 1.5 Antenas impressas

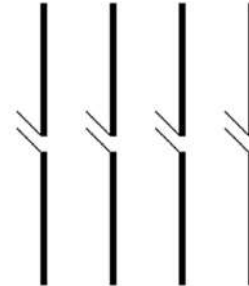
As antenas filiformes podem funcionar com dimensões bastante inferiores ao comprimento de onda, podendo, portanto, ser usadas a frequências baixas, embora com baixa eficiência. Um exemplo desta situação é uma antena de automóvel para receber emissões de rádio em onda média, isto é, na banda de 535 a 1605 kHz, à qual corresponde um comprimento de onda médio de cerca de 300m. A antena típica tem cerca de 1m ou seja 0.003λ . A maior eficiência atinge-se, contudo, para dimensões da ordem do meio comprimento de onda, o mesmo acontecendo às antenas impressas. O limite superior de utilização destas antenas, em termos de frequência, está, portanto, dependente da possibilidade de realizar e alimentar antenas de dimensões físicas muito reduzidas.

Em contrapartida, as antenas que derivam da aplicação de conceitos normalmente usados na ótica, como é o caso dos refletores e das lentes, só se tornam eficientes se as dimensões da abertura forem de vários comprimentos de onda. Isto faz com que estas antenas sejam fundamentalmente utilizadas para altas frequências, para as quais é relativamente fácil construir e manusear estruturas de dimensões físicas relativamente pequenas, mas eletricamente muito grandes, isto é, com muitos comprimentos de onda. Pode-se dar como exemplo uma antena parabólica para receber televisão diretamente de satélite à frequência de 10GHz. Um paraboloide com 1m de diâmetro, é relativamente pequeno, no entanto tem um diâmetro de 33λ .

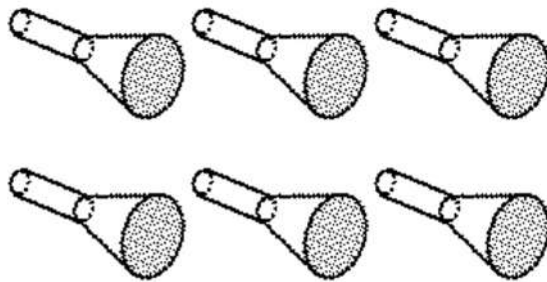
Muitas das antenas usadas na prática não são uma simples antena das mencionadas anteriormente, mas sim um agrupamento ou um agregado de antenas semelhantes. Como exemplo temos a antena Yagi muito comum na recepção de televisão que é constituída por vários fios condutores dispostos paralelamente uns aos outros. Embora só um seja alimentado, ou ativo, e os outros atuem como parasitas, pode ser considerada um agregado de dipolos. Na Figura 1.6 são mostrados alguns exemplos de agregados.



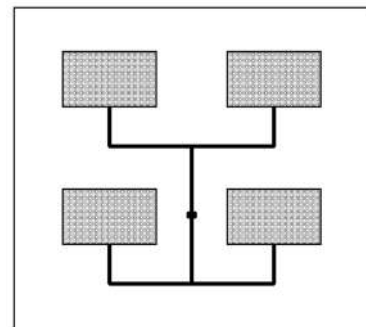
(a) - Antena Yagi. Tem um dipolo ativo e outros parasitas



(b) - Agregado de dipolos



(c) - Agregado de cornetas cónicas



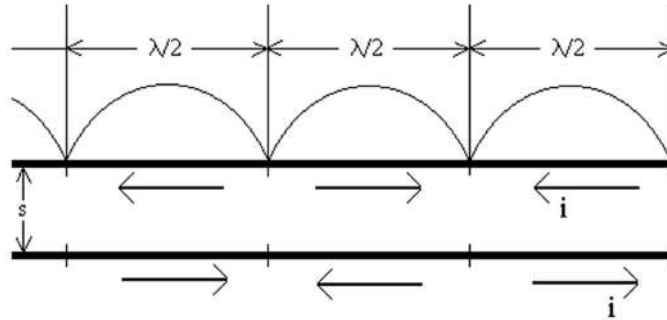
(d) - Agregado de antenas impressas

Figura 1.6 Alguns exemplos de agregados de antenas.

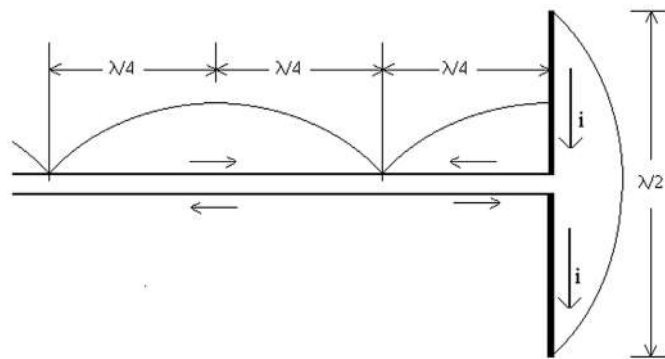
1.3 Como radiam as antenas

Para melhor se entender o mecanismo de radiação duma antena, comecemos por recorrer a uma analogia. É de todos bem conhecido que num dado ponto da superfície dum lago se pode observar uma ondulação produzida por uma pedra lançada noutro ponto desse lago. Convém notar alguns aspetos desta situação. Primeiro, decorre algum tempo entre o lançamento da pedra, isto é, o início da perturbação e o aparecimento da ondulação no ponto de observação. A perturbação propaga-se, portanto, com uma velocidade finita. Segundo, a perturbação propaga-se a essa velocidade a todos os pontos em redor mesmo depois de cessar a causa que lhe deu origem. Isto é, não é necessário manter continuamente a excitação para haver propagação.

No mecanismo de radiação duma antena o que se propaga em redor dela são ondas eletromagnéticas, e a causa que lhes dá origem são correntes variáveis no tempo, isto é, cargas com movimento acelerado na antena. Para explicar este mecanismo vamos recorrer a um dipolo, com um comprimento total de meio comprimento de onda, derivado duma linha bifilar terminada em circuito aberto, tal como se mostra na Figura 1.7.



(a) - Distribuição da corrente ao longo duma linha bifilar terminada em circuito aberto



(b) - Distribuição da corrente ao longo dum dipolo de meio comprimento de onda

Figura 1.7 Obtenção dum dipolo de meio comprimento de onda a partir duma linha bifilar terminada em circuito aberto.

Nos dois fios que constituem o dipolo, as correntes estão alinhadas uma com a outra e não em sentidos opostos como na linha de transmissão que lhe deu origem. A distribuição espacial da amplitude da corrente ao longo do dipolo é aproximadamente sinusoidal, atingindo o valor máximo no seu centro. A existência da corrente está relacionada com a variação da distribuição de carga ao longo do dipolo. Assumindo uma variação harmónica de frequência, f , isso significa que a distribuição de carga oscila a essa frequência. Considerando que o processo se inicia em $t=0$, então durante o primeiro $\frac{1}{4}$ de período vai haver acumulação de carga positiva na parte superior do dipolo e uma acumulação de carga negativa na parte inferior do dipolo. Esta variação de carga dá origem a uma perturbação que se faz sentir, sob a forma dum campo eletromagnético, em redor do dipolo até uma distância de $\frac{1}{4}$ do comprimento de onda λ , e que pode ser representada para $t=T/4$, pelas linhas de força do campo elétrico que se iniciam nas cargas positivas da parte superior do dipolo e terminam nas cargas negativas da parte inferior do dipolo, como se mostra na Figura 1.8(a). Entre $t=T/4$ e $t=T/2$ as cargas positivas vão neutralizar as cargas negativas dando origem a uma corrente que atinge o seu máximo para $t=T/2$, quando a distribuição da carga for nula. Para este instante de tempo a perturbação já se faz sentir em redor do dipolo até uma distância de $\lambda/2$, e pode ser representada por linhas de força que se fecham sobre si próprias formando anéis, como se mostra na Figura 1.8(b). Entre $t=T/2$ e $t=3/4T$ vai haver acumulação de carga negativa na parte superior do dipolo e uma

acumulação de carga positiva na parte inferior do dipolo. Esta nova variação de carga pode ser representada para $t=3/4T$, por linhas de força que se iniciam nas cargas positivas da parte inferior do dipolo e terminam nas cargas negativas da parte superior do dipolo. Entretanto por esta altura já as linhas de força em forma de anéis atingem a distância de $3/4\lambda$, como se mostra na Figura 1.8(c). Entre $t=3/4T$ e $t=T$ as cargas positivas vão neutralizar as cargas negativas dando origem a uma corrente que atinge o seu máximo para $t=T$, quando a distribuição da carga for nula. Por esta razão, a perturbação junto ao dipolo pode ser representada por linhas de força que se fecham sobre si próprias formando um novo conjunto de anéis. Para este instante de tempo o primeiro conjunto de linhas de força em forma de anel já atingiu a distância de λ e a perturbação total à volta do dipolo pode ser representada por linhas de força formando dois conjuntos de anéis, como se mostra na Figura 1.8(d).

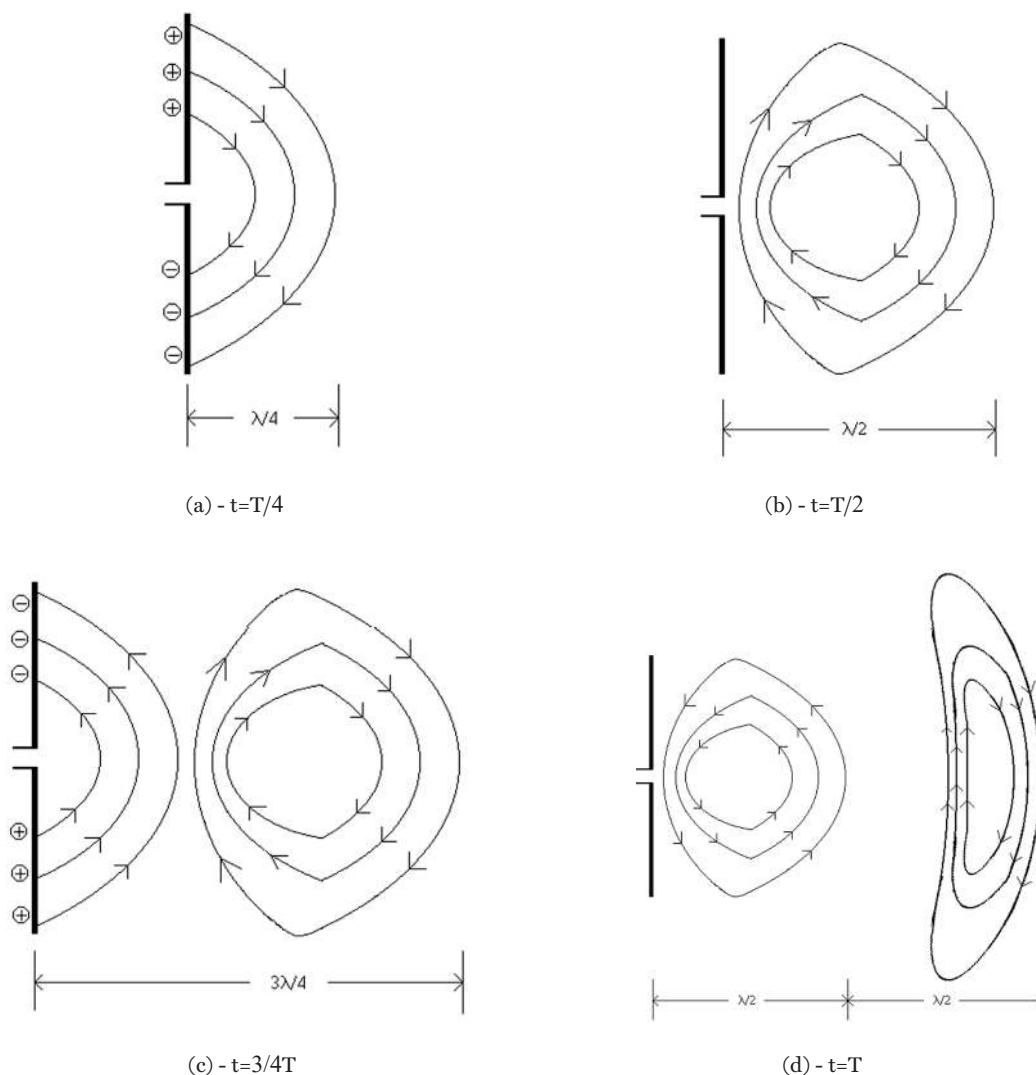


Figura 1.8 Ilustração do modo como se formam e se propagam as linhas de força do campo elétrico produzidas por um dipolo.

Este processo de formação de novas linhas de força repetir-se-á enquanto houver variação de carga na antena, no entanto convém notar que a perturbação já criada continuará a propagar-se em seu redor sob a forma duma onda eletromagnética, mesmo depois de cessar a corrente na antena.

Também é importante notar que para provocar a perturbação foi necessário fornecer à antena uma dada quantidade de energia. Considerando que a antena está imersa num meio sem perdas, essa energia vai atravessar

esferas de dimensões cada vez maiores, isto é, essa energia vai-se distribuindo por áreas cada vez maiores, dando origem a densidades de potência cada vez menores, atingindo-se a certa altura valores não mensuráveis. Esta densidade de potência será ainda menor se o meio em redor da antena tiver perdas, pois a energia vai diminuindo à medida que atravessa esse meio dissipativo.

Podemos dar como exemplo uma emissão de televisão feita há 50 anos. Teoricamente essa emissão está agora a atingir regiões à distância de 50 anos-luz da Terra, no entanto os valores da densidade de energia nesses pontos são tão baixos que se tornam indetetáveis.

1.4 Parâmetros fundamentais das antenas

O desempenho duma antena pode ser caracterizado por diversos parâmetros. Muitos destes são genéricos e independentes da geometria da antena. Nesta secção serão definidos os mais importantes e analisadas as relações entre alguns deles.

1.4.1 Densidade de potência radiada

Já vimos que uma antena é um dispositivo que faz a interface entre as ondas eletromagnéticas que se propagam ao longo dum percurso determinado através de um guia de ondas apropriado e as ondas eletromagnéticas que se propagam em meio livre. A grande distância a onda radiada pode-se considerar plana e, portanto, a antena produz um campo eletromagnético caracterizado por um vetor campo elétrico $\vec{E}$ e um vetor campo magnético $\vec{H}$ perpendiculares entre si.

Considerando variações harmónicas sinusoidais a norma do vetor $\vec{E}$ será dada por $E = E_a(r, \theta; \phi) \cos(\omega t + \phi)$ e a do vetor $\vec{H}$ será dada por $H = H_a(r, \theta; \phi) \cos(\omega t + \phi)$.

Em regime sinusoidal tem-se que $\vec{E} = R_e[\vec{E} e^{j\omega t}]$ e $\vec{H} = R_e[\vec{H} e^{j\omega t}]$, em que $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são vetores cujas componentes são fasores. A norma do vetor $\vec{E}$ é $E = E_a e^{j\phi}$ e, portanto, verifica-se a relação $\vec{E} = R_e[\vec{E} e^{j\omega t}]$. Relações semelhantes existem para o campo magnético.

Como já deve ser do conhecimento do leitor define-se o vetor de Poynting instantâneo como em (1-1). Para uma revisão sobre este assunto aconselha-se a consulta da referência [1].

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{W} / \text{m}^2) \quad (1-1)$$

Atendendo que para qualquer número complexo C se pode escrever que $\text{Re}[C] = \frac{1}{2} [C + C^*]$ verificam-se então as relações (1-2):

$$\begin{aligned} R_e[\vec{E} e^{j\omega t}] &= \frac{1}{2} [\vec{E} e^{j\omega t} + (\vec{E} e^{j\omega t})^*] \\ R_e[\vec{H} e^{j\omega t}] &= \frac{1}{2} [\vec{H} e^{j\omega t} + (\vec{H} e^{j\omega t})^*] \end{aligned} \quad (1-2)$$

Substituindo estas relações em (1-1) tem-se (1-3):

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2} [\vec{E} e^{j\omega t} + (\vec{E} e^{j\omega t})^*] \times \frac{1}{2} [\vec{H} e^{j\omega t} + (\vec{H} e^{j\omega t})^*] \\ &= \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H}) e^{j2\omega t} + \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H}^*) + \frac{1}{4} (\vec{E}^* \times \vec{H}) + \frac{1}{4} [(\vec{E} \times \vec{H}) e^{j2\omega t}]^* \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [(\vec{E} \times \vec{H}^*) + (\vec{E}^* \times \vec{H})] + \frac{1}{2} [(\vec{E} \times \vec{H}) e^{j2\omega t} + [(\vec{E} \times \vec{H}) e^{j2\omega t}]^*] \right\} \end{aligned} \quad (1-3)$$

A igualdade (1-3) é equivalente a (1-4):

$$\vec{S} = \frac{1}{2} [R_e(\vec{E} \times \vec{H}^*) + R_e(\vec{E}^* \times \vec{H})] \quad (1-4)$$

O segundo termo desta expressão tem uma variação sinusoidal com o dobro da frequência dos campos, tem um valor médio nulo e representa a potência reativa. O primeiro termo de (1-4) representa a densidade média de potência que é, portanto, dada pela expressão (1-5):

$$\vec{S}_{av}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2} R_e(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (W / m^2) \quad (1-5)$$

Integrando esta densidade de potência ao longo duma superfície fechada em redor da antena obtém-se a potência média que atravessa essa superfície. Esta potência é a potência média radiada pela antena sendo dada então pela relação (1-6):

$$P_{rad} = \oint \vec{S}_{av} \cdot \vec{ds} \quad (W) \quad (1-6)$$

em que $\vec{ds} = ds \hat{n}$ é um vetor normal à superfície e dirigido de dentro para fora.

1.4.2 Intensidade de radiação

A densidade de potência é uma grandeza dependente do ponto de observação. De facto, como a energia radiada é constante, quanto mais distante for o ponto de observação mais baixa é a densidade de potência. Por essa razão é normal usar outra grandeza associada apenas à direcção e que é a intensidade de radiação.

A intensidade de radiação segundo uma dada direcção é definida como a potência radiada por unidade de angulo sólido, isto é, por esterradiano.

À semelhança da definição de radiano que é o ângulo que emanado do centro duma circunferência subtende um arco de comprimento igual ao raio, também se define esterradiano como o ângulo sólido que tendo o seu vértice no centro duma esfera de raio r a intersecta através duma superfície com uma área igual a r^2 .

Como uma esfera de raio r tem uma área $A=4\pi r^2$, isso significa que uma esfera contém 4π esterradianos.

Usando a letra U para designar a intensidade de radiação e tendo em atenção a definição de esterradiano, facilmente se obtém a relação entre a densidade de potência e a intensidade de radiação que é dada por (1-7):

$$U(\theta, \phi) = r^2 S_{\text{rad}}(r, \theta, \phi) \quad (\text{W/str}) \quad (1-7)$$

A potência radiada por uma antena pode ser então também expressa pela relação (1-8):

$$P_{\text{rad}} = \oint_{\Omega} U(\theta; \phi) d\Omega \quad (\text{W}) \quad (1-8)$$

em que Ω é o ângulo sólido sobre o qual se faz a integração e $d\Omega$ é o ângulo sólido elementar.

1.4.3 Diagrama de radiação

Para o desempenho duma antena é muito importante saber como é que ela emite e recebe ondas eletromagnéticas em função da direção. A representação das características de radiação duma antena em função da direção designa-se por diagrama de radiação. Embora estas características incluam intensidade de radiação, intensidade de campo e polarização, normalmente o que se entende por diagrama de radiação é, a distribuição tridimensional da distribuição da energia em função da direção de observação e a uma distância constante e considerada grande em termos do comprimento de onda.

Face a esta definição podemos considerar que um modo de obter o diagrama de radiação seria fazer deslocar um observador sobre uma esfera, com centro na antena e com um raio grande em termos do comprimento de onda, de modo que as medidas fossem feitas no campo distante da antena. Cada posição ocupada pelo observador corresponde a uma direção de observação a partir da antena.

Considerando a antena a emitir, se o observador medir a intensidade de radiação em diversos pontos sobre a esfera, obtém-se uma tabela que dá a distribuição da energia emitida pela antena em função da direção de observação. Embora esta tabela contenha toda a informação relevante, não é fácil de manusear pelo que é mais comum apresentar o diagrama de radiação como uma representação gráfica. A representação gráfica mais completa é a 3 dimensões, de modo a mostrar as características radiantes da antena em todo o espaço em redor. Hoje em dia é relativamente fácil visualizar este tipo de gráficos, recorrendo a ferramentas gráficas inseridas em pacotes de *software* disponíveis que possuem diversas facilidades tais como rotações, *zooms* e visualização de cortes segundo determinados planos.

Quando o diagrama de radiação é obtido por simulação ou por uma expressão matemática, a representação em 3D é fácil de obter e pode ser, portanto, utilizada, sobretudo quando se dispõe das ferramentas gráficas apropriadas. No entanto, se o diagrama de radiação é para ser obtido por medições experimentais, para se poder utilizar a representação em 3D será necessário fazer muitas medidas em volta da antena o que em geral não é prático. Normalmente apenas são feitas medidas em determinados planos o que corresponde, na descrição que foi feita acima, à deslocação do observador ao longo duma circunferência em cima da esfera estando, portanto, sempre no mesmo plano.

Quer para a preparação do esquema de medida do diagrama de radiação quer para a sua visualização gráfica, é fundamental recorrer a um sistema de coordenadas conveniente. O mais apropriado é o sistema de coordenadas esféricas representado na Figura 1.9. Cada ponto é definido por um conjunto de três coordenadas, $(r; \theta; \phi)$, em que r representa a distância desse ponto ao centro dos sistema de coordenadas, θ é o ângulo medido ao longo do meridiano a partir do eixo dos zz e ϕ é o ângulo entre o plano xz e o plano definido pelo eixo dos zz e pelo ponto. Cada direção é dada por um par de coordenadas $(\theta; \phi)$. A direção $(\theta=0^\circ; \forall \phi)$ corresponde ao sentido positivo do eixo dos zz . A direção $(\theta=90^\circ; \phi=0^\circ)$ corresponde ao sentido positivo do eixo dos xx e a direção $(\theta=90^\circ; \phi=90^\circ)$ corresponde ao sentido positivo do eixo dos yy .

A área elementar neste sistema de coordenadas é $dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ sendo o ângulo sólido a ela associada $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

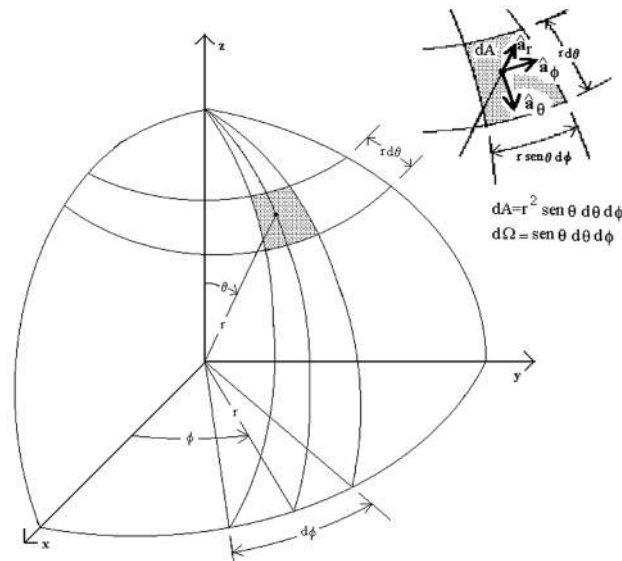


Figura 1.9 Sistema de coordenadas esféricas.

1.4.3.1 Principais características dum diagrama de radiação

Os diagramas de radiação apresentam algumas características próprias das quais se pode obter os parâmetros que definem o desempenho da antena em termos do modo como radia ou recebe energia. Para melhor se compreender estas características basear-nos-emos no diagrama de radiação duma antena Yagi. Na Figura 1.10 está representada a versão a 3 dimensões. Pela análise desta figura vê-se que esta antena radia mais segundo umas direções do que segundo outras.

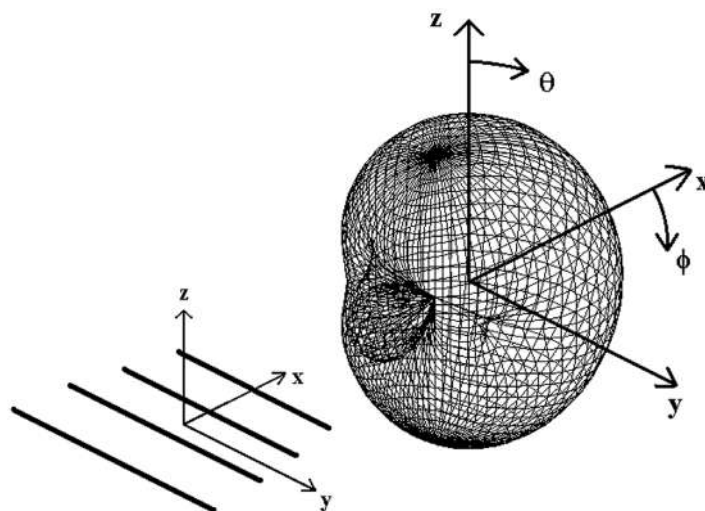


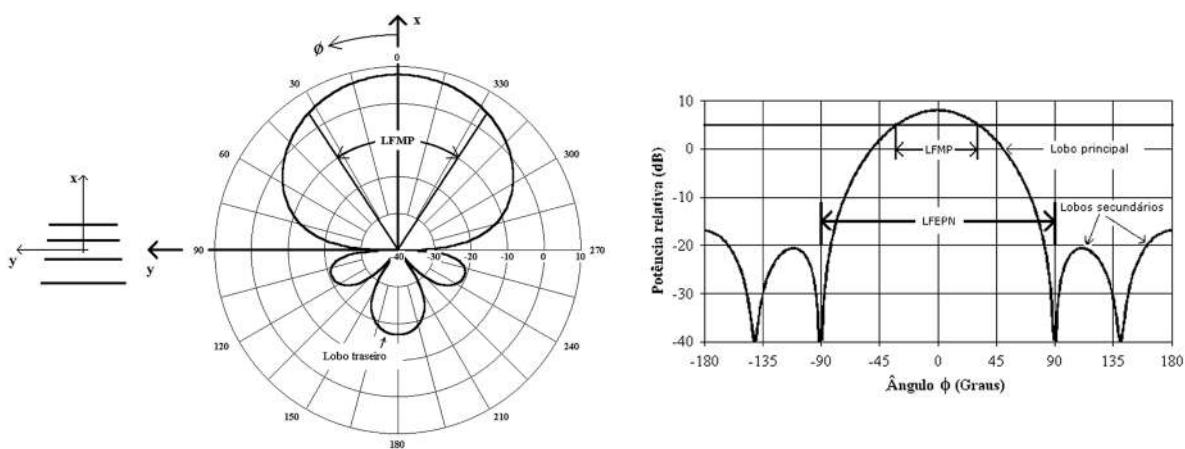
Figura 1.10 Diagrama de radiação em representação 3D.

Se a versão a 3 dimensões do diagrama de radiação duma antenna for uma esfera, isso significa que a antenna radia exatamente da mesma forma segundo qualquer direção. Tal antenna designa-se por isotrópica e embora não seja realizável é usada como antenna de referência.

Como já foi referido, normalmente utilizam-se mais representações a 2 dimensões do que a 3 dimensões. Estas representações não são mais do que cortes no diagrama a 3D, segundo planos determinados.

Os dois planos mais importantes são os planos E e H. O plano E é definido pela direção de máxima radiação e pela orientação do vetor campo elétrico radiado pela antenna. O plano H é definido pela direção de máxima radiação e pela orientação do vetor campo magnético radiado pela antenna. Normalmente a antenna é posicionada de modo que estes planos coincidam com planos principais do sistema de coordenadas esféricas.

Na Figura 1.11 está representado o diagrama de radiação no plano E, que neste caso coincide com o plano $\theta=90^\circ$ (plano xy). No gráfico (a) usam-se coordenadas polares e no gráfico (b) usam-se coordenadas retangulares. É evidente que a informação contida em qualquer um destes dois gráficos é a mesma, trata-se apenas de duas representações alternativas.

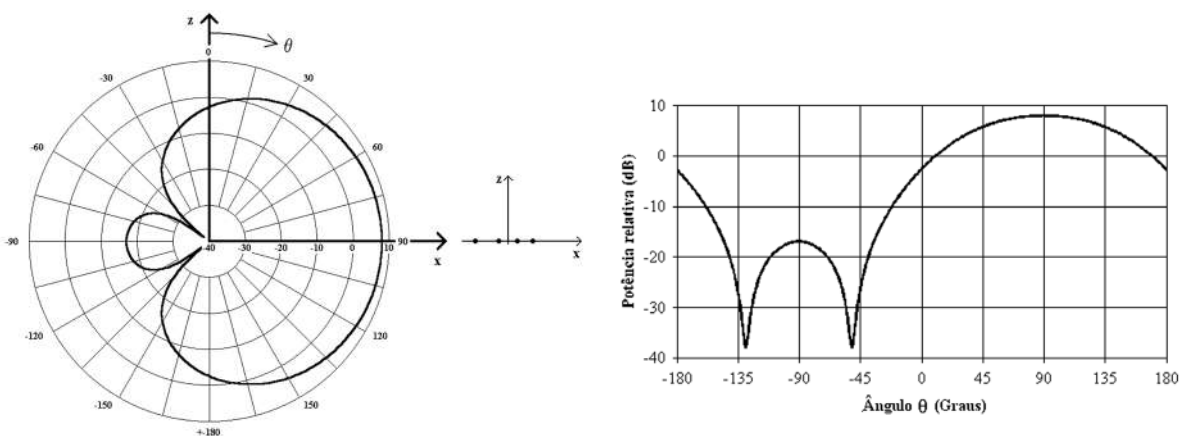


(a) - Gráfico em coordenadas polares

(b) - Gráfico em coordenadas retangulares

Figura 1.11 Diagrama de radiação no plano $\theta=90^\circ$.

Na Figura 1.12 está representado o diagrama de radiação no plano H, que neste caso coincide com o plano $\phi=0^\circ$ (plano xz) e na Figura 1.13 está representado o diagrama de radiação no plano $\phi=90^\circ$ (plano yz).



(a) - Gráfico em coordenadas polares

(b) - Gráfico em coordenadas retangulares

Figura 1.12 Diagrama de radiação no plano $\phi=0^\circ$

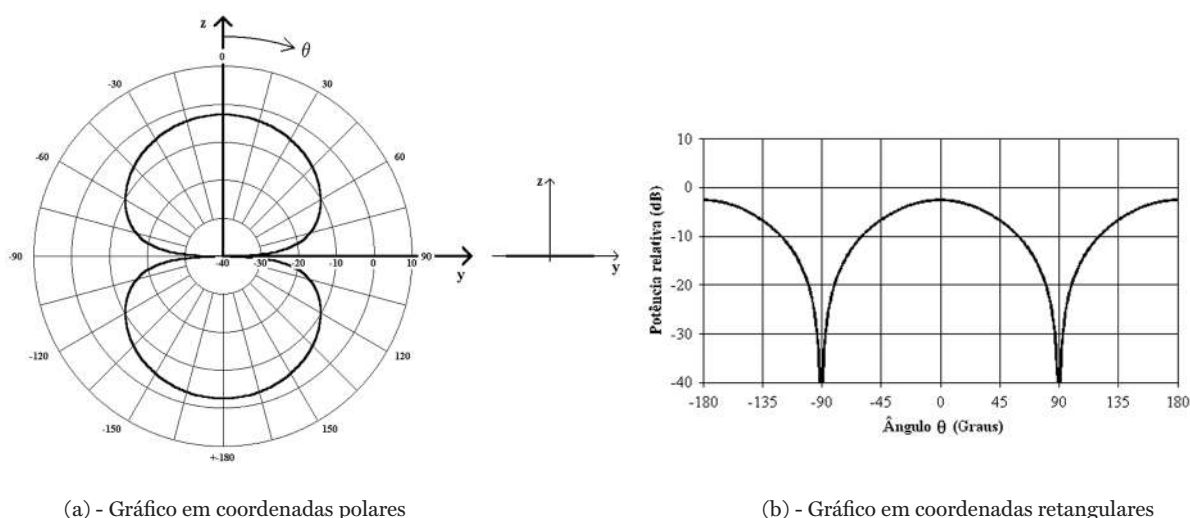


Figura 1.13 Diagrama de radiação no plano $\phi=90^\circ$

Destas figuras pode-se concluir que para esta antena a direção de máxima radiação (ou receção) é segundo o sentido positivo do eixo dos xx, ($\theta=90^\circ$; $\phi=0^\circ$).

A estrutura dum gráfico que representa um diagrama de radiação apresenta características genéricas que importa identificar. Recorrendo ao gráfico da Figura 1.11 pode-se identificar direções de mínimos e direções de máximos relativos. As porções entre dois mínimos designam-se por lobos. O lobo que contém a direção de máximo é o lobo principal e os outros são os lobos secundários. Uma antena diretiva tem um diagrama de radiação com um só lobo principal e quanto mais estreito ele for mais diretiva é a antena. Uma medida desta diretividade é dada pela largura de feixe a meia potência (LMMP)¹. Este parâmetro é a faixa angular compreendida entre os dois ângulos, um de cada lado da direção de máximo, para os quais a potência recebida é metade da que a antena recebe segundo direção de máximo. No eixo das ordenadas do gráfico da Figura 1.11, estão indicados os níveis relativos do sinal recebido em termos de potência, expressos em dB. Como neste exemplo, para a direção de máximo $\theta=0^\circ$ o sinal recebido corresponde a 8dB, isso significa que a LFMP é de 64° dada pela diferença entre os ângulos $\theta=32^\circ$ e $\theta=-32^\circ$, para os quais o nível de sinal é 5dB, isto é, 3dB abaixo do máximo.

Outro indicador desta diretividade é dado pela largura de feixe entre os primeiros nulos (LFEPN)².

Para uma antena diretiva como a deste exemplo, também é importante definir a razão entre o sinal recebido segundo o sentido de máximo e o sinal recebido no sentido oposto. A este parâmetro chama-se razão frente-trás. Neste exemplo o nível do lobo de trás é -17dB o que significa que a razão frente-trás é de 25dB.

Dum modo geral para uma antena diretiva é desejável que o nível dos lobos secundários relativamente ao principal seja inferior a 20dB.

Uma antena diretiva é vocacionada para dirigir a energia para uma direção específica, contudo nem sempre essa situação interessa. Por vezes é desejável que a energia atinja do mesmo modo todos os pontos situados num plano em redor da antena, como é o caso da radiodifusão. Concretamente, todos os pontos desse plano situados à mesma distância da antena, isto é, situados numa mesma circunferência centrada na antena devem receber o mesmo nível de energia. Uma antena que consiga este objetivo define-se como isotrópica. O seu diagrama de radiação em coordenadas polares terá, portanto, a forma duma circunferência e em coordenadas retangulares a forma duma linha paralela ao eixo das abcissas.

¹ Em língua inglesa designa-se por *half power beamwidth* (HPBW).

² Em língua inglesa designa-se por *first null beamwidth* (FNBW).

1.4.4 Diretividade e ganho

É importante quantificar quanto é que uma antena radia numa dada direção. Para isso define-se diretividade duma antena, numa dada direção, como a razão entre a intensidade de radiação que a antena produz nessa direção e aquela que seria produzida por uma antena isotrópica radiando a mesma potência.

Designando a diretividade segundo a direção (θ, ϕ) por $D(\theta, \phi)$ pode-se então escrever como em (1-9):

$$D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_o} \quad (1-9)$$

em que $U(\theta, \phi)$ é a intensidade de radiação que a antena produz na direção (θ, ϕ) e U_o é a intensidade de radiação produzida por uma antena isotrópica radiando a mesma potência.

Por definição de antena isotrópica temos: $U_o = \frac{P_{rad}}{4\pi}$ pelo que $D(\theta, \phi)$ se pode exprimir como em (1-10):

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \quad (1-10)$$

Quando se faz referência simplesmente à diretividade D da antena admite-se que se trata da diretividade segundo a direção de máximo. Isto é, D é dada por (1-11):

$$D = 4\pi \frac{U_{max}}{P_{rad}} \quad (1-11)$$

A diretividade é adimensional e pode ser expressa por um número real positivo. Contudo é mais comum exprimi-la em unidades logarítmicas, ou seja, em dB recorrendo à relação $D_{dB} = 10 \log(D)$, visto tratar-se duma relação entre potências.

Por vezes para melhor caracterizar o modo como está concentrada a energia radiada por uma antena diretiva, usa-se o parâmetro ângulo sólido de feixe Ω_A . Este parâmetro define-se como o ângulo sólido onde estaria contida toda a potência radiada pela antena se, no seu interior, a intensidade de radiação fosse constante e igual à intensidade de radiação máxima radiada pela antena. Resulta desta definição que, por aplicação da equação (1-8), obtém-se (1-12):

$$P_{rad} = \iint_{\Omega_A} U_{max} d\Omega = U_{max} \Omega_A \quad (W) \quad (1-12)$$

Substituindo nesta equação P_{rad} pela equação (1-8) obtém-se para o ângulo sólido de feixe Ω_A a equação (1-13):

$$\Omega_A = \frac{\oiint U(\theta, \phi) d\Omega}{U_{max}} = \oiint U_n(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U_n(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad (1-13)$$

em que $U_n(\theta, \phi)$ é a intensidade de radiação normalizada.

Substituindo (1-12) em (1-11) obtém-se (1-14):

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad (1-14)$$

Para antenas com um único lobo principal e lobos secundários com um nível relativo baixo, pode-se mostrar [2] que o ângulo sólido de feixe Ω_A é aproximadamente igual ao produto das LFMP em dois planos

perpendiculares que se intersectam segundo a direção de máxima radiação. Com base neste facto pode-se então escrever a relação (1-15):

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \approx \frac{4\pi}{\Theta_{lr} \Theta_{2r}} \quad (1-15)$$

em que Θ_{lr} e Θ_{2r} são as LFMP em cada um dos planos, expressas em radianos.

Se estas larguras de feixe a meia potência forem expressas em graus, teremos então (1-16):

$$D \approx \frac{4\pi}{\Theta_{lr} \Theta_{2r}} = \frac{4\pi}{\frac{\Theta_{ld} \Theta_{2d}}{(180/\pi)^2}} = \frac{4\pi(180/\pi)^2}{\Theta_{ld} \Theta_{2d}} = \frac{41253}{\Theta_{ld} \Theta_{2d}} \quad (1-16)$$

em que Θ_{ld} e Θ_{2d} são as LFMP em cada um dos planos, expressas em graus.

A diretividade descreve essencialmente o modo como a antena radia a energia, no entanto em geral a energia radiada é menor do que a energia que é lhe é fornecida pois a antena tem perdas. O que é de facto mais importante é saber como é que a energia que é fornecida à antena é radiada. Este conceito pode ser mais bem entendido com um exemplo. Suponhamos que se pretende obter a uma certa distância uma dada densidade de potência e que podemos escolher entre duas antenas com a mesma diretividade. Se para atingir esse objetivo as antenas necessitarem de ser alimentadas com potências diferentes, isso significa que elas não têm a mesma eficiência, sendo a mais eficiente a que necessita de ser alimentada com menos potência.

Este exemplo mostra que a diretividade nem sempre é um parâmetro suficiente para caracterizar o desempenho duma antena em termos do modo como radia a energia que recebe. Para melhor caracterizar este desempenho usa-se o ganho.

Define-se ganho duma antena, numa dada direção, como a razão entre a intensidade de radiação que a antena produz nessa direção e aquela que seria produzida por uma antena isotrópica sem perdas, considerando que ambas são alimentadas com a mesma potência.

Designando o ganho segundo a direção (θ, ϕ) por $G(\theta, \phi)$ pode-se então escrever (1-17):

$$G(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_o} \quad (1-17)$$

em que $U(\theta, \phi)$ é a intensidade de radiação que a antena produz na direção (θ, ϕ) e U_o é a intensidade de radiação produzida por uma antena isotrópica radiando a mesma potência.

Por definição de antena isotrópica temos: $U_o = \frac{P_{rad}}{4\pi}$, mas esta antena não tem perdas $P_{rad} = P_{in}$ pelo que $G(\theta, \phi)$ se pode exprimir como em (1-18):

$$G(\theta, \phi) = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{in}} \quad (1-18)$$

Quando se faz referência simplesmente ao ganho G da antena admite-se que se trata do ganho segundo a direção de máximo. Isto é, (1-19):

$$G = 4\pi \frac{U_{max}}{P_{in}} \quad (1-19)$$

Tal como a diretividade o ganho é adimensional e pode ser expresso por um número real positivo. Contudo é mais comum exprimi-lo em unidades logarítmicas, ou seja, em dB recorrendo à relação $G_{dB} = 10 \log(G)$, visto tratar-se duma relação entre potências.

1.4.5 Eficiência

Tal como se representa esquematicamente na Figura 1.14, em geral uma antena é alimentada por uma potência P_{in} e radia uma potência $P_{rad} < P_{in}$.

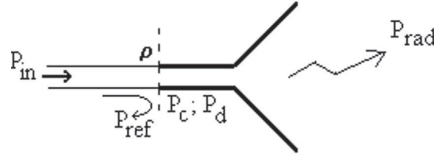


Figura 1.14 Distribuição de potências numa antena.

A eficiência total da antena e_t define-se como (1-20):

$$e_t = \frac{P_{rad}}{P_{in}} \quad (1-20)$$

em que $0 < e_t \leq 1$ e é adimensional.

Substituindo esta relação na equação (1-18) temos (1-21):

$$G(\theta, \phi) = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{\frac{P_{rad}}{e_t}} = e_t 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \quad (1-21)$$

isto é,

$$G(\theta, \phi) = e_t D(\theta, \phi) \quad (1-22)$$

Como P_{rad} é menor que P_{in} , isso significa que temos (1-23):

$$P_{in} = P_{rad} + P_D \quad (1-23)$$

em que P_D representa a potência dissipada e que se pode dividir essencialmente em três componentes:

P_{ref} - Potência devolvida ao gerador por reflexão à entrada da antena (perdas por reflexão);

P_c - Potência dissipada nas partes condutoras da antena (perdas nos condutores);

P_d - Potência dissipada nas partes dielétricas da antena (perdas nos dielétricos).

O balanço de potências pode ser explicado recorrendo à Figura 1.15. Nesta figura as três componentes responsáveis pelas perdas estão representadas por três blocos cada um deles com uma dada eficiência.

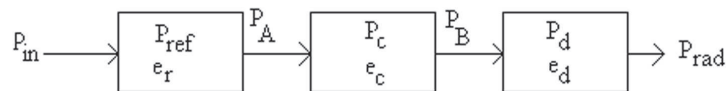


Figura 1.15 Balanço de potências numa antena.

Tendo em conta este esquema, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} P_{rad} &= e_d P_B \\ &= e_d e_c P_A \\ &= e_d e_c e_r P_{in} \end{aligned}$$

pelo que a eficiência total se pode definir como (1-24):

$$e_t = e_r e_d e_c \quad (1-24)$$

Se ρ for o coeficiente de reflexão à entrada da antena, então $P_A = (1 - |\rho|^2) P_n$ e $e_r = \frac{P_A}{P_n}$, e portanto $e_r = (1 - |\rho|^2)$. As eficiências e_d e e_c são geralmente muito altas, isto é, muito próximas de 1 e são obtidas experimentalmente.

Como são normalmente difíceis de separar e são intrínsecas da constituição da antena define-se por vezes uma eficiência conjunta dada por $e_{cd} = e_c e_d$ designada eficiência de radiação da antena.

1.4.6 Polarização

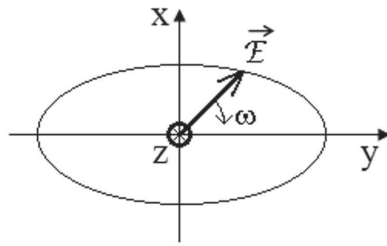
Polarização duma antena numa dada direção é a polarização da onda eletromagnética que ela produz nessa direção quando está a radiar. Por omissão entende-se polarização duma antena como a polarização na direção de máxima diretividade.

Em geral o recetor está a grande distância da antena emissora pelo que a onda eletromagnética que existe nesse ponto se pode considerar como plana. A polarização duma onda plana é descrita pela figura que a extremidade do vetor campo elétrico traça com o tempo nesse plano. Se a variação for harmónica, em geral essa figura é uma elipse traçada durante um período.

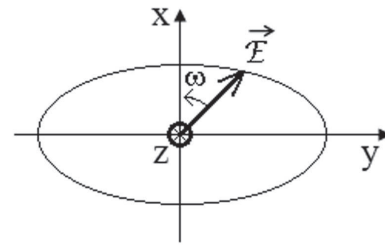
Consideremos que a onda se está a propagar no sentido positivo do eixo dos zz . Assumindo que o observador está a olhar na direção de propagação, isto é, com a onda a entrar-lhe pelas costas, se o vetor descrever a elipse no sentido dos ponteiros dum relógio diz-se que a polarização é elíptica direita, tal como se representa na Figura 1.16(a), se o vetor descrever a elipse no sentido contrário aos dos ponteiros dum relógio diz-se que a polarização é elíptica esquerda, tal como se representa na Figura 1.16(b).

Há dois casos particulares muito importantes. Se o vetor campo elétrico mantiver a sua amplitude constante com o tempo, a elipse degenera numa circunferência, designando-se este tipo de polarização como polarização circular. Tal como no caso da polarização elíptica, assumindo que o observador está a olhar na direção de propagação, isto é, com a onda a entrar-lhe pelas costas, se o vetor descrever a circunferência no sentido dos ponteiros dum relógio diz-se que a polarização é circular direita, tal como se representa na Figura 1.16(c), se o vetor descrever a circunferência no sentido contrário aos dos ponteiros dum relógio diz-se que a polarização é circular esquerda, tal como se representa na Figura 1.16(d).

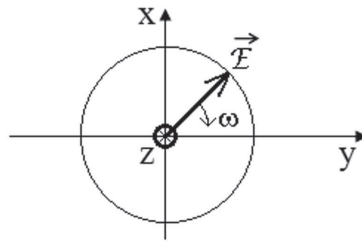
Se o vetor campo elétrico mantiver a sua orientação espacial constante com o tempo, isto é, se estiver sempre orientado ao longo duma mesma reta, a elipse degenera num segmento de reta, a este tipo de polarização chama-se polarização linear. Se esta reta estiver na vertical do lugar a polarização diz-se vertical, tal como se representa na Figura 1.16(e), se estiver na horizontal do lugar a polarização diz-se horizontal, tal como se representa na Figura 1.16(f).



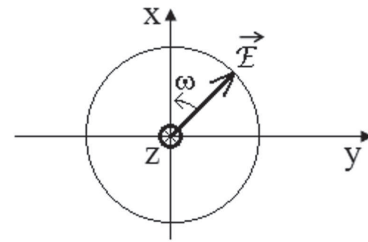
(a) - Polarização elíptica direita



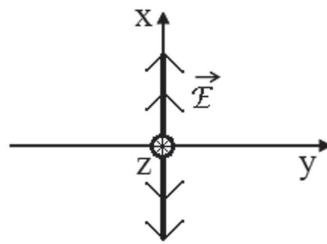
(b) - Polarização elíptica esquerda



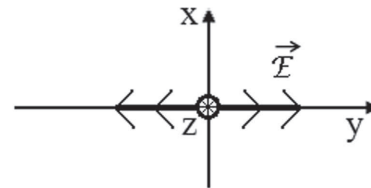
(c) - Polarização circular direita



(d) - Polarização circular esquerda



(e) - Polarização linear vertical



(f) - Polarização linear horizontal

Figura 1.16 Tipos de polarização. A onda está a propagar-se para dentro da folha. Está a entrar pelas costas do leitor.

No caso geral a elipse de polarização tem a forma apresentada na Figura 1.17, em que se assume que o eixo dos yy está orientado segundo a horizontal do lugar.

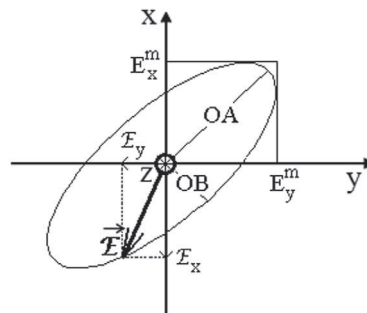


Figura 1.17 Caso geral de polarização.

A razão entre o eixo maior e o eixo menor define-se como a razão axial e é dada por (1-25):

$$AR = \frac{OA}{OB} \quad 1 \leq AR \leq \infty \quad (1-25)$$

A razão axial é muitas vezes expressa em dB, fazendo $AR_{dB} = 20 \log (AR)$.

O campo elétrico instantâneo para a onda a que se refere a Figura 1.17, pode ser escrito como (1-26):

$$\vec{E} = \mathcal{E}_x \hat{x} + \mathcal{E}_y \hat{y} = E_x^m \cos(\omega t) \hat{x} + E_y^m \cos(\omega t + \delta) \hat{y} \quad (1-26)$$

em que δ é a fase de $\mathcal{E}_y$ relativamente a $\mathcal{E}_x$. Se as componentes $\mathcal{E}_x$ e $\mathcal{E}_y$ estão em fase, isto é, se $\delta=0$, o vetor resultante é linearmente polarizado. A sua orientação depende dos valores relativos de E_x^m e E_y^m . Se $E_x^m = 0$ então teremos polarização vertical, se $E_y^m = 0$ teremos polarização horizontal e se $E_x^m = E_y^m$ teremos polarização segundo uma linha que faz 45° com os eixos. Para este tipo de polarização o $AR = \infty$.

Se $\delta > 0$ $\mathcal{E}_y$ está em avanço sobre $\mathcal{E}_x$ a polarização é elíptica esquerda, se $\delta < 0$ $\mathcal{E}_y$ está em atraso sobre $\mathcal{E}_x$ e a polarização é elíptica direita. Se $E_x^m = E_y^m$ e $\delta = \pm 90^\circ$ a polarização é circular. Polarização circular esquerda se $\delta = +90^\circ$ e circular direita se $\delta = -90^\circ$. Para este tipo de polarização o $AR = 1$.

Para uma antena recetora retirar a máxima energia duma onda eletromagnética que lhe está a chegar proveniente duma antena emissora, deve ter uma polarização adaptada à polarização dessa onda. Assim, para se receber uma onda eletromagnética com polarização vertical deve-se usar uma antena com polarização vertical, do mesmo modo para se receber uma onda eletromagnética com polarização circular direita deve-se usar uma antena com polarização circular direita. Fazendo uma analogia mecânica, à antena pode-se associar a fêmea dum parafuso e à onda o parafuso. Para se poder aparafusar as duas peças a rosca tem de ser do mesmo sentido. A antena em receção equivale à penetração do parafuso na fêmea, a antena a emitir corresponde ao desaparafusar, isto é, à saída do parafuso da fêmea.

Quando a polarização da onda incidente não está adaptada à polarização da antena recetora, diz-se que há uma desadaptação de polarização e a energia captada pela antena é menor do que seria se não houvesse esta desadaptação. Suponhamos que a antena recetora tem polarização vertical, isto é, só recebe campos orientados segundo o eixo dos xx e que a onda incidente é linearmente polarizada, mas com um campo E_w orientado numa direção oblíqua, fazendo um ângulo α com o eixo dos xx, tal como se representa na Figura 1.18.

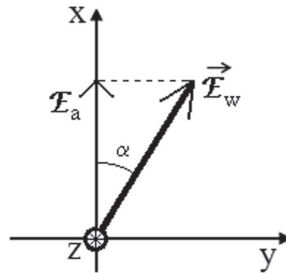


Figura 1.18 Ilustração de desadaptação de polarização.

Por exemplo se $\alpha = 45^\circ$ a potência recebida é apenas metade da potência que se receberia se $\alpha = 0^\circ$. Se $\alpha = 90^\circ$ a potência recebida seria nula.

Como uma onda com polarização circular se pode decompor em dois campos ortogonais entre si da mesma amplitude, mas desfasados entre si de $\pm 90^\circ$, isto significa que, se se usar uma antena com polarização linear para receber uma onda com polarização circular, a potência recebida é apenas metade da potência que se receberia se se usasse uma antena com polarização circular apropriada.

1.4.7 Impedância de entrada

Uma antena em transmissão representa para a linha que a alimenta uma carga com uma dada impedância. Esta impedância é a impedância de entrada da antena. Para uma antena isolada esta impedância Z_A é composta por uma parte real e uma parte imaginária, dada pela equação (1-27):

$$Z_A = R_A + jX_A \quad (1-27)$$

A parte real R_A modela os dispositivos dissipadores de potência que são dois, uma resistência R_r que representa a dissipação por radiação, que é a parte útil, e uma resistência R_p que representa a dissipação nos condutores e nos dielétricos. Isto é, (1-28):

$$R_A = R_r + R_p \quad (1-28)$$

Considerando que I_A é a corrente à entrada da antena pode-se então escrever (1-29)

$$P_{in} = P_{rad} + P_p, \text{ ou seja:}$$

$$\frac{1}{2} R_A |I_A|^2 = \frac{1}{2} R_r |I_A|^2 + \frac{1}{2} R_p |I_A|^2 \quad (1-29)$$

P_{in} é a potência média fornecida à antena, P_{rad} é a potência média radiada, isto é, a potência útil, e P_p é a potência perdida nos condutores e dielétricos. Destas definições pode-se obter uma relação para a R_r , dada por (1-30):

$$R_r = \frac{2P_{rad}}{|I_A|^2} \quad (1-30)$$

Também de acordo com estas definições se pode ver que a eficiência e_{cd} é dada pela razão entre a potência P_{rad} e a potência P_{in} fornecida à antena, ou seja, (1-31):

$$e_{cd} = \frac{P_{rad}}{P_{in}} = \frac{R_r}{R_r + R_p} \quad (1-31)$$

Considerando que a antena é um fio condutor cilíndrico de raio a e comprimento L e que as perdas são apenas nesse condutor, então R_p a altas frequências é dada por (1-32).

$$R_p = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A} \quad (1-32)$$

em que A é a área da coroa circular representada na Figura 1.19, σ é a condutividade do material e δ é a profundidade de penetração por efeito pelicular dada por (1-33):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (1-33)$$

em que ω é a frequência angular e μ é a permeabilidade magnética.

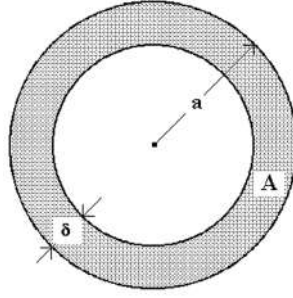


Figura 1.19 Ilustração do efeito pelicular. Área efetiva dum condutor cilíndrico a altas frequências.

Da Figura 1.19 vê-se que a área A da coroa circular é dada por (1-34):

$$A = \pi a^2 - \pi(a - \delta)^2 = \pi(2a\delta - \delta^2) \quad (1-34)$$

Como $\delta \ll a$ então $A \approx \pi 2a\delta$, pelo que (1-35):

$$R_p \approx \frac{L}{2a\sigma\pi\delta} \quad (1-35)$$

Atendendo à definição de δ temos (1-36):

$$R_p \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{L}{2a\pi} \quad (1-36)$$

Normalmente define-se resistência superficial do condutor como (1-37):

$$R_s \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (1-37)$$

A impedância de entrada duma antena é uma característica intrínseca da antena, mas pode variar com os objetos que a rodeiam. Além disso varia com a frequência pelo que a adaptação à linha de alimentação só se verifica dentro duma determinada banda de frequências que define a largura de banda da antena. Devido a estes fatores só para antenas simples é possível obter uma expressão analítica para a impedância de entrada. Em geral a impedância é obtida experimentalmente ou por simulação.

O circuito equivalente em transmissão está representado na Figura 1.20.

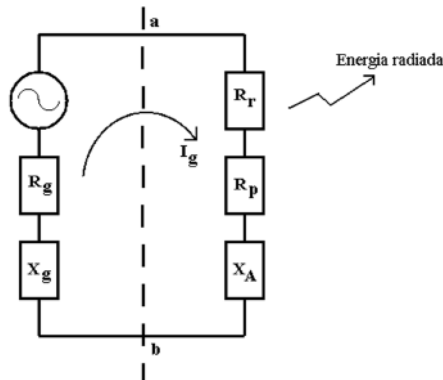


Figura 1.20 Circuito equivalente da antena em transmissão.

A máxima transferência de energia do gerador para a antena ocorre quando $Z_A = Z_g^*$, isto é, quando $R_A = (R_r + R_p) = R_g$ e $X_A = -X_g$.

Como consequência da reciprocidade a impedância da antena em recepção é igual à impedância da antena em transmissão. O circuito equivalente em recepção está representado na Figura 1.21.

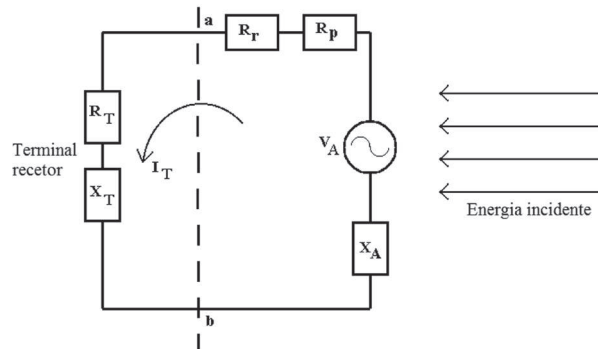


Figura 1.21 Circuito equivalente da antena em recepção.

A energia incidente faz com que a antena se comporte como uma fonte de tensão V_A e com uma impedância interna Z_A . Tal como em transmissão, a máxima transferência de energia da antena para o terminal ocorre quando $Z_A = Z_T^*$, isto é, quando $R_A = (R_r + R_p) = R_T$ e $X_A = -X_T$.

1.4.8 Largura de banda

Uma antena é um dispositivo que tem um conjunto de características que são especificadas quando ela é projetada. As dimensões da antena estão muito relacionadas com o comprimento de onda e, portanto, as características dependem da frequência. Sendo assim é normal associar a uma antena uma banda de frequências dentro da qual se considera que as suas características, embora variando com a frequência, ainda satisfazem as especificações pretendidas. Um dos parâmetros do qual importa avaliar a variação com a frequência é a impedância de entrada da antena e a sua adaptação à linha de alimentação, avaliada através do correspondente VSWR. Como é normal, considera-se que a adaptação satisfaz se o VSWR for menor ou igual a 2 tendo como referência a impedância característica da linha de alimentação. Valores de VSWR menores do que 2 equivalem a valores do coeficiente de reflexão S_{11} menores do que -9.5dB. Como exemplo na Figura 1.22 está ilustrada a largura de banda duma antena.

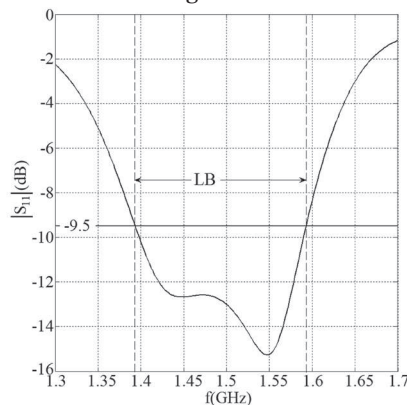


Figura 1.22 Exemplo da largura de banda duma antena em termos de adaptação.

A antena foi projetada para funcionar à frequência de 1.5GHz. Da Figura 1.22 vê-se que a largura de banda vai de 1.39GHz a 1.59GHz, pelo que a largura de banda é de aproximadamente 13%. As antenas ressonantes têm

dimensões que são muito dependentes do comprimento de onda e, portanto, são de banda estreita tipicamente inferior a 10%. Maiores larguras de banda podem ser obtidas recorrendo a geometrias específicas.

O outro conceito de largura de banda aplica-se às antenas com polarização circular e representa a banda de frequências dentro da qual ainda se pode dizer que a polarização radiada é circular. Isso é especificado considerando valores da razão axial inferiores a 3dB.

Na Figura 1.23 está ilustrada a largura de banda duma antena tendo em conta a sua razão axial.

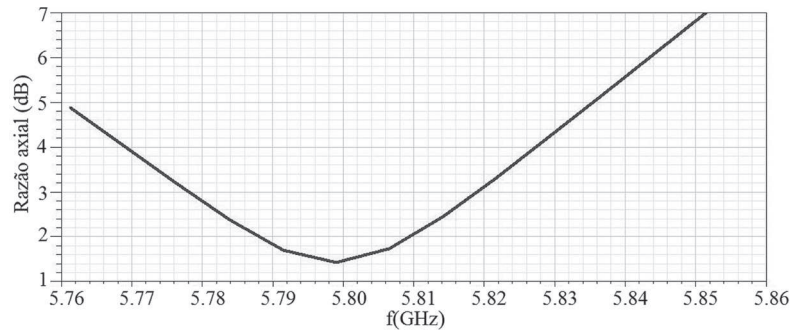


Figura 1.23 Exemplo da largura de banda duma antena em termos de polarização.

A antena deste exemplo foi projetada para funcionar à frequência de 5.8GHz. Como se pode ver da Figura 1.23, na faixa de frequências de 5.778 a 5.819GHz, a razão axial é igual ou inferior a 3dB, o que mostra que a antena radia uma onda com boa polarização circular nesta banda, sendo a melhor razão axial de 1.4dB para a frequência de 5.779GHz. A largura de banda é portanto de apenas cerca de 1%. Trata-se, portanto, duma antena de banda estreita.

Por vezes também se define largura de banda associada à diretividade, como a faixa de frequências dentro da qual a diretividade é superior a um valor mínimo estipulado.

1.4.9 Área efetiva

Uma antena em receção entrega uma potência P_T ao terminal recetor porque consegue extrair energia das ondas eletromagnéticas, para as quais ela está projetada para receber, e que lhe chegam vindas dum determinado emissor. A estas ondas eletromagnéticas incidentes está associada uma densidade de potência local S_i . Considerando que a antena está adaptada à polarização das ondas incidentes, define-se área efetiva da antena A_e como a área que, colocada no mesmo local, captaria a mesma potência P_T . Deste modo pode-se considerar que a antena se comporta como uma dada área coletora A_e que capta a potência P_T . Este conceito está ilustrado na Figura 1.24.

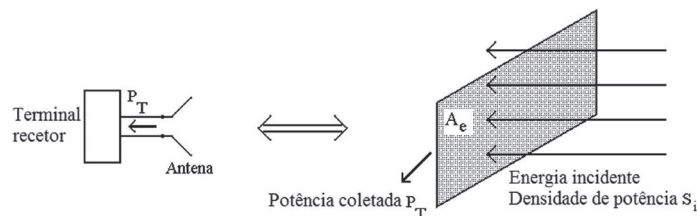


Figura 1.24 Conceito de área efetiva duma antena.

Considerando que localmente S_i é uniforme, teremos (1-38):

$$A_e = \frac{P_T}{S_i} = \frac{\frac{1}{2} R_T |I_T|^2}{S_i} \quad (\text{m}^2) \quad (1-38)$$

Se tivermos duas antenas situadas no mesmo local, isto é, recebendo ambas a mesma densidade de potência já se viu anteriormente que a que tiver maior ganho captará mais potência. Mas de acordo com a definição de área efetiva a que capta mais potência também é a que tem a maior área efetiva, isto significa que para qualquer antenna deverá haver uma relação direta entre o ganho e a área efetiva. Para provar esta afirmação consideremos o sistema de comunicações representado na Figura 1.25. Consideramos que as antenas estão adaptadas em termos de polarização e alinhadas segundo a direção de máximo ganho.

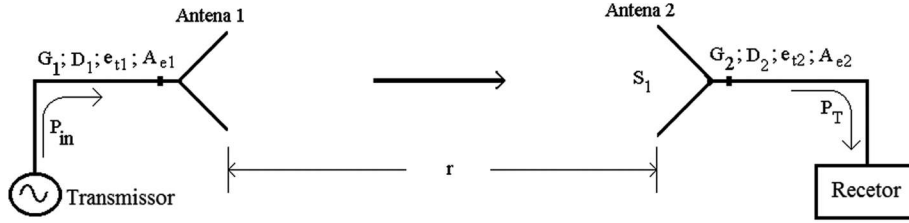


Figura 1.25 Sistema de comunicações formado por duas antenas separadas duma distância r . A antena 1 está a transmitir e a antena 2 está a receber.

Se a antena 1 fosse isotrópica, a densidade de potência que ela produziria à distância r seria $S_{iso} = \frac{P_{rad1}}{4\pi r^2}$ mas como na direção de máximo a antena tem uma diretividade D_1 , a densidade passa a ser (1-39):

$$S_1 = \frac{P_{rad1}}{4\pi r^2} D_1 \quad (1-39)$$

A potência P_T entregue ao recetor pela antena 2 é então dada por (1-40):

$$P_T = A_{e2} S_1 = A_{e2} \frac{P_{rad1}}{4\pi r^2} D_1 \quad (1-40)$$

Atendendo à definição de eficiência podemos escrever $P_{rad1} = e_{t1} P_{in}$ e $G_1 = e_{t1} D_1$ pelo que temos (1-41):

$$P_T = A_{e2} \frac{e_{t1} P_{in}}{4\pi r^2} D_1 = A_{e2} \frac{P_{in}}{4\pi r^2} G_1 \quad (1-41)$$

Se trocarmos o sentido da comunicação, tal como se indica na Figura 1.26, devido ao princípio da reciprocidade, a potência recebida pela antena 1 será também P_T .

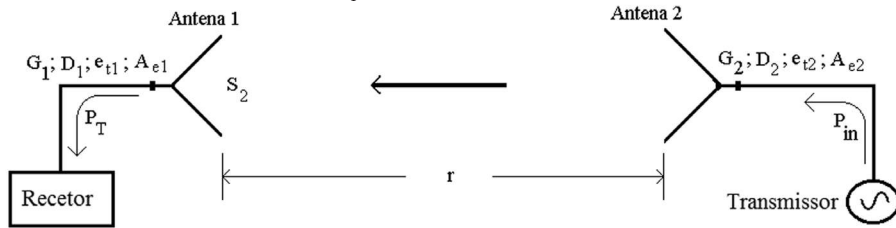


Figura 1.26 Sistema de comunicações formado por duas antenas separadas duma distância r . A antena 1 está a receber e a antena 2 está a transmitir.

Repetindo para esta situação a dedução anterior obtém-se (1-42):

$$P_T = A_{e1} \frac{e_{t2} P_{in}}{4\pi r^2} D_2 = A_{e1} \frac{P_{in}}{4\pi r^2} G_2 \quad (1-42)$$

Igualando as expressões (1-41) e (1-42) teremos (1-43):

$$A_{e2} \frac{P_{in}}{4\pi r^2} G_1 = A_{e1} \frac{P_{in}}{4\pi r^2} G_2 \quad (1-43)$$

Da equação anterior obtém-se (1-44):

$$\frac{A_{e2}}{G_2} = \frac{A_{e1}}{G_1} = \text{Constante} \quad (1-44)$$

Esta razão é válida para qualquer antena e pode-se mostrar que a constante tem o valor $\frac{\lambda^2}{4\pi}$ pelo que a relação entre o ganho e a área efetiva se pode escrever como (1-45):

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad (1-45)$$

1.5 Fórmula de Friis

A Figura 1.25 representa um sistema básico de comunicações por ondas eletromagnéticas propagando-se em meio livre. Conhecendo os parâmetros do sistema, nomeadamente: a potência P_{in} fornecida pelo gerador, os ganhos das antenas, a distância r entre as antenas e as características do meio de propagação, pode-se determinar a potência P_T recebida pelo terminal recetor. Desde que as antenas estejam no campo distante uma da outra e sem obstáculos entre elas, esse cálculo pode ser feito pela fórmula de Friis que de seguida se deduz.

Entende-se por campo distante duma antena a distância a partir da qual são constantes os parâmetros fundamentais atrás definidos tais como o diagrama de radiação, a diretividade e consequentemente o ganho. Veremos em capítulos posteriores que esta distância que designaremos por R_{FF} é dada por (1-46):

$$R_{FF} \geq \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1-46)$$

em que D é a maior dimensão física da antena e λ é o comprimento de onda a que a antena está a funcionar.

Para a dedução da fórmula de Friis vamos assumir que $r > R_{FF}$.

Pela equação (1-41) temos que a potência P_T entregue ao terminal recetor é dada por (1-48):

$$P_T = A_{e2} \frac{P_{in}}{4\pi r^2} G_1 \quad (1-47)$$

Substituindo (1-45) nesta equação tem-se (1-48):

$$P_T = A_{e2} \frac{P_{in}}{4\pi r^2} G_1 = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_2 \frac{P_{in}}{4\pi r^2} G_1 \quad (1-48)$$

Esta equação é conhecida pela fórmula de Friis e escreve-se normalmente como (1-49):

$$P_r = P_{in} \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_t G_r \quad (1-49)$$

O termo $\left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2$ é designado por fator de perdas em espaço livre, P_{EL} . Por vezes a fórmula de Friis é escrita em dB na forma (1-50):

$$10 \log \left(\frac{P_r}{P_{in}} \right) = 20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right) + 10 \log(G_t) + 10 \log(G_r) \quad (1-50)$$

Ou mais simplesmente como em (1-51):

$$\left(\frac{P_r}{P_{in}} \right)_{(dB)} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)_{(dB)} + (G_t)_{(dB)} + (G_r)_{(dB)} \quad (1-51)$$

Também é comum aparecer na forma expressa em (1-52) em que P_r designa a potência recebida, P_e designa a potência emitida, G_t o ganho da antena transmissora, G_r o ganho da antena recetora e P_{EL} o fator de perdas em espaço livre, todos expressos em dB.

$$P_r = P_e + G_t + G_r + P_{EL} \text{ (dB)} \quad (1-52)$$

1.6 Equação básica de RADAR

Para além dos sistemas de comunicações as antenas são também usadas em sistemas de deteção remota como o RADAR. A sigla RADAR é abreviação do sistema de deteção que em língua inglesa se designa por ***R**adio **D**etection **A**nd **R**anging*. A capacidade de detetar um alvo a grande distância e de localizar a sua posição são as duas maiores características do RADAR.

Na Figura 1.27 está representado um sistema simplificado de RADAR em que a mesma antena é usada para transmitir e receber. A ideia básica do sistema consiste em utilizar um gerador que fornece uma potência P_t à antena de ganho elevado, que por sua vez transmite parte dela sob a forma duma onda eletromagnética em direção ao alvo. Parte da potência que o atinge é refletida em direção ao emissor e a antena, funcionando agora como recetora, entrega ao recetor uma potência P_A correspondente ao eco refletido pelo alvo. Pelo tempo que demora a chegar o eco obtém-se a distância que, conjugada com a orientação da antena, permite localizar onde está o alvo.

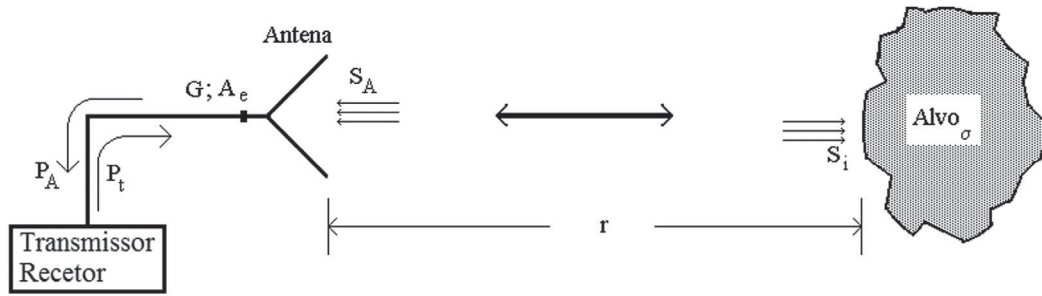


Figura 1.27 Sistema básico de RADAR.

A cada alvo associa-se um parâmetro designado por área efetiva de Radar que em língua inglesa é conhecido como *Radar Cross Section*. Esse parâmetro representa-se pela letra σ e define-se como a área que colocada no sítio do alvo, interceptaria uma potência tal, que radiada isotropicamente iria fazer com que a antena recetora entregasse ao recetor a mesma potência P_A .

De acordo com a definição de área efetiva de Radar, a potência captada por esta área σ é $P = S_i \sigma$ que, radiada isotropicamente, produz à distância r a densidade de potência $S_A = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{\sigma}{4\pi r^2} S_i$. Mas $S_i = \frac{P_t}{4\pi r^2} G$, que substituída na equação anterior dá (1-53):

$$S_A = \frac{P_t}{(4\pi r^2)^2} \sigma G \quad (1-53)$$

A potência P_A recebida e correspondente ao eco do alvo é, portanto, dada por (1-54):

$$P_A = A_e S_A = \frac{P_t}{(4\pi r^2)^2} \sigma G \frac{\lambda^2}{4\pi} G = P_t \sigma G^2 \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\lambda}{4\pi r^2} \right)^2 \quad (1-54)$$

Esta equação dá a potência recebida proveniente do eco do alvo. No entanto, o mais importante é saber a máxima distância a que se pode detetar um alvo com uma área efetiva σ , usando um sistema de Radar caracterizado por um emissor com uma potência P_t , funcionando no comprimento de onda λ , uma antena com ganho G e um recetor capaz de detetar uma potência mínima P_{Amin} . Essa distância obtém-se resolvendo a equação anterior em ordem a r . Fazendo isso obtém-se (1-55):

$$r_{max} = \sqrt[4]{\frac{\sigma G^2 \lambda^2 P_t}{(4\pi)^3 P_{Amin}}} \quad (1-55)$$

As equações (1-54) e (1-55) são as equações básicas de Radar e dão apenas uma estimativa pois não estão incluídas as diversas perdas do sistema e também porque o mínimo sinal detetável é de natureza estatística e fortemente condicionado pelo ruído. Para explorar melhor este tema há muita literatura especializada destacando-se aqui o livro “*Radar Handbook*” de Merrill Skolnik [3].

1.7 Temperatura de ruído duma antena

Uma resistência, desde que esteja a uma temperatura T acima do zero absoluto (0° K), apresenta aos seus terminais uma potência de ruído dada pela relação (1-56).

$$P_N = kT\Delta f \quad (1-56)$$

em que:

k é a constante de Boltzmann = $1.38 \times 10^{-23} \text{ (JK}^{-1}\text{)}$

T é a temperatura da resistência (K)

Δf é a largura de banda considerada (Hz)

Em geral uma antena está rodeada por um ambiente complexo composto de vários objetos nomeadamente os naturais como a terra, o céu e as nuvens. Como qualquer objeto que esteja a uma temperatura superior ao zero absoluto (0° K) emite energia sob a forma de ondas eletromagnéticas, a antena coleta essa energia que aparece nos seus terminais como uma potência de ruído P_{NA} . A antena pode ser, portanto, modelada como uma resistência a uma temperatura T_A que é a temperatura a que deveria estar essa resistência para produzir nos seus terminais a potência P_{NA} . À temperatura T_A chama-se temperatura de ruído da antena.

É importante conhecer a temperatura de ruído da antena porque ele é parte integrante dum sistema de receção, tal como o recetor propriamente dito e o guia de onda que interliga esses dois componentes. A temperatura de ruído do sistema é um fator muito importante para a determinação da sensibilidade e da relação sinal-ruído do sistema de receção. Duma forma simplificada se T_r representar a temperatura de ruído do recetor, incluindo o guia de onda, então a temperatura do sistema será $T_s = T_r + T_A$ e a potência de ruído do sistema será $P_{Ns} = kT_s\Delta f$.

Se P_s for a potência do sinal recebida pelo sistema a relação sinal ruído é dada por $\frac{S}{N} = \frac{P_s}{P_{Ns}}$. Para um estudo mais aprofundado deste assunto recomenda-se a consulta da referência [2].

A determinação da temperatura T_A pode ser feita a partir da análise do cenário que rodeia a antena. Um corpo desse cenário, situado na direção (θ, ϕ) , relativamente à antena e que esteja à temperatura $T(\theta, \phi)$, produz uma densidade de potência, dentro duma banda de frequências Δf e por unidade de ângulo sólido, designada por brilho e representada pela função $B(\theta, \phi)$, que pela aproximação de Rayleigh-Jeans se pode escrever como (1-57):

$$B(\theta, \phi) = \frac{2k}{\lambda^2} T(\theta, \phi) \Delta f \quad (1-57)$$

Como esta radiação não tem uma polarização definida, a densidade média de potência disponível, por unidade de ângulo sólido, junto à antena é dada por (1-58):

$$S(\theta, \phi) = \frac{1}{2} B(\theta, \phi) \quad (1-58)$$

A antena nessa direção tem uma área efetiva $A_e(\theta, \phi)$ e capta portanto por cada ângulo sólido elementar $d\Omega$ uma potência que é (1-59):

$$dP_{NA} = A_e(\theta, \phi) S(\theta, \phi) d\Omega \quad (1-59)$$

A potência total de ruído captada pela antena em consequência da contribuição de todo o meio que a rodeia é então dada por (1-60):

$$P_{NA} = \oint A_e(\theta, \phi) S(\theta, \phi) d\Omega \quad (1-60)$$

Substituindo nesta equação as equações (1-45), (1-57) e (1-58), obtém-se (1-61):

$$P_{NA} = \frac{1}{4\pi} \oint\oint k \Delta f G(\theta, \phi) T(\theta, \phi) d\Omega \quad (1-61)$$

Recorrendo à equação (1-56) obtém-se (1-62):

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \oint\oint G(\theta, \phi) T(\theta, \phi) d\Omega \quad (1-62)$$

Atendendo às relações $G(\theta, \phi) = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{in}}$ e $P_{in} = \oint\oint U d\Omega$ facilmente se conclui que $\oint\oint G(\theta, \phi) d\Omega = 4\pi$.

Substituindo esta última relação em (1-62), obtém-se a relação que habitualmente aparece na literatura para definir a temperatura equivalente de ruído duma antena como (1-63):

$$T_A = \frac{\oint\oint G(\theta, \phi) T(\theta, \phi) d\Omega}{\oint\oint G(\theta, \phi) d\Omega} \quad (1-63)$$

Aparece também por vezes na literatura a definição (1-64):

$$T_A = \frac{1}{\Omega_A} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T(\theta, \phi) U_n(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad (1-64)$$

em que Ω_A é o ângulo sólido de feixe da antena e $U_n(\theta, \phi)$ é a intensidade de radiação normalizada. As relações (1-63) e (1-64) são obviamente equivalentes e podem ser facilmente deduzidas uma da outra.

Se a distribuição da temperatura de ruído do meio que envolve a antena, $T(\theta, \phi)$, for conhecida, a temperatura de ruído da antena é facilmente obtida de qualquer uma destas relações. Embora normalmente isso não seja conhecido com detalhe, as contribuições mais importantes são provenientes do ruído do céu e do ruído da terra. Tipicamente a terra tem uma temperatura equivalente de ruído de cerca de 300°K e o céu uma temperatura equivalente de ruído de cerca de 5°K quando observado segundo o zénite, ou de cerca de 120°K quando observado segundo o horizonte. O ruído do céu é muito dependente da frequência e é composto por ruído atmosférico, cósmico e o resultante de equipamentos produzidos pelo homem. Para mais informações sobre estes tópicos ver [4],[5].

Referências

- [1] BALANIS, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, Publishers, 1989.
- [2] KRAUS, J. D., *Antenas*. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [3] SKOLNIK, M. I., *Radar Handbook*. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [4] FLOCK, W. L.; SMITH, E. K., "Natural Radio Noise-A Mini-review", *IEEE Trans. Ant. & Prop.*, Vol. AP-32, Julho 1984, pp. 762-767.
- [5] BOKULIC, R. S., "Use Basic Concepts to Determine Antenna Noise Temperature", *Microwaves & RF*, Vol. 30, Março 1991, pp. 107-115.

Exercícios

1-

a) Defina: Diretividade, Ganho e Área efetiva.

b) Uma antena a funcionar à frequência de 300MHz, produz a grande distância um campo elétrico dado por:

$$E = 90I \frac{e^{-j\beta r}}{r} \text{ (V/m)}$$

Sabendo que a resistência de entrada da antena é 50Ω , determine o ganho e a área efetiva.

2- Um sistema de emissão/receção funciona à frequência f_1 , usando duas antenas parabólicas. Suponhamos que o sistema é modificado para funcionar à frequência dupla da anterior, fornecendo a mesma potência à antena transmissora. Admitindo que as antenas mantêm a mesma eficiência de abertura, qual é a principal vantagem desta modificação?

3- Considere uma antena com um diagrama de radiação definido pela intensidade de radiação $U(\theta, \phi)$. Define-se ângulo sólido de feixe Ω_A , como sendo o ângulo sólido que se deveria considerar, para que toda a potência radiada pela antena estivesse nele contida se, dentro desse ângulo, a intensidade de radiação fosse constante e igual a $U_{\max}$.

a) Obtenha uma expressão para Ω_A em função de $U(\theta, \phi)$ e de $U_{\max}$.

b) Para antenas muito diretivas, isto é, com um único lobo principal bem definido e razoavelmente estreito, pode-se mostrar que: $\Omega_A \approx (LFMP)_E (LFMP)_H$ em que $(LFMP)_E$ e $(LFMP)_H$ são as larguras de feixe a meia potência, nos planos principais E e H, expressas em radianos.

Mostre que a diretividade D pode ser expressa por: $D \approx \frac{41253}{(LFMP)_E (LFMP)_H}$ em que $(LFMP)_E$ e $(LFMP)_H$ são as larguras de feixe a meia potência, nos planos principais E e H, expressas em graus.

4- Um sistema de medida de antenas tem uma distância máxima entre a antena transmissora e a antena a medir de 12m. Se este sistema operar entre 1 e 12GHz, qual é a dimensão da maior antena que lá se pode medir, de modo a satisfazer a condição de campo distante?

5- Uma antena filiforme, alimentada à entrada com uma corrente I, produz a grande distância um campo elétrico dado pela expressão:

$$E(r, \theta, \phi) = \frac{30I}{r} \sin \theta \text{ (V/m)}$$

a) Determine a diretividade desta antena.

b) Sabendo que a impedância de entrada da antena é $Z_{in} = 30 - j100\Omega$, determine o ganho desta antena.

c) Determine a eficiência desta antena.

6- Um satélite de órbita baixa (LEO) funciona à frequência de 1.62GHz, usando uma antena com um ganho de 29dBi que dirige a energia para os utilizadores terrestres que estão no máximo a 1500km de distância. Determine a potência que o satélite deve fornecer à sua antena para que um utilizador, à máxima distância, consiga receber -100dBm usando uma antena com um ganho de 1dBi, assumindo que não há perdas de polarização.

7-

a) Deduza a fórmula de Friis.

b) Pretende-se instalar na Terra uma antena para receber sinais transmitidos da Lua à frequência de 2 GHz. Na Lua está uma antena com um ganho de 20 dB, alimentada por uma potência de 2 W.

O recetor na Terra pode receber potências da ordem de -100dBm. A antena será um paraboloide com uma eficiência de abertura de 60%. Determine o seu diâmetro.

Considere que a distância entre a Terra e a Lua é de 1,27 segundos-luz.

8- Entre um satélite geoestacionário e a Terra está estabelecida uma ligação radioelétrica. A distância entre o satélite e a Terra é de 42000km. À frequência de 12GHz a potência que o satélite fornece à sua antena é de 50W. Esta antena tem um ganho de 30dBi e a antena usada em Terra tem um ganho de 40dBi.

Determine a potência recebida pelo terminal terrestre, expressa em dBm, assumindo que não há perdas de polarização.

9- Um Radar tem as seguintes características:

- Ganho da antena: 30dBi;
- Potência do emissor: 1kW;
- Potência mínima que o recetor pode detetar: 1nW;
- Frequência de funcionamento: 10GHz.

a) Qual a distância máxima a que pode ser detetada uma esfera de 10cm de diâmetro, admitindo que a sua área efetiva é a sua área transversal?

b) Supondo que a frequência se mantém, como devem ser modificadas as características do Radar para se aumentar a distância obtida na alínea a)?

10- Uma rádio local a transmitir na frequência de 106MHz utiliza como antena, para cobrir uma área com 50km de raio, um dipolo com 130cm de comprimento feito de tubo de alumínio ($\sigma=3.5 \times 10^7$ S/m) com 3cm de diâmetro. A impedância de entrada deste dipolo, a esta frequência, é $Z_{in}=73.5+j1.5\Omega$, o que corresponde a um VSWR=1.45 referido a 50Ω . O amplificador de RF está ligado à antena através dum cabo coaxial com 40m de comprimento, com uma impedância característica de 50Ω e uma atenuação de 0.075dB/m.

Considerando que os recetores típicos usam antenas com 1dBi de ganho e têm uma sensibilidade que lhes permite captar no limite, uma potência de -50dBm, calcule qual a potência que o amplificador deve fornecer ao cabo que alimenta a antena.

11- Uma antena numa estação base para rádio-móvel tem um ganho de 15dBi e transmite 10W à frequência de 950MHz.

Um telemóvel tem uma antena com um ganho de 1dBi e uma sensibilidade que lhe permite receber sinais até -80dBm.

Calcule até que distância se pode estabelecer a comunicação.

12- O campo radiado a grande distância por uma antena é dado pela expressão:

$$\mathbf{E}_\theta(r, \theta, \phi) = \begin{cases} K \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (\text{V/m}) & 0 < \theta < \pi; 0 < \phi < \pi \\ 0 & \text{para qualquer outra direção} \end{cases}$$

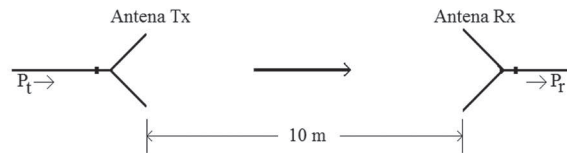
a) Deduza a expressão da densidade de potência à distância r.

b) Deduza a expressão da intensidade de radiação.

c) Determine o ângulo sólido de feixe.

d) Determine a diretividade na direção de máxima radiação.

13- Um processo de medir o ganho de antenas, designado pelo método das três antenas, consiste em medir as três antenas duas a duas. O esquema de princípio usado neste método está ilustrado na figura. Assume-se que a potência transmitida é sempre a mesma.



Usando este processo, mediram-se três antenas A, B e C à frequência de 1GHz tendo-se obtido os seguintes resultados:

Antena Tx	Antena Rx	P_r/P_t (dB)
B	A	-37.44
C	B	-44.43
A	C	-39.43

Com base nestes resultados determine o ganho das três antenas.

Capítulo 2

Antenas Filiformes

2.1 Fundamentos de eletromagnetismo

2.1.1 Breve revisão das equações de Maxwell

Nesta secção faz-se uma breve revisão das quatro equações de Maxwell. Os detalhes da sua dedução e fundamentação podem ser lembrados em livros clássicos de eletromagnetismo. Estas quatro equações são baseadas em três leis fundamentais: a lei de Coulomb, a lei de Ampère (ou lei de Biot-Savart) e a lei de Faraday e ainda no princípio da conservação da carga elétrica. As grandezas físicas que aparecem nestas equações são a intensidade de campo elétrico $\vec{E}$, a intensidade de campo magnético $\vec{H}$, a densidade de fluxo elétrico $\vec{D}$, a densidade de fluxo magnético $\vec{B}$, a densidade de corrente elétrica $\vec{J}$ e a densidade de carga elétrica ρ_e .

- Com base na lei de Faraday pode-se escrever:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{S_c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2-1)$$

- Com base na lei de Ampère pode-se escrever:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2-2)$$

- Com base na lei de Coulomb pode-se escrever:

$$\oiint_{S_V} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho dv \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (2-3)$$

• Pelo facto de não haver cargas magnéticas e, portanto, as linhas de força do campo magnético se fecharem sobre elas próprias, pode-se escrever:

$$\oiint_{S_V} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2-4)$$

Esta equação também pode ser facilmente deduzida da equação (2-1) pela aplicação da identidade $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$, válida para qualquer vetor $\vec{V}$.

Pela aplicação da identidade $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) \equiv 0$, à equação (2-2) em conjugação com a equação (2-3), obtém-se a equação de continuidade dada por:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (2-5)$$

A densidade de corrente $\vec{J}$ que aparece nas equações anteriores é a densidade de corrente total e é em geral dada por $\vec{J}_T = \vec{J}_s + \vec{J}_c$ em que $\vec{J}_s$ é a densidade de corrente da fonte e $\vec{J}_c = \sigma_e \vec{E}$ é a corrente de condução, num meio com condutividade σ_e , onde exista um campo elétrico $\vec{E}$.

Para além destas quatro equações há mais duas que relacionam as grandezas $\vec{D}$ com $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com $\vec{H}$ de acordo com as características físicas do meio. Se estas características não dependem da intensidade do campo aplicado, o meio diz-se *linear*. Se não dependem da posição, o meio diz-se *homogéneo*. Se não dependem da orientação do campo aplicado, o meio diz-se *isotrópico*. Se não variam com a frequência, o meio diz-se *não-dispersivo*.

As características do meio relevantes para esta situação são a permissividade ϵ , a permeabilidade magnética μ e a condutividade elétrica σ_e que varia muito pouco com a frequência.

A permissividade traduz a capacidade da estrutura molecular do meio se polarizar mediante a aplicação do campo $\vec{E}$. Em geral há um desfasamento entre as grandezas $\vec{D}$ e $\vec{E}$ que se representa por uma permissividade complexa $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$. Para além disto, num meio com perdas, isto é, com $\sigma_e \neq 0$, tem-se de ter isso em conta pelo que nestes meios a permissividade complexa ϵ_c é definida por:

$$\epsilon_c = \epsilon' - j \left(\epsilon'' + \frac{\sigma_e}{\omega} \right)$$

em que ω é a frequência angular $\omega = 2\pi f$. Estes meios são normalmente caracterizados pelo parâmetro *tangente de perdas* $\tan(\delta_e)$, definido como:

$$\tan(\delta_e) = \frac{\epsilon'' + \frac{\sigma_e}{\omega}}{\epsilon'}$$

Dum modo semelhante também a permeabilidade magnética é complexa e da forma $\mu_c = \mu' - j\mu''$, contudo a parte imaginária só é significativa em materiais ferromagnéticos pelo que em geral a permeabilidade magnética é simplesmente designada por μ .

Num meio linear, homogéneo e isotrópico ϵ , μ e σ são grandezas escalares. Se além disso o meio se puder considerar não-dispersivo são simples constantes reais. Para este caso particular as relações entre as grandezas $\vec{D}$ e $\vec{E}$ e as grandezas $\vec{B}$ e $\vec{H}$ são as seguintes:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2-6)$$

e,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2-7)$$

No caso em que todas as grandezas variam sinusoidalmente com o tempo a uma dada frequência angular $\omega = 2\pi f$, elas podem ser representadas pelos respetivos fasores. Como exemplo, a norma do vetor campo elétrico que é $\mathcal{E}(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, z) \cos(\omega t + \phi)$ pode ser representada pelo fador $\mathbf{E} = E e^{j\phi} [e^{j\omega t}]$. Convém recordar que na notação de fador se omite o fator $[e^{j\omega t}]$, isto é, o fador $\mathbf{E}$ escreve-se simplesmente como $E e^{j\phi}$ ou ainda numa forma mais compacta como $E \angle \phi$. Entre a representação $\mathcal{E}$ e o seu correspondente fador $\mathbf{E}$ existe a relação $\mathcal{E}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(x, y, z) e^{j\omega t}\}$.

Em regime harmónico sinusoidal, a cada vetor com esta variação temporal pode-se associar um vetor cujas componentes são fasores. Por exemplo ao vetor $\vec{E}$ associa-se o vetor $\mathbf{E}$. Pela definição de fador, facilmente se vê que

a derivada em ordem ao tempo de $\vec{E}$ é igual a $j\omega \vec{E}$. Daqui decorre que para variações harmónicas sinusoidais, as equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (2-8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_T + j\omega \vec{D} \quad (2-9)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (2-10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2-11)$$

Para além destas equações há ainda que considerar, para um meio linear, homogéneo e isotrópico, as seguintes:

$$\vec{J}_T = \sigma_e \vec{E} + \vec{J}_s \quad (2-12)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_T = -j\omega \rho_e \quad (2-13)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2-14)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2-15)$$

2.1.2 Conceito de dualidade

Quando duas equações, envolvendo duas grandezas, têm a mesma forma matemática, as grandezas que ocupam posições correspondentes nas duas equações são designadas grandezas *duais*. Se as duas equações têm a mesma forma matemática então as suas soluções serão também formalmente idênticas. Isto significa que se pode obter a solução duma delas a partir da solução da outra por permuta das grandezas duais. Este conceito é conhecido pelo teorema da dualidade.

Embora tanto quanto se sabe não existam cargas e correntes magnéticas, a sua inclusão nas equações de Maxwell dão-lhe uma generalidade que pode ser útil para a aplicação do teorema da dualidade. A dualidade entre grandezas elétricas e magnéticas pode permitir, por exemplo, obter as expressões relacionadas com o campo magnético, por simples inspeção das expressões obtidas anteriormente para o campo elétrico, poupando tempo na resolução do problema em causa.

Incluindo então a densidade de carga magnética ρ_m e a densidade de corrente magnética $\vec{M}$, as equações de Maxwell passam a ser em regime harmónico e para um meio linear, homogéneo e isotrópico, as seguintes:

$$\nabla \times \vec{E} = -\vec{M} - j\omega \vec{B} \quad (2-16)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_T + j\omega \vec{D} \quad (2-17)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (2-18)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = \rho_m \quad (2-19)$$

Para além destas equações há ainda que considerar, para um meio linear, homogéneo e isotrópico, as seguintes:

$$\vec{\mathbf{J}}_T = \sigma_e \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{J}}_s \quad (2-20)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_T = \sigma_m \vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}_s \quad (2-21)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}_T = -j\omega\rho_e \quad (2-22)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{M}}_T = -j\omega\rho_m \quad (2-23)$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} \quad (2-24)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} \quad (2-25)$$

É de notar que a escolha do sinal negativo para $\vec{\mathbf{M}}$ foi arbitrado de modo a manter a dualidade entre as equações (2-16) e (2-17).

A partir das equações anteriores obtém-se as correspondências contidas na Tabela 2-1 e que permitem que um problema dual possa ser resolvido diretamente a partir do correspondente problema original fazendo as substituições respetivas.

Problema original	→	Problema dual
E	→	H
H	→	-E
J	→	M
M	→	-J
D	→	B
B	→	-D
ρ_e	→	ρ_m
ρ_m	→	$-\rho_e$
ϵ	→	μ
μ	→	ϵ
η	→	$1/\eta$

Tabela 2-1 Grandezas duais

2.1.3 Aplicação das equações de Maxwell a problemas de radiação

Nesta secção deduzem-se as expressões dos campos radiados por distribuições de corrente elétrica, a partir das equações de Maxwell. Estas expressões serão depois utilizadas na determinação da radiação de antenas mais genéricas.

Num problema de radiação a questão que se quer resolver é a determinação dos campos radiados por fontes que são devidamente especificadas. Considerando que a fonte está situada num meio dielétrico ($\sigma=0$), linear, homogêneo e isotrópico, e que é especificada através da densidade de corrente elétrica $\vec{J}_s$ (que doravante designaremos simplesmente por $\vec{J}$), seria em princípio possível determinar os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ em qualquer ponto em redor dessa fonte, recorrendo diretamente às equações de Maxwell. No entanto, é mais simples calcular estes campos através de duas funções auxiliares, o escalar potencial elétrico Φ e o vetor potencial magnético $\vec{A}$. Numa primeira fase determinam-se estas funções a partir da densidade de corrente $\vec{J}$ e numa segunda fase determinam-se os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ a partir das funções Φ e $\vec{A}$.

O vetor potencial magnético $\vec{A}$ é introduzido tendo em conta que a divergência de $\vec{H}$ é nula, $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, como se pode ver pelas equações (2-11) e (2-15). Atendendo à identidade $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$, define-se o vetor $\vec{A}$ pela relação:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (2-26)$$

Esta relação especifica o rotacional do vetor $\vec{A}$. Para definir completamente este vetor falta ainda especificar a sua divergência, que será feito mais à frente nesta dedução.

O escalar potencial elétrico Φ , é introduzido pela substituição da equação (2-26) na equação (2-8), obtendo-se:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega(\nabla \times \vec{A}) \Rightarrow \nabla \times (\vec{E} + j\omega\vec{A}) = 0 \quad (2-27)$$

Como o rotacional do vetor $\vec{E} + j\omega\vec{A}$ é igual a zero, ele é conservativo e pode, portanto, ser expresso pelo gradiente dum escalar, atendendo à identidade $\nabla \times \nabla\Phi = 0$. O escalar potencial elétrico Φ é então definido como:

$$\vec{E} + j\omega\vec{A} = -\nabla\Phi \quad (2-28)$$

Desta equação vê-se que o campo elétrico $\vec{E}$ pode ser obtido a partir de $\vec{A}$ e Φ pela seguinte relação:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi \quad (2-29)$$

Substituindo (2-26) em (2-9), e atendendo que neste caso $\vec{J}_T$ é simplesmente dada pela fonte que designamos apenas por $\vec{J}$, obtém-se:

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \left[\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right] = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \quad (2-30)$$

Esta relação pode ser escrita na forma:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu\vec{J} + j\omega\mu\epsilon\vec{E} \quad (2-31)$$

Atendendo à identidade $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, e à equação (2-29) obtém-se a partir de (2-31) a relação:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = j\omega\mu\epsilon(-j\omega\vec{A} - \nabla\Phi) + \mu\vec{J} \quad (2-32)$$

Que se pode ainda escrever como:

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2\mu\epsilon\vec{A} - \nabla(j\omega\mu\epsilon\Phi + \nabla \cdot \vec{A}) = -\mu\vec{J} \quad (2-33)$$

Como se disse anteriormente, para se definir completamente o vetor $\vec{A}$ é necessário ainda especificar a sua divergência. Uma escolha conveniente é usar a condição de Lorenz [1] dada por:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\epsilon\Phi \quad (2-34)$$

Impondo esta condição à equação (2-33), resulta:

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2\mu\epsilon\vec{A} = -\mu\vec{J} \quad (2-35)$$

Esta é a equação de onda também conhecida por equação de Helmholtz. A solução desta equação dá o vetor $\vec{A}$ a partir da densidade de corrente $\vec{J}$, imposta pela fonte. Conhecido $\vec{A}$, pode-se obter o campo magnético $\vec{H}$ a partir da equação (2-26) e o campo elétrico $\vec{E}$ a partir da equação (2-29), combinada com (2-34), donde resulta:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi = -j\omega\vec{A} - \nabla\left(-\frac{\nabla \cdot \vec{A}}{j\omega\mu\epsilon}\right) = -j\omega\vec{A} - j\frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{A})}{\omega\mu\epsilon} \quad (2-36)$$

O campo elétrico $\vec{E}$ pode também ser obtido a partir da equação (2-9), com $\vec{J} = 0$, isto é:

$$\vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega\epsilon} \quad (2-37)$$

A equação vetorial de onda (2-35) pode ser escrita nas três seguintes equações escalares

$$\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x = -\mu J_x \quad (2-38)$$

$$\nabla^2 A_y + \beta^2 A_y = -\mu J_y$$

$$\nabla^2 A_z + \beta^2 A_z = -\mu J_z$$

onde $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ é a constante de fase, também chamada número de onda ou constante de propagação e cujas unidades são (rad.s^{-1}). Como estas equações são idênticas, é suficiente procurar a solução duma delas. Para isso, consideremos inicialmente uma fonte pontual situada na origem do sistema de coordenadas. Embora se trate duma fonte pontual a corrente que lhe está associada tem uma dada direção que vamos supor que é a do eixo dos zz . Como a fonte é nula em todo o lado exceto na origem, a equação (2-38) que vamos usar reduz-se a:

$$\nabla^2 A_z + \beta^2 A_z = 0 \quad (2-39)$$

Tratando-se duma fonte pontual, a perturbação causada por esta fonte deverá ser independente da direção o que significa que em coordenadas esféricas teremos $A_z = A_z(r)$. Atendendo a isto a equação anterior em coordenadas esféricas é:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \mathbf{A}_z(r)}{\partial r} \right] + \beta^2 \mathbf{A}_z(r) = 0 \quad (2-40)$$

que quando expandida tem a forma:

$$\frac{d^2 \mathbf{A}_z(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \mathbf{A}_z(r)}{dr} + \beta^2 \mathbf{A}_z(r) = 0 \quad (2-41)$$

Esta equação tem as seguintes soluções: $\mathbf{A}_{z1} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r}$ e $\mathbf{A}_{z2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{+j\beta r}}{r}$.

Estas soluções correspondem respetivamente a uma onda expandindo-se radialmente a partir da fonte e a uma onda propagando-se radialmente em direção à fonte. É evidente que para o nosso problema apenas a primeira tem significado físico.

Considerando agora uma densidade de corrente genérica $\mathbf{J}_z$, contida num volume V , então também o vetor potencial magnético virá orientado segundo z . O seu valor pode ser considerado como a soma das respostas de fontes pontuais devidamente pesadas pela distribuição local $\mu \mathbf{J}_z$. A expressão para $\mathbf{A}_z$ é então:

$$\mathbf{A}_z = \iiint_V \mu \mathbf{J}_z \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} dv' \quad (2-42)$$

Se tivéssemos considerado densidades de corrente orientadas segundo x e segundo y teríamos expressões semelhantes o que significa que no caso geral teremos uma equação vetorial da forma:

$$\vec{\mathbf{A}} = \iiint_V \mu \vec{\mathbf{J}} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} dv' \quad (2-43)$$

Para mais detalhes sobre a dedução da solução da equação (2-38) consultar [2] e [3].

Num problema genérico a fonte caracterizada pela densidade de corrente $\vec{\mathbf{J}}$, não está situada na origem do sistema de coordenadas, mas sim numa região que será definida pelas coordenadas (x', y', z') para se distinguir das coordenadas do ponto de observação definidas por (x, y, z) , tal como se representa na Figura 2.1.

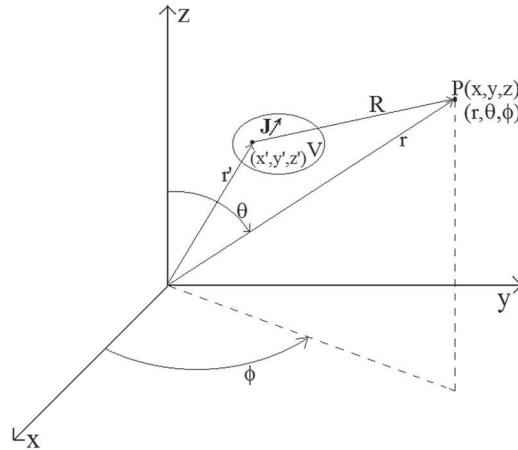


Figura 2.1 Sistema de coordenadas para o cálculo de campos radiados por fontes $\mathbf{J}$.

Para este caso a equação (2-43) deve ser escrita como:

$$\vec{\mathbf{A}}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{\mathbf{J}}(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv' \quad (2-44)$$

Com R dado por:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2-45)$$

Em certas situações, é possível fazer-se simplificações *a priori* na expressão de R que facilitam a resolução do integral sem comprometer a precisão da solução obtida. Por exemplo, se se pretender obter o vetor $\vec{A}$ a grande distância, poderemos considerar que todos os vetores $\vec{R}$ são paralelos entre si e paralelos ao vetor $\vec{r}$, tal como se ilustra na Figura 2.2.

A grande distância a norma do vetor $\vec{R}$, isto é, R pode ser então aproximada pela expressão (2-46):

$$R \approx r - r' \cos \gamma = r - \hat{r} \cdot \vec{r}' \quad (2-46)$$

com

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta \quad (2-47)$$

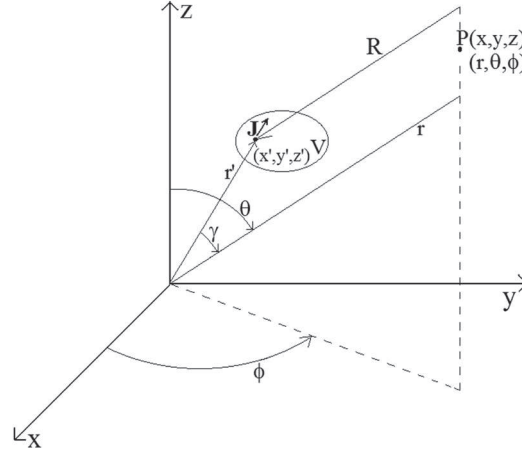


Figura 2.2 Geometria para o cálculo de campos radiados por fontes $\mathbf{J}$ a grande distância.

Para além disso, sendo os valores de R bastante próximos de r é suficiente fazer esta aproximação apenas no expoente e considerar para o denominador a aproximação mais grosseira $R \approx r$.

De acordo com estas aproximações, para grande distância, a equação (2-44) pode ser escrita como:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \iiint_V \vec{J}(x', y', z') e^{j\beta \hat{r} \cdot \vec{r}'} dv' \quad (2-48)$$

2.2 Dipolo elétrico infinitesimal

Os fundamentos apresentados na secção anterior, permitem-nos determinar os campos radiados por estruturas mais genéricas tais como as antenas filiformes que são o tópico deste capítulo. O bloco base para o estudo destas antenas é o dipolo infinitesimal também chamado dipolo ideal por ser dificilmente realizável na prática. Este elemento, também conhecido como dipolo de Hertz, é definido como um troço de fio infinitamente

fino, com um comprimento Δz eletricamente muito curto, isto é, com $\Delta z \ll \lambda$ e com uma corrente uniforme em amplitude e fase em toda a sua extensão. Uma antena filiforme pode ser dividida em dipolos infinitesimais e os campos radiados por ela calculados como a soma das contribuições de cada um desses dipolos elementares.

2.2.1 Expressões dos campos radiados

Consideremos um dipolo infinitesimal de comprimento Δz colocado simetricamente ao longo do eixo dos z , tal como se indica na Figura 2.3, e com a distribuição de corrente dada por:

$$\vec{J} = I \delta(x') \delta(y') \hat{z} \quad \text{para} \quad -\frac{\Delta z}{2} < z' < \frac{\Delta z}{2} \quad (2-49)$$

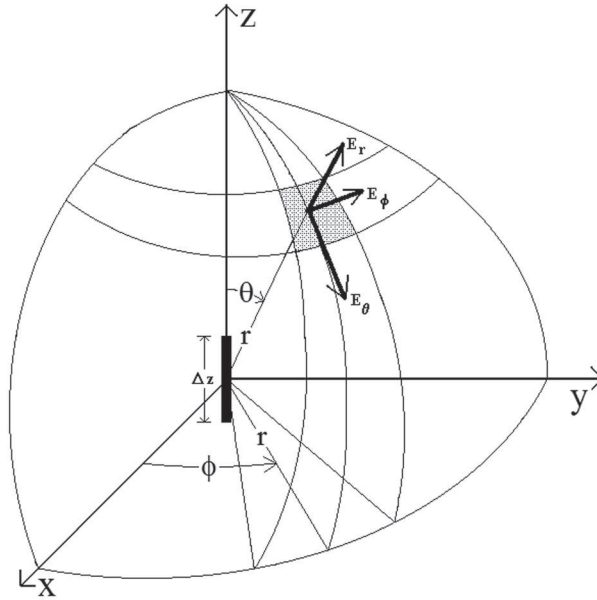


Figura 2.3 Geometria usada para o estudo do dipolo elementar.

Substituindo esta equação em (2-44) obtém-se:

$$\vec{A}(x, y, z) = \hat{z} \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{+\frac{\Delta z}{2}} I \frac{e^{-j\beta R}}{R} dz' \quad (2-50)$$

Atendendo a que a corrente é constante ao longo do dipolo e que $R \approx r$, porque o comprimento do dipolo é muito pequeno, a equação (2-44) pode-se escrever da forma seguinte:

$$\vec{A}(x, y, z) = \hat{z} \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{+\frac{\Delta z}{2}} dz' = \hat{z} \frac{\mu I \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \quad (2-51)$$

A partir do valor de $\vec{\mathbf{A}}$ já se pode calcular o campo $\vec{\mathbf{H}}$ a partir da equação (2-26) e o campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}$ a partir das equações (2-36) ou (2-37). Normalmente é mais comum exprimir os campos $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{H}}$ em coordenadas esféricas como se ilustra na Figura 2.3. Como o vetor $\vec{\mathbf{A}}$, dado por (2-51) está em coordenadas retangulares, é necessário exprimi-lo em coordenadas esféricas usando as seguintes transformações:

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_z \cos \theta = \frac{\mu \mathbf{I} \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cos \theta \quad (2-52)$$

$$\mathbf{A}_\theta = -\mathbf{A}_z \sin \theta = -\frac{\mu \mathbf{I} \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \quad (2-53)$$

$$\mathbf{A}_\phi = 0 \quad (2-54)$$

Usando a expansão do $\nabla \times \vec{\mathbf{A}}$ em coordenadas esféricas, obtém-se para $\vec{\mathbf{H}}$ a seguinte expressão:

$$\vec{\mathbf{H}} = \hat{\phi} \frac{1}{\mu r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{A}_\theta) - \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \theta} \right] \quad (2-55)$$

Substituindo (2-52) e (2-53) em (2-55) e simplificando as derivadas, obtém-se:

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_\theta = 0$$

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{I} \Delta z}{4\pi} \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \quad (2-56)$$

Dum modo semelhante, usando a expansão de $\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})$ em coordenadas esféricas e efetuando as derivadas, obtém-se para $\vec{\mathbf{E}}$ as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \frac{\mathbf{I} \Delta z}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right] e^{-j\beta r} \cos \theta \\ \mathbf{E}_\theta &= \frac{\mathbf{I} \Delta z}{4\pi} \left[\frac{j\omega\mu}{r} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \\ \mathbf{E}_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (2-57)$$

2.2.2 Potência radiada e resistência de radiação

A partir das expressões do campo eletromagnético, pode-se obter a densidade de potência em qualquer ponto. Integrando esta densidade de potência ao longo duma superfície fechada em redor do dipolo, obtém-se a potência total radiada. A parte real desta potência representa a potência dissipada por radiação e é modelada pela resistência de radiação, que neste caso, por o dipolo não ter perdas, coincide com a parte real da impedância de entrada. A parte imaginária está associada a ondas estacionárias resultantes de ondas que se propagam para fora e para dentro relativamente ao dipolo e é representada pela componente reativa da impedância de entrada.

Usando as expressões (2-56) e (2-57) a densidade de potência é dada por:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2}(\hat{r}E_r + \hat{\theta}E_\theta) \times (\hat{\phi}H_\phi^*) = \frac{1}{2}(\hat{r}E_\theta H_\phi^* - \hat{\theta}E_r H_\phi^*) \quad (2-58)$$

Integrando esta densidade de potência ao longo da superfície duma esfera de raio r obtém-se a potência total radiada, tal como se indica seguidamente:

$$\mathbf{P} = \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(\hat{r}E_\theta H_\phi^* - \hat{\theta}E_r H_\phi^*) \hat{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2-59)$$

Substituindo nesta equação E_θ , E_r e H_ϕ pelas correspondentes expressões das equações (2-56) e (2-57), obtém-se:

$$\mathbf{P} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\theta \mathbf{H}_\phi^*) r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{|\mathbf{I}| \Delta z}{\lambda} \right)^2 \left[1 - j \frac{1}{(\beta r)^3} \right] \quad (2-60)$$

Esta potência complexa pode-se escrever como $\mathbf{P} = P_{\text{rad}} + jQ$ sendo a parte real e a parte imaginária dadas respetivamente por:

$$P_{\text{rad}} = \eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{|\mathbf{I}| \Delta z}{\lambda} \right)^2 \quad (2-61)$$

$$Q = -\eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{|\mathbf{I}| \Delta z}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{(\beta r)^3} \quad (2-62)$$

em que λ é o comprimento de onda, relacionado com β pela relação $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ e em que $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ é a impedância intrínseca do meio, onde está inserido o dipolo, caracterizado pelas constantes μ e ϵ .

Como se pode ver pela expressão de P_{rad} , esta não depende de r, o que significa que a potência que atravessa qualquer esfera é sempre a mesma. Isso implica que a densidade de potência sobre a superfície das esferas consideradas vai diminuindo à medida que elas são maiores.

Pela expressão de Q vê-se que esta potência só tem significado relativamente a P_{rad} para valores $\beta r \ll 1$, isto é, para $r \ll \lambda$. Para $r = \lambda/2\pi$, $Q = P_{\text{rad}}$. Para $r \gg \lambda$, isto é, no campo distante, Q é desprezável face a P_{rad} .

A partir da expressão de P_{rad} , dada por (2-61), pode-se obter a expressão da resistência de radiação R_r , atendendo à sua definição, isto é:

$$\frac{1}{2} R_r |\mathbf{I}|^2 = P_{\text{rad}} = \eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{|\mathbf{I}| \Delta z}{\lambda} \right)^2$$

Donde resulta:

$$R_r = \eta \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 = 80 \pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \quad (2-63)$$

2.2.3 Regiões envolventes do dipolo

As expressões (2-56) e (2-57) do campo eletromagnético são válidas em qualquer ponto do espaço em redor do dipolo. No entanto é interessante analisá-las de acordo com a distância a que se está do dipolo e obter expressões simplificadas válidas para determinadas situações.

Começemos pela região próxima do dipolo em que $\beta r \ll 1$. Esta região designa-se por campo próximo¹.

Nestas condições o fator $\frac{j\beta}{r}$ da equação (2-56) pode-se desprezar face ao fator $\frac{1}{r^2}$ pelo que o campo $\vec{H}$ pode ser aproximado por:

$$\mathbf{H}_\phi \cong \frac{I\Delta z}{4\pi r^2} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-64)$$

Pela mesma lógica nas equações (2-57) o fator $\frac{1}{j\omega\epsilon r^3}$ é dominante pelo que o campo $\vec{E}$ pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &\cong -j \frac{I\Delta z}{2\pi} \frac{1}{\omega\epsilon r^3} e^{-j\beta r} \cos\theta \\ \mathbf{E}_\theta &\cong -j \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{1}{\omega\epsilon r^3} e^{-j\beta r} \sin\theta \end{aligned} \quad (2-65)$$

Por estas relações vê-se que as componentes $\mathbf{E}_r$ e $\mathbf{E}_\theta$ estão em fase entre si e em quadratura com $\mathbf{H}_\phi$. Se se calcular a densidade de potência $\vec{S}$ pela relação (2-58) facilmente se concluiu que é puramente imaginária, pelo que não há potência média radiada. É importante notar que isto resulta de se ter usado expressões aproximadas. É óbvio que há potência radiada, o que acontece é que nesta região a potência reativa é dominante.

O mesmo se pode constatar se na expressão (2-60) se considerar que $\left[1 - j \frac{1}{(\beta r)^3}\right]$ é aproximadamente $\left[j \frac{1}{(\beta r)^3}\right]$ o que implica $P_{\text{rad}} = 0$.

Consideremos agora a região intermédia em que $\beta r > 1$. Esta região designa-se por campo intermédio. Nestas condições o fator $\frac{1}{r^2}$ da equação (2-56) pode-se desprezar face ao fator $\frac{j\beta}{r}$ pelo que o campo $\vec{H}$ pode ser aproximado por:

$$\mathbf{H}_\phi \cong j \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{\beta}{r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-66)$$

Pela mesma lógica, nas equações (2-57) o fator $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{r^2}$ é dominante na expressão de $\mathbf{E}_r$ e o fator $\frac{j\omega\mu}{r}$ é dominante na expressão de $\mathbf{E}_\theta$, pelo que o campo $\vec{E}$ pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &\cong \eta \frac{I\Delta z}{2\pi r^2} e^{-j\beta r} \cos\theta \\ \mathbf{E}_\theta &\cong j\eta \frac{\beta I\Delta z}{4\pi} e^{-j\beta r} \sin\theta \end{aligned} \quad (2-67)$$

É de notar que as duas componentes do campo $\vec{E}$ estão em quadratura de fase e como não têm amplitudes iguais dão origem a um vetor campo elétrico rotativo cuja extremidade traça uma elipse. Se atendermos à Figura

¹ Em língua inglesa *near-field region*.

2.3, vemos que esta elipse está num plano que contém a direção de propagação. Embora sendo análoga, não é a polarização elíptica tal como foi definida no capítulo 1, pois de acordo com essa definição a elipse gerada está num plano normal à direção de propagação.

Finalmente consideremos a região em que $\beta r \gg 1$. Esta região designa-se por campo distante². Nestas condições além das aproximações feitas no campo intermédio verifica-se que a expressão de E_r obtida é inversamente proporcional a r^2 pelo que se pode desprezar face à componente E_θ . Sendo assim, o campo $\vec{E}$ e o campo $\vec{H}$ podem ser aproximados por:

$$\mathbf{H}_\phi \cong j \frac{\beta I \Delta z}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-68)$$

e

$$\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{\beta I \Delta z}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-69)$$

$$\text{Com } \mathbf{E}_r \cong 0 \text{ e } \mathbf{E}_\phi = \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_\theta = 0$$

Por estas relações vê-se que o campo $\vec{E}$ e o campo $\vec{H}$ são perpendiculares entre si e à direção de propagação. A razão entre as normas destes vetores é:

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2-70)$$

que como já vimos é a impedância intrínseca do meio. Como isto é uma propriedade das ondas planas, podemos dizer que no campo distante a onda eletromagnética radiada pelo dipolo se comporta como uma onda plana.

No campo distante predomina a potência radiada, sendo desprezável a potência reativa. O campo distante é ainda caracterizado pelo facto da distribuição angular em redor da antena ser independente da distância. Isto significa que a forma do diagrama de radiação não varia com a distância. O campo distante é normalmente a região com mais interesse já que em geral os utilizadores estão a grande distância.

2.2.4 Diagrama de radiação, Diretividade e Área efetiva

No campo distante a intensidade de radiação pode ser obtida atendendo à relação (2-70) e à expressão de E_θ , (2-69). Tendo em conta estas relações obtém-se:

$$U(\theta, \phi) = r^2 S = r^2 \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = r^2 \frac{1}{2} \text{Re}\left(\vec{E} \times \frac{\vec{E}^*}{\eta}\right) = r^2 \frac{1}{2} \left(\frac{|\vec{E}|^2}{\eta}\right)$$

Ou ainda:

$$U(\theta) = r^2 \frac{1}{2} \left(\frac{|E_\theta|^2}{\eta}\right) = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\beta I |\Delta z|}{4\pi}\right)^2 \sin^2\theta \quad (2-71)$$

² Em língua inglesa *far-field region*.

Como se pode ver por esta expressão, a intensidade de radiação não depende da coordenada ϕ , o que significa que há simetria relativamente ao eixo dos zz .

Também se conclui facilmente que o máximo de $U(\theta)$ ocorre para $\theta=90^\circ$, valendo $U_{\max} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\beta |\mathbf{I}| \Delta z}{4\pi} \right)^2$. O diagrama de radiação é a representação gráfica da intensidade de radiação normalizada dada por:

$$U_n(\theta) = \frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \sin^2 \theta \quad (2-72)$$

Sendo assim o diagrama de radiação é uma estrutura de revolução em torno do eixo dos zz , que apresenta um nulo na direção do eixo do dipolo e um valor máximo e constante no plano $\theta=90^\circ$. Este diagrama tem uma forma que faz lembrar um “*doughnut*” como está esboçado na Figura 2.4.

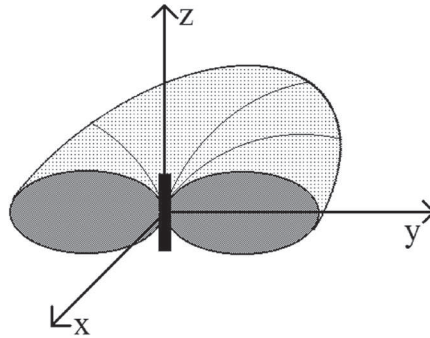


Figura 2.4 Diagrama de radiação tridimensional dum dipolo infinitesimal.

Na Figura 2.5 está representado o diagrama de radiação do dipolo infinitesimal em coordenadas retangulares.

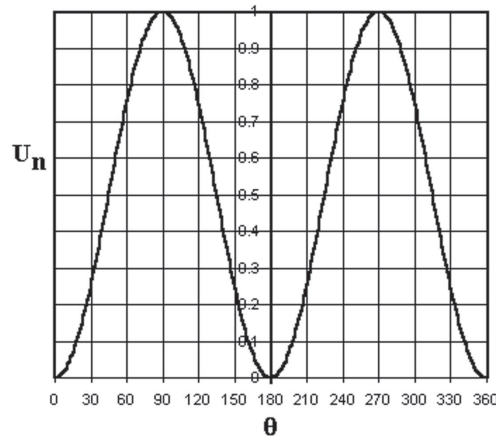


Figura 2.5 Diagrama de radiação dum dipolo infinitesimal.

A diretividade na direção (θ, ϕ) é obtida a partir da definição, isto é, é dada pela relação $D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{\text{rad}}}$. A diretividade na direção do máximo ou simplesmente diretividade é dada por:

$$D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = 4\pi \frac{\frac{\eta}{2} \left(\frac{\beta |\mathbf{I}| \Delta z}{4\pi} \right)^2}{\eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{|\mathbf{I}| \Delta z}{\lambda} \right)^2} = \frac{3}{2} \quad (2-73)$$

A área efetiva do dipolo infinitesimal é então dada por:

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \quad (2-74)$$

2.3 Dipolo magnético infinitesimal

Embora não existam correntes magnéticas, o estudo dum dipolo infinitesimal percorrido por uma corrente magnética é um bom caso de estudo para a aplicação do teorema da dualidade.

Consideremos um dipolo de comprimento Δz , orientado segundo o eixo dos zz e percorrido por uma corrente magnética I_m uniforme em amplitude e fase em toda a sua extensão. Esta estrutura é dual da estudada na secção anterior em que se tinha um dipolo de comprimento Δz , orientado segundo o eixo dos zz e percorrido por uma corrente elétrica I uniforme em amplitude e fase em toda a sua extensão.

Por se tratar de estruturas duais, os campos radiados pelo dipolo magnético infinitesimal podem-se obter diretamente das equações (2-56) e (2-57), por aplicação das equivalências indicadas na Tabela 2-1. Assim o campo que seria radiado por um dipolo magnético infinitesimal é definido pelas expressões (2-75) e (2-76):

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_\theta = 0 \quad (2-75)$$

$$\mathbf{E}_\phi = -\frac{\mathbf{I}_m \Delta z}{4\pi} \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r} \sin\theta$$

$$\mathbf{H}_r = \frac{\mathbf{I}_m \Delta z}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\mu r^3} \right] e^{-j\beta r} \cos\theta$$

$$\mathbf{H}_\theta = \frac{\mathbf{I}_m \Delta z}{4\pi} \left[\frac{j\omega\epsilon}{r} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\mu r^3} \right] e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-76)$$

$$\mathbf{H}_\phi = 0$$

Tal como no caso do dipolo elétrico, também neste caso na região distante o campo $\vec{\mathbf{E}}$ e o campo $\vec{\mathbf{H}}$ podem ser aproximados por:

$$\mathbf{E}_\phi \cong -j \frac{\beta \mathbf{I}_m \Delta z}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-77)$$

e

$$\mathbf{H}_\theta \cong j \frac{1}{\eta} \frac{\beta \mathbf{I}_m \Delta z}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-78)$$

$$\text{Com } \mathbf{H}_r \cong 0 \text{ e } \mathbf{H}_\phi = \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_\theta = 0$$

Por estas relações vê-se que o campo $\vec{\mathbf{E}}$ e o campo $\vec{\mathbf{H}}$ são perpendiculares entre si e à direção de propagação. A razão entre as normas destes vetores é:

$$\frac{\mathbf{E}_\phi}{\mathbf{H}_\theta} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2-79)$$

que como já vimos é a impedância intrínseca do meio. Como isto é uma propriedade das ondas planas, podemos dizer que no campo distante a onda eletromagnética radiada pelo dipolo se comporta como uma onda plana.

De acordo com esta análise conclui-se então que, à semelhança do dipolo elementar elétrico, o diagrama de radiação do dipolo magnético é uma estrutura de revolução em torno do eixo dos zz , que apresenta um nulo na direção do eixo do dipolo e um valor máximo e constante no plano $\theta=90^\circ$. Este diagrama é portanto idêntico ao do dipolo elementar elétrico esboçado na Figura 2.4.

2.4 Dipolo curto

Como foi dito anteriormente, o dipolo elementar não é realizável na prática, pois não é possível ter um dipolo com uma distribuição de corrente com a mesma amplitude ao longo de todo o fio. Há, no entanto, dipolos realizáveis que têm um comprimento eletricamente pequeno, inferior a $\lambda/10$, e que são designados por dipolos curtos.

Se relembramos o modo como um dipolo pode ser derivado duma linha de transmissão bifilar terminada em circuito aberto, poderemos obter a distribuição da amplitude de corrente ao longo dum dipolo curto. Como se pode ver na Figura 2.6, por o dipolo ser eletricamente curto a distribuição de corrente ao longo dele, embora derivando duma distribuição sinusoidal, pode ser considerada linear crescendo linearmente desde zero nos extremos, até a um valor máximo no centro.

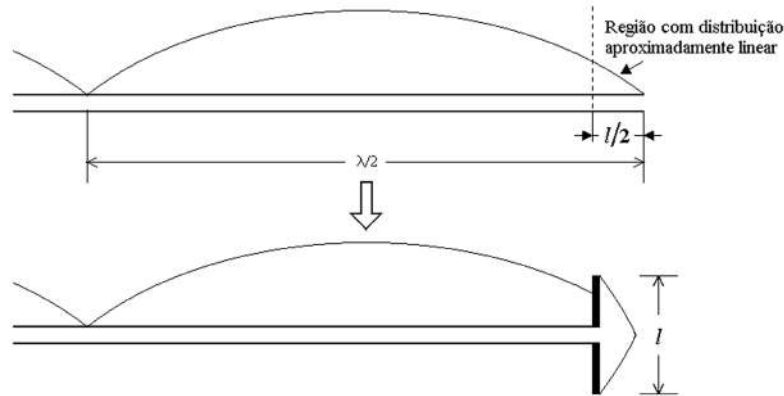


Figura 2.6 Distribuição da amplitude de corrente num dipolo curto com base na distribuição de corrente numa linha bifilar terminada em circuito aberto.

Considerando um dipolo curto de comprimento l e diâmetro muito fino, situado simetricamente ao longo do eixo dos zz , a distribuição de corrente ao longo dele pode então ser dada pela seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{I}}(z') = \begin{cases} \hat{\mathbf{z}} I_0 \left(1 + \frac{2}{l} z' \right) & -\frac{l}{2} \leq z' \leq 0 \\ \hat{\mathbf{z}} I_0 \left(1 - \frac{2}{l} z' \right) & 0 \leq z' \leq \frac{l}{2} \end{cases} \quad (2-80)$$

em que I_0 é a amplitude máxima da corrente que coincide com a corrente à entrada.

Como exemplo, na Figura 2.7 está representada a distribuição de corrente ao longo dum dipolo com um comprimento $l=\lambda/20$.

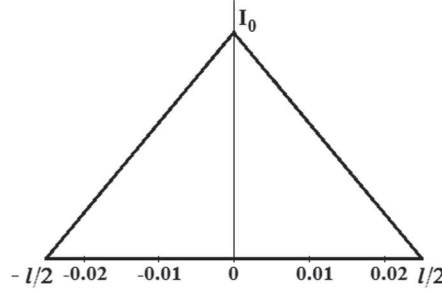


Figura 2.7 Distribuição da amplitude de corrente ao longo dum dipolo curto com comprimento $l=\lambda/20$.

Usando um procedimento semelhante ao que se usou para o estudo do dipolo elementar, substituindo (2-80) em (2-44), obtém-se:

$$\vec{A}(x, y, z) = \hat{z} \frac{\mu}{4\pi} \left[\int_{-\frac{l}{2}}^0 I_0 \left(1 + \frac{2}{l} z' \right) \frac{e^{-j\beta R}}{R} dz' + \int_0^{\frac{l}{2}} I_0 \left(1 - \frac{2}{l} z' \right) \frac{e^{-j\beta R}}{R} dz' \right] \quad (2-81)$$

Como o comprimento do dipolo é muito pequeno em comparação com o comprimento de onda, pode-se considerar que $R \approx r$ em todo o percurso de integração. O erro máximo que se comete é $|R-r|=l/2$ e ocorre quando o observador está segundo o eixo do dipolo. O erro cometido com esta aproximação reflete-se essencialmente na fase.

Para um dipolo com $l=\lambda/10$, o máximo erro de fase é então $\beta|R-r| = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{20} = \frac{\pi}{10}$ rad, isto é, 18° o que para problemas de antenas se considera aceitável.

Fazendo esta aproximação a equação (2-81) pode-se escrever como:

$$\vec{A}(x, y, z) = \hat{z} \frac{\mu}{4\pi} I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \left[\int_{-\frac{l}{2}}^0 \left(1 + \frac{2}{l} z' \right) dz' + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{2}{l} z' \right) dz' \right] \quad (2-82)$$

Resolvendo os integrais, facilmente se vê que o seu valor é $l/2$, pelo que o vetor potencial magnético para um dipolo curto de comprimento l e corrente máxima I_0 é dado por:

$$\vec{A}(x, y, z) = \hat{z} \frac{1}{2} \left[\frac{\mu I_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right] \quad (2-83)$$

Comparando esta equação com a equação (2-51) vê-se que o vetor potencial magnético associado a um dipolo curto com comprimento l e corrente máxima I_0 é metade do vetor potencial magnético associado a um dipolo elementar do mesmo comprimento e com uma corrente uniforme igual a I_0 . Isto significa que as expressões do campo radiado por um dipolo curto se podem obter diretamente das expressões obtidas para o dipolo elementar, afetando-as do fator $1/2$. Nomeadamente as expressões para o campo distante obtêm-se das equações (2-68) e (2-69) dando origem às expressões seguintes:

$$\mathbf{H}_\phi \cong j \frac{\beta I_0 l}{8\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-84)$$

$$\mathbf{E}_\theta \cong j \eta \frac{\beta I_0 l}{8\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad (2-85)$$

$$\mathbf{E}_r \cong 0 \text{ e } \mathbf{E}_\phi = \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_\theta = 0$$

Para além destas expressões há outros parâmetros que se podem obter por comparação com os resultados obtidos para o dipolo elementar. Tendo em conta que a intensidade de radiação no campo distante é dada por $U(\theta, \phi) = r^2 S(r, \theta, \phi) = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}(r, \theta, \phi)|^2$, resulta como consequência que a intensidade de radiação dum dipolo curto é $U_{\max}^{\text{DC}} = r^2 \frac{1}{2\eta} |E_{\max}|^2 = \frac{1}{4} U_{\max}^{\text{DE}}$, sendo $U_{\max}^{\text{DE}}$ a intensidade de radiação máxima dum dipolo elementar do mesmo comprimento e com uma corrente uniforme igual a I_0 .

Do mesmo modo facilmente se conclui que $P_{\text{rad}}^{\text{DC}} = \frac{1}{4} P_{\text{rad}}^{\text{DE}}$. Atendendo à definição de resistência de radiação também se verifica que $R_r^{\text{DC}} = \frac{1}{4} R_r^{\text{DE}}$, pelo que a resistência de radiação dum dipolo curto é dada pela expressão:

$$R_r = 20 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (2-86)$$

Finalmente atendendo à definição de diretividade, $D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}}$, verifica-se que $D^{\text{DC}} = D^{\text{DE}}$.

Como o diagrama de radiação é a representação da intensidade de radiação normalizada, o diagrama de radiação dum dipolo curto com comprimento l e corrente máxima I_0 é exatamente o mesmo dum dipolo elementar do mesmo comprimento e com uma corrente uniforme igual a I_0 , e, portanto, é semelhante ao representado na Figura 2.4 e na Figura 2.5.

2.5 Dipolo de comprimento finito

O dipolo curto que acabamos de estudar, é um caso particular duma classe mais genérica que são os dipolos de comprimento finito, derivados de linhas de transmissão bifilares terminadas em circuito aberto. Se relembrarmos esta derivação, exemplificada na Figura 2.8 para o caso dum dipolo de meio comprimento de onda, poderemos obter a expressão para a corrente ao longo dum dipolo a partir da distribuição de corrente ao longo da linha bifilar.

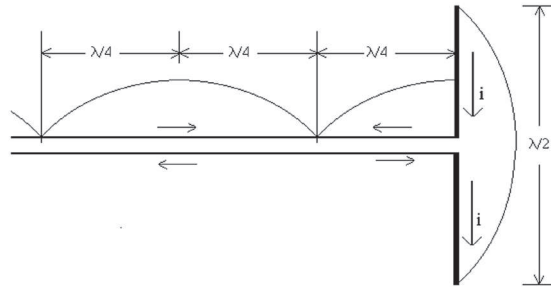


Figura 2.8 Distribuição da amplitude de corrente num dipolo de meio comprimento de onda com base na distribuição de corrente numa linha bifilar terminada em circuito aberto.

Considerando que o dipolo está colocado simetricamente ao longo do eixo dos zz , essa distribuição é então dada pela seguinte expressão:

$$\bar{I}(z') = \begin{cases} \hat{z} I_0 \sin \left[\beta \left(\frac{l}{2} + z' \right) \right] & -\frac{l}{2} \leq z' \leq 0 \\ \hat{z} I_0 \sin \left[\beta \left(\frac{l}{2} - z' \right) \right] & 0 \leq z' \leq \frac{l}{2} \end{cases} \quad (2-87)$$

em que I_0 é a máxima amplitude da corrente que ocorre ao longo do dipolo. No caso do dipolo de meio comprimento de onda este valor ocorre a meio do dipolo, isto é, à entrada.

Na Figura 2.9 estão representadas as distribuições da amplitude da corrente, em dipolos com diversos comprimentos, obtidas a partir da equação (2-87).

Esta expressão é uma boa aproximação da que se obtém na prática para dipolos em que o diâmetro é muito pequeno em comparação com o comprimento de onda, exceto para dipolos cujo comprimento é um múltiplo de λ . De facto, como se pode ver pela Figura 2.9 (a) e (d), a corrente no centro do dipolo, isto é, à entrada, é nula o que corresponde a uma impedância de entrada infinita. Na prática esta impedância é elevada, mas não infinita, o que significa que a corrente é pequena, mas não nula. As razões para esta diferença são o diâmetro não nulo do fio e o espaço que necessariamente tem que haver na prática para se alimentar o dipolo.

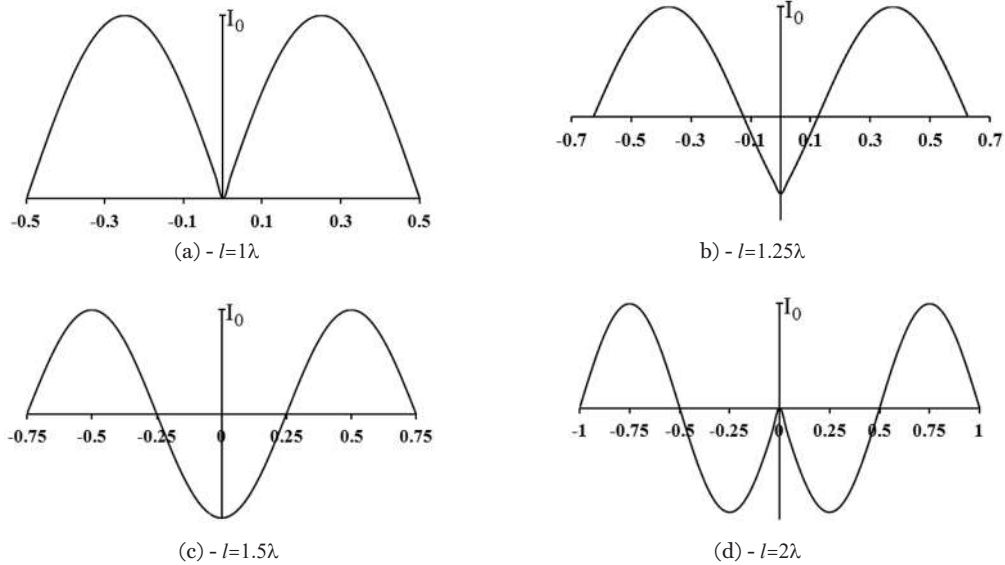


Figura 2.9 Distribuição da amplitude de corrente em dipolos com base na distribuição de corrente numa linha bifilar terminada em circuito aberto.

É também importante chamar a atenção para o facto de que as curvas da Figura 2.9 representam a distribuição da amplitude da corrente ao longo do dipolo, mas que a corrente em cada ponto evolui sinusoidalmente com o tempo. Como exemplo, na Figura 2.10 mostra-se a evolução com o tempo das correntes em cinco pontos de um dos braços dum dipolo de 1.5λ . Como se pode ver a corrente no extremo é sempre nula como acontece em qualquer dipolo e as outras quatro correntes, além de não terem todas a mesma amplitude, também não estão todas em fase. Isto também pode ser observado na Figura 2.9 (c) onde se vê que a fase da corrente se inverte para $z' = 0.25l$, onde a corrente é nula. Esta inversão de fase ocorre em todos os dipolos com comprimento superior a $\lambda/2$. O facto das correntes não terem todas a mesma fase permite-nos prever duma forma qualitativa que haverá direcções segundo as quais as contribuições dos campos produzidos por estas correntes se combinem de forma destrutiva, dando origem a um campo total nulo, isto é, a um nulo no diagrama de radiação segundo essa direcção.

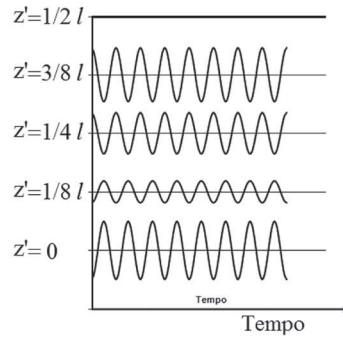


Figura 2.10 Variação com o tempo da corrente em cinco pontos dum braço dum dipolo de 1.5λ .

2.5.1 Obtenção dos campos radiados

Em princípio os campos radiados por um dipolo podem ser calculados substituindo a distribuição de corrente dada por (2-87) na equação (2-44) e a partir do vetor potencial magnético $\vec{A}$, obter o campo $\vec{H}$ usando a equação (2-26) e o campo elétrico $\vec{E}$ a partir das equações (2-36) ou (2-37), tal como se fez para o dipolo elementar. No entanto este procedimento é bastante complicado pelo que normalmente se determinam os campos usando o princípio da sobreposição. Para isso considera-se o dipolo dividido em dipolos de comprimento infinitesimal, cada um colocado na sua coordenada e com uma corrente constante, correspondente à corrente dessa coordenada. Os campos produzidos por cada um destes dipolos, dados pelas expressões calculadas no ponto 2.2.1, são adicionados obtendo-se deste modo o campo total por sobreposição. Este método é descrito pela equação (2-88), para o caso da componente E_θ do campo elétrico

$$E_\theta = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dE_\theta(z') \quad (2-88)$$

em que $dE_\theta(z')$ representa o campo produzido pelo dipolo infinitesimal de comprimento dz' , colocado na coordenada z' e percorrido pela corrente $I(z')$, tal como se ilustra na Figura 2.11.

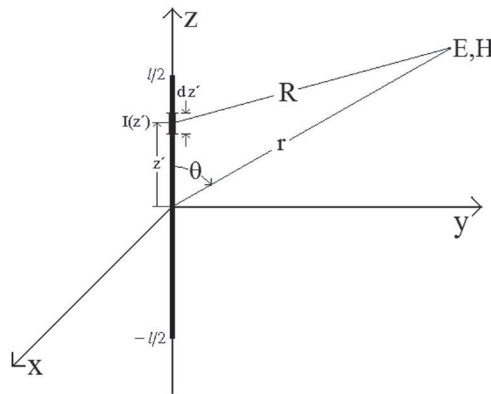


Figura 2.11 Geometria usada para o estudo do dipolo de comprimento finito.

Se pretendêssemos calcular $\mathbf{E}_0$ em qualquer ponto do espaço envolvente do dipolo deveríamos considerar $d\mathbf{E}_0(z')$ como:

$$d\mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{I}(z')}{4\pi} \left[\frac{j\omega\mu}{R} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{R^2} + \frac{1}{j\omega\varepsilon R^3} \right] e^{-j\beta R} \sin\theta dz' \quad (2-89)$$

Com R dado por:

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (2-90)$$

É evidente que a substituição de (2-89) e (2-90) em (2-88) daria origem a um integral de difícil resolução, pelo que antes de se optar por este modo de resolução genérico é conveniente averiguar se é possível fazer-se simplificações *a priori* que facilitem a resolução do integral sem comprometer a precisão da solução obtida. Por exemplo, se se pretender obter o campo a grande distância, o que é normalmente o caso, não faz sentido usar a expressão exata de R dada por (2-90), nem todos os termos da equação (2-89). Vejamos seguidamente as regiões em que se pode dividir o espaço envolvente do dipolo, de acordo com as aproximações que se podem considerar para a distância R.

2.5.1.1 Regiões envolventes do dipolo

Como se pode ver pela expressão (2-89) as aproximações que se fizerem em R refletem-se sobretudo na fase através do expoente da exponencial $e^{-j\beta R}$. A primeira simplificação da expressão de R que se pode fazer resulta do facto de se estar a considerar que o fio é infinitamente fino pelo que a expressão (2-90) pode-se escrever como:

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2} \quad (2-91)$$

Tendo em conta que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e que $z = r \cos\theta$, (2-91) pode-se ainda escrever como:

$$R = \sqrt{r^2 + z'^2 - 2z'r \cos\theta} = r \sqrt{1 + \frac{(z'^2 - 2z'r \cos\theta)}{r^2}} \quad (2-92)$$

O passo seguinte para a simplificação desta expressão é eliminar o radical recorrendo ao desenvolvimento em série de $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^3}{16} - \frac{5}{128}\alpha^4 + \dots$, com $\alpha = \frac{(z'^2 - 2z'r \cos\theta)}{r^2}$.

Utilizando este desenvolvimento em (2-92) e após algumas simplificações e arranjos obtém-se:

$$R = r - \cos(\theta)z' + \frac{\sin^2(\theta)}{2r}(z')^2 + \frac{\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{2r^2}(z')^3 + \dots \quad (2-93)$$

É evidente que a aproximação mais grosseira é considerar $R \approx r$. Esta foi a aproximação que se fez no estudo do dipolo curto e que só pode ser feita quando o comprimento do dipolo é menor que $\lambda/10$. Quando tal não acontece teremos que tomar em consideração mais termos do desenvolvimento. A aproximação seguinte é portanto $R \approx r - \cos(\theta)z'$. Geometricamente esta aproximação significa que do ponto de vista do observador os segmentos de reta r e R são paralelos, tal como se indica na Figura 2.12.

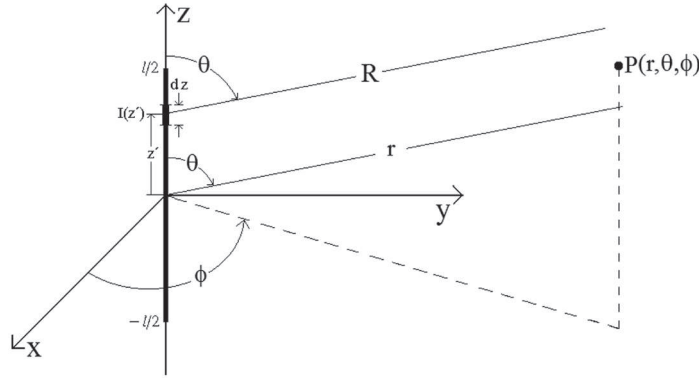


Figura 2.12 Geometria usada para o estudo do dipolo de comprimento finito no campo distante.

Esta aproximação é válida quando o erro cometido for aceitável. A maior contribuição para este erro é dada pelo primeiro termo do desenvolvimento que é rejeitado, que neste caso é o terceiro e cujo máximo ocorre para $z' = l/2$ e $\theta = 90^\circ$.

O erro máximo de R é então dado por $\Delta R_{\max} = \left| \frac{\sin^2(\theta)}{2r} (z')^2 \right|_{z' = \frac{l}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{l^2}{8r}$. Como já se disse este erro faz-se sentir essencialmente na fase.

Considerando que o máximo erro de fase que é aceitável é $\pi/8$, pode-se então escrever a seguinte relação: $\Delta \phi_{\max} = \beta \Delta R_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l^2}{8r_{\min}} \leq \frac{\pi}{8}$, onde $r_{\min}$ é a distância mínima para a qual este erro é obtido.

Deste modo, a distância a partir da qual se pode substituir R pelos dois primeiros termos do desenvolvimento dado por (2-93), é:

$$r \geq \frac{2l^2}{\lambda} \quad (2-94)$$

Esta relação define a região de campo distante do dipolo e é alargada a qualquer tipo de antena passando o valor l a designar a maior dimensão da antena.

O parâmetro R aparece nas expressões do campo, na exponencial e no denominador de alguns fatores. Na região de campo distante para o R do expoente deve ser usada a aproximação anterior, para o denominador é, contudo, suficiente fazer a aproximação $R \approx r$. As aproximações para o campo distante são então as dadas por (2-95).

$$\begin{aligned} R &\approx r - \cos(\theta)z' && \text{para o expoente, e} \\ R &\approx r && \text{para o denominador} \end{aligned} \quad (2-95)$$

A região de campo distante é também conhecida historicamente por região de *Fraunhofer*. Nesta região o diagrama de radiação é independente da distância.

Por oposição à designação de campo distante, a região compreendida entre a antena e $\frac{2l^2}{\lambda}$, designa-se por campo próximo.

Esta região é por sua vez subdividida em duas outras. A que confina com o campo distante é aquela onde ainda se pode usar uma aproximação de R com base na expressão (2-93).

Neste caso será necessário usar mais um termo na aproximação de R, isto é, R deve ser dado pela expressão

$$R = r - \cos(\theta)z' + \frac{\sin^2(\theta)}{2r} (z')^2 \cdot$$

Esta aproximação dá origem a um erro e, tal como anteriormente, a maior contribuição para este erro é dada pelo primeiro termo do desenvolvimento que é rejeitado, que neste caso é o quarto dado por: $\frac{\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{2r^2}(z')^3$ e cujo máximo ocorre para $z' = l/2$ e para o ângulo que maximiza a função $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$.

Fazendo o estudo desta função facilmente se determina que esse ângulo é $\theta = \tan^{-1}(\pm\sqrt{2})$.

$$\text{O erro máximo de R é então dado por: } \Delta R_{\max} = \left| \frac{\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{2r^2}(z')^3 \right|_{z'=\frac{l}{2}; \theta=\tan^{-1}(\pm\sqrt{2})} = \frac{l^3}{16r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{2}{3} \right).$$

Considerando que o máximo erro de fase que é aceitável é $\pi/8$, pode-se obter a distância mínima para a qual este erro é obtido, pela seguinte relação: $\Delta\varphi_{\max} = \beta\Delta R_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l^3}{16r_{\min}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{2}{3} \right) \leq \frac{\pi}{8}$, onde $r_{\min}$ é a distância mínima para a qual este erro é obtido.

Sendo assim, a distância a partir da qual se pode substituir R pelos três primeiros termos do desenvolvimento dado por (2-93), é:

$$r \geq \sqrt{\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right) \left(\frac{l^3}{\lambda} \right)} = 0.62 \sqrt{\frac{l^3}{\lambda}} \quad (2-96)$$

A sub-região do campo próximo, onde deve ser feita a substituição de R pelos três primeiros termos do desenvolvimento dado por (2-93), é então definida pela relação (2-97).

$$0.62 \sqrt{\frac{l^3}{\lambda}} \leq r \leq \frac{2l^2}{\lambda} \quad (2-97)$$

Esta sub-região é denominada região de radiação de campo próximo, porque aqui a densidade de potência radiada é maior do que a densidade da potência reativa. Esta sub-região é também conhecida por região de *Fresnel*, porque os campos podem ser expressos na forma de integrais de *Fresnel*. Nesta sub-região a forma do diagrama de radiação depende da distância.

Tendo em conta as definições anteriores resulta que a outra sub-região do campo próximo que começa junto à antena é definida pela relação (2-98).

$$0 \leq r \leq 0.62 \sqrt{\frac{l^3}{\lambda}} \quad (2-98)$$

Nesta sub-região já não se justifica usar valores aproximados para R. Esta sub-região é denominada região reativa de campo próximo, porque aqui predomina a densidade da potência reativa.

Na Figura 2.13 estão definidas duma forma resumida as regiões em que se divide o espaço que rodeia uma antena cuja maior dimensão é D.

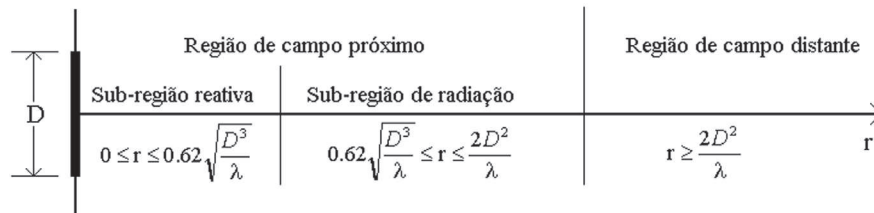


Figura 2.13 Regiões envolventes duma antena.

2.5.1.2 Expressões dos campos radiados na região de campo distante

Em geral os campos que interessa calcular são os da região de campo distante. Para a obtenção das expressões destes campos, podemos então usar as aproximações de campo distante. Sendo assim, a expressão de $d\mathbf{E}_\theta(z')$ que aparece na equação (2-88) é a seguinte:

$$d\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{\beta \mathbf{I}(z')}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta e^{+j\beta z' \cos\theta} dz' \quad (2-99)$$

Esta expressão é obtida da expressão do campo radiado a grande distância por um dipolo elementar de comprimento dz' isto é, $d\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{\beta \mathbf{I}(z')}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin\theta dz'$ em que R foi substituído pelas aproximações de campo distante dadas por (2-95). Substituindo (2-99) em (2-88), obtém-se:

$$\mathbf{E}_\theta = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\mathbf{E}_\theta(z') \cong j\eta \frac{\beta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') e^{+j\beta z' \cos\theta} dz' \right] \quad (2-100)$$

Como foi dito, o campo $\vec{\mathbf{E}}$ foi calculado pela sobreposição dos campos produzidos por dipolos elementares, colocados ao longo do dipolo entre $-l/2$ e $l/2$, cada um com a corrente local $\mathbf{I}(z')$. A expressão (2-100) evidencia este facto pois é composta pelo produto de dois fatores, em que o primeiro é essencialmente o campo produzido por um dipolo elementar situado na origem do sistema de coordenadas e o segundo, dado pelo integral, representa o modo como os dipolos elementares estão dispostos entre $-l/2$ e $l/2$, assim como o seu peso relativo representado pela corrente $\mathbf{I}(z')$. O primeiro fator, por estar associado ao elemento base usado, é designado fator de elemento e o segundo, por depender do modo como os elementos estão espacialmente dispostos, é designado fator espacial. Veremos mais tarde quando estudarmos agregados de antenas que esta situação também se verifica.

Substituindo $\mathbf{I}(z')$ dado por (2-87) em (2-100), obtém-se:

$$\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{I_0 \beta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \left[\int_{-\frac{l}{2}}^0 \sin \left[\beta \left(\frac{l}{2} + z' \right) \right] e^{+j\beta z' \cos\theta} dz' + \int_0^{\frac{l}{2}} \sin \left[\beta \left(\frac{l}{2} - z' \right) \right] e^{+j\beta z' \cos\theta} dz' \right] \quad (2-101)$$

Os integrais que aparecem nesta expressão são do tipo $\int e^{\alpha x} \sin(\gamma x + \delta)$, cuja solução é $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \gamma^2} [\alpha \sin(\gamma x + \delta) - \gamma \cos(\gamma x + \delta)]$. Aplicando esta fórmula com as devidas substituições, obtém-se

$$\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos \left(\frac{\beta l}{2} \cos\theta \right) - \cos \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\sin\theta} \right] \quad (2-102)$$

Quando se estudou o dipolo elementar viu-se pela relação (2-70) que no campo distante $\frac{\mathbf{E}_\theta}{\mathbf{H}_\phi} = \eta$. Portanto também aqui se verifica essa relação pelo que:

$$\mathbf{H}_\phi \cong j \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos \left(\frac{\beta l}{2} \cos\theta \right) - \cos \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\sin\theta} \right] \quad (2-103)$$

As equações (2-102) e (2-103) são as expressões do campo eletromagnético, na região de campo distante, radiado por um dipolo de comprimento l , alinhado segundo o eixo dos zz e considerado derivado duma linha de transmissão bifilar terminada em circuito aberto, tendo portanto uma distribuição de corrente dada por (2-87).

2.5.2 Densidade de potência, intensidade de radiação e diagrama de radiação

Conhecendo as expressões do campo radiado a grande distância por um dipolo, é possível determinar a expressão da densidade de potência média radiada, que é dada por:

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \hat{r} S_{\text{rad}} = \frac{1}{2} R_e (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} R_e \left(\hat{\theta} E_{\theta} \times \hat{\phi} \frac{E_{\theta}^*}{\eta} \right) = \hat{r} \frac{1}{2} \left(\frac{|E_{\theta}|^2}{\eta} \right) \quad (2-104)$$

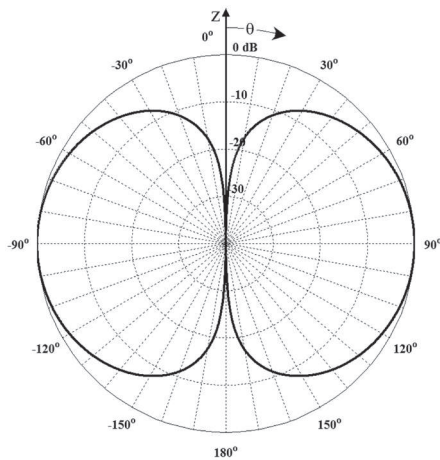
Substituindo (2-102) em (2-104), obtém-se:

$$S_{\text{rad}} = \frac{1}{2\eta} |E_{\theta}|^2 = \eta \frac{I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (2-105)$$

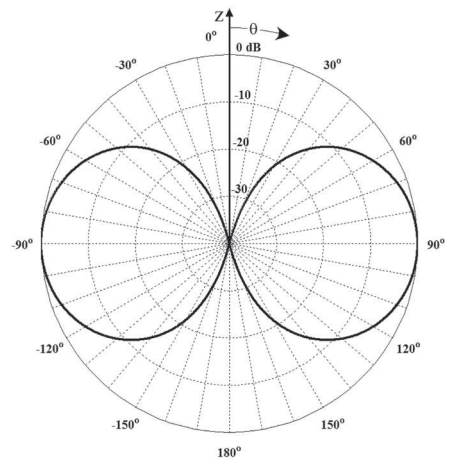
Atendendo à definição de intensidade de radiação teremos então:

$$U(\theta) = r^2 S_{\text{rad}} = \eta \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (2-106)$$

Como se pode ver por esta expressão, U não depende do ângulo ϕ . Isto significa que o diagrama de radiação dum dipolo é de revolução em torno do seu eixo, que neste caso é o eixo dos zz . O diagrama de radiação pode ser visualizado pela representação gráfica da função (2-106). Como exemplos, na Figura 2.14 estão representados os diagramas de radiação de quatro dipolos.



(a) - $l = 0.5\lambda$



(b) - $l = 1\lambda$

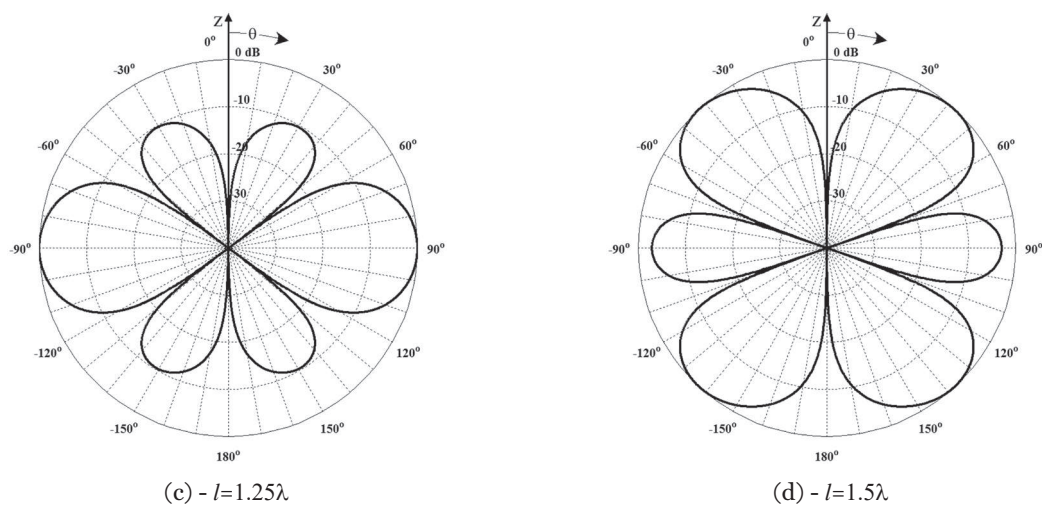


Figura 2.14 Diagramas de radiação de dipolos com diferentes comprimentos.

Os diagramas de radiação de dipolos com comprimento $l \leq \lambda$ têm todos a mesma forma, apresentando apenas um lobo na direção perpendicular ao eixo do dipolo. Para $l > \lambda$, o diagrama já tem lobos secundários, isto é, há direções de radiação nula entre $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$. Isto deve-se ao facto de que para dipolos com estes comprimentos a corrente ao longo deles sofrer inversões de fase, como se viu pela Figura 2.9. Isto significa que há direções segundo as quais as contribuições dos diversos elementos do dipolo se vão adicionar numa forma destrutiva dando origem a nulos nessas direções.

Os diagramas de radiação de dipolos com comprimento $l \leq \lambda$ têm apenas um lobo na direção perpendicular ao eixo do dipolo. Quanto mais comprido for o dipolo mais estreito é o lobo, isto é, mais pequena é a LFMP, como se pode ver pela Figura 2.15 e pela Tabela 2-2.

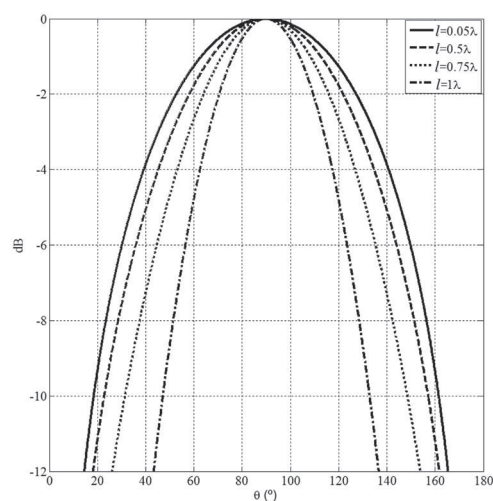


Figura 2.15 Comparação dos diagramas de radiação de quatro dipolos com comprimento $l \leq \lambda$.

Comprimento do dipolo (λ)	LFMP (Graus)
0.05	90
0.5	78
0.75	64
1	48

Tabela 2-2 Larguras de feixe a meia potência de quatro dipolos com comprimento $l \leq \lambda$

2.5.3 Potência radiada e resistência de radiação

A potência radiada por um dipolo pode-se obter integrando a densidade de potência dada por (2-105), isto é:

$$P_{\text{rad}} = \oint_S \vec{S}_{\text{rad}} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_{\text{rad}} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2-107)$$

Ou ainda:

$$P_{\text{rad}} = \eta \frac{I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\left[\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right) \right]^2}{\sin\theta} d\theta \quad (2-108)$$

Pode-se mostrar [4],[5], que a expressão (2-108) pode ser simplificada e apresentada da forma indicada em (2-109)

$$P_{\text{rad}} = \eta \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ C + \ln(\beta l) - C_i(\beta l) + \frac{1}{2} \sin(\beta l) [S_i(2\beta l) - 2S_i(\beta l)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos(\beta l) \left[C + \ln\left(\frac{\beta l}{2}\right) + C_i(2\beta l) - 2C_i(\beta l) \right] \right\} \quad (2-109)$$

em que $C=0.5772$ é a constante de Euler e $C_i(x)$ e $S_i(x)$, são respetivamente o cosseno e o seno integrais definidos como:

$$C_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos\alpha}{\alpha} d\alpha \quad \text{e} \quad S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

A resistência de radiação pode-se definir como a resistência que percorrida pela máxima corrente que existe no dipolo, dissipa uma potência igual à potência radiada. Desta relação obtém-se então a expressão (2-110).

$$R_r = \frac{2 P_{\text{rad}}}{I_0^2} \quad (2-110)$$

Substituindo nesta relação P_{rad} por (2-109), obtém-se:

$$R_r = \frac{\eta}{2\pi} \left\{ C + \ln(\beta l) - C_i(\beta l) + \frac{1}{2} \sin(\beta l) [S_i(2\beta l) - 2S_i(\beta l)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos(\beta l) \left[C + \ln\left(\frac{\beta l}{2}\right) + C_i(2\beta l) - 2C_i(\beta l) \right] \right\} \quad (2-111)$$

A resistência R_r dum dipolo de comprimento l pode ser obtida calculando P_{rad} numericamente a partir da equação (2-108) ou diretamente pela expressão (2-111) a partir dos valores de $C_i(x)$ e $S_i(x)$ tabelados ou calculados numericamente.

Se o máximo da corrente no dipolo ocorrer à entrada, então a resistência de radiação coincide com a resistência de entrada R_{in} . Isto verifica-se nos dipolos com comprimento inferior ou igual a $\frac{1}{2}\lambda$. Para dipolos mais compridos, isto deixa de se verificar.

Considerando que não há perdas, a potência à entrada P_{in} é igual à potência radiada P_{rad} pelo que se tem

$$\frac{1}{2} R_{\text{in}} I_n^2 = \frac{1}{2} R_r I_0^2.$$

Desta identidade resulta então que a resistência de entrada se pode obter da resistência de radiação pela expressão:

$$R_n = \left[\frac{I_0}{I_n} \right]^2 R_r \quad (2-112)$$

Como se pode ver a partir de (2-87), a corrente à entrada, isto é, para $z'=0$ é $I_n = I_0 \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)$, substituindo esta expressão em (2-112) obtém-se:

$$R_n = \frac{R_r}{\sin^2\left(\frac{\beta l}{2}\right)} \quad (2-113)$$

Na Figura 2.16 estão representadas a resistência de radiação e a resistência de entrada de dipolos com comprimentos até 3λ , distribuição de corrente sinusoidal, e colocados em espaço livre, ou seja $\eta=120\pi$. Os valores de R_r foram obtidos a partir de P_{rad} que foi calculada por integração numérica da expressão (2-108).

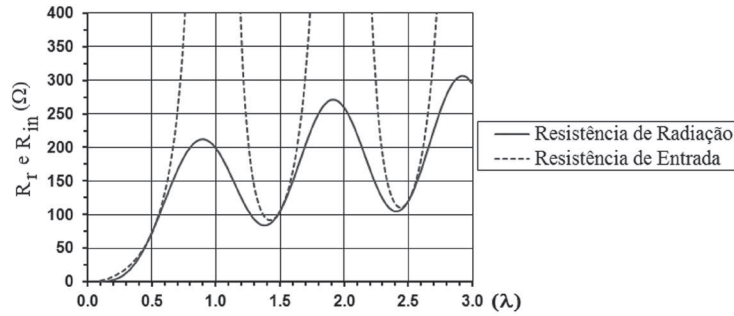


Figura 2.16 Resistência de radiação e resistência de entrada de dipolos com distribuição de corrente sinusoidal.

Como se pode ver pela Figura 2.16 a resistência de entrada é infinita para dipolos cujo comprimento é um múltiplo de λ . Na prática esta resistência é elevada, mas não infinita. As razões para esta diferença são o diâmetro não nulo do fio e o espaço que necessariamente tem que haver na prática para se alimentar o dipolo, as quais dão origem a uma distribuição de corrente que já não é a distribuição sinusoidal usada na obtenção da expressão (2-111) e por consequência a expressão (2-113).

A resistência de entrada é a parte real da impedância de entrada, a qual apresenta também uma parte reativa. A impedância de entrada de dipolos muito finos, isto é, aqueles cujos raios são muito mais pequenos do que o comprimento, pode ser calculada por métodos analíticos. No entanto para calcular a impedância de entrada de dipolos com diâmetro finito é necessário recorrer a métodos numéricos. Voltaremos a este assunto num próximo capítulo.

2.5.4 Diretividade

A diretividade dum dipolo pode-se obter recorrendo à respetiva definição, isto é:

$$D = 4\pi \frac{U_{max}}{P_{rad}} \quad (2-114)$$

U_{max} é o máximo da intensidade de radiação dada por (2-106) e P_{rad} é dada por (2-109).

A diretividade também pode ser expressa em função da resistência de radiação, tendo em conta que

$$P_{rad} = \frac{1}{2} R_r I_0^2$$

Escrevendo $U(\theta) = U_0 F(\theta)$, com $U_0 = \eta \frac{I_0^2}{8\pi^2}$ e $F(\theta) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin \theta} \right]^2$, e substituindo estas relações em (2-114), obtém-se:

$$D = 4\pi\eta \frac{I_0^2}{8\pi^2} \frac{F(\theta)_{\max}}{\frac{1}{2} R_r I_0^2} \quad (2-115)$$

Após algumas simplificações (2-115) pode-se escrever como:

$$D = \frac{120}{R_r} F(\theta)_{\max} = \frac{120}{R_r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin \theta} \right]_{\max}^2 \quad (2-116)$$

Calculando os valores de D para dipolos com diversos comprimentos pode-se obter a variação deste parâmetro com o comprimento do dipolo. Na Figura 2.17 está representada a diretividade de dipolos com comprimentos até 3λ , distribuição de corrente sinusoidal, e colocados em espaço livre. Para comparação na mesma figura está representada a diretividade segundo a direção $\theta=90^\circ$, isto é, segundo a direção perpendicular ao dipolo.

Como se pode ver para dipolos de comprimento até 1.45λ as duas diretividades coincidem porque a direção de máxima radiação ocorre na perpendicular ao dipolo. Para dipolos mais compridos a direção de máximo deixa de ser essa pois o diagrama de radiação passa a ter vários lobos.

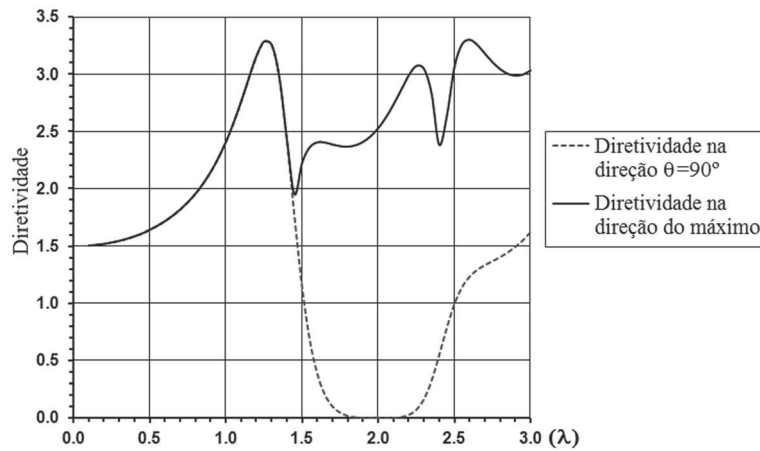


Figura 2.17 Diretividade de dipolos com distribuição de corrente sinusoidal.

Como se pode ver pela Figura 2.17 a diretividade cresce com o comprimento do dipolo até ao valor de 3.28 que corresponde a um dipolo com 1.25λ de comprimento. Analisando exclusivamente este parâmetro, seria de concluir que o dipolo mais aconselhável deveria ser este. Contudo, analisando também a Figura 2.16, vê-se que a resistência de radiação e sobretudo a resistência de entrada, assumem valores que não tornam fácil a alimentação do dipolo. Veremos ainda oportunamente quando se estudar a impedância de entrada dum dipolo que, os dipolos com comprimentos próximos de 0.5λ são ressonantes, isto é, apresentam impedâncias de entrada puramente reais e iguais à resistência de radiação. Esta razão, combinada com o facto de um comprimento de 0.5λ corresponder em geral a uma dimensão física aceitável, faz com que este seja um dipolo muito vulgarizado. Por este facto este dipolo merece ser destacado.

2.5.5 Caso particular importante: Dipolo de meio comprimento de onda

Para a zona de campo distante que é a mais relevante, as expressões do campo eletromagnético radiado por um dipolo de meio comprimento de onda podem ser obtidas das expressões (2-102) e (2-103), substituindo l por $\lambda/2$, obtendo-se:

$$\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] \quad (2-117)$$

e

$$\mathbf{H}_\phi \cong j \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] \quad (2-118)$$

Do mesmo modo a intensidade de radiação pode-se obter a partir de (2-106), sendo dada por:

$$U(\theta) = \eta \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 \quad (2-119)$$

A potência radiada é obtida de (2-109), que após a substituição de βl por π dá:

$$P_{\text{rad}} = \eta \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ C + \ln(\pi) - C_i(\pi) + \frac{1}{2} \cos(\pi) \left[C - \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_i(2\pi) - 2C_i(\pi) \right] \right\} \quad (2-120)$$

Fazendo as devidas simplificações, obtém-se:

$$P_{\text{rad}} = \eta \frac{I_0^2}{8\pi} [C + \ln(2\pi) - C_i(2\pi)] = \eta \frac{I_0^2}{8\pi} 2.435 \quad (2-121)$$

A resistência de radiação, que neste caso coincide com a resistência de entrada, é:

$$R_r = \frac{2P_{\text{rad}}}{I_0^2} = \frac{\eta}{4\pi} 2.435 = \frac{120\pi}{4\pi} 2.435 \approx 73 \Omega \quad (2-122)$$

Como neste caso o máximo da corrente coincide com a corrente de entrada, pode-se dizer que a resistência de entrada é igual à resistência de radiação. Veremos mais tarde que a parte reativa da impedância de entrada dum dipolo de meia onda é indutiva e vale 42.5Ω , pelo que a impedância de entrada deste dipolo é:

$$Z_{\text{in}} \approx 73 + j42.5 \Omega \quad (2-123)$$

A diretividade pode-se obter a partir da definição (2-114), que após as devidas substituições dá:

$$D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = 4\pi \frac{U|_{\theta=\pi/2}}{P_{\text{rad}}} = 4\pi \frac{\eta \frac{I_0^2}{8\pi^2}}{\eta \frac{I_0^2}{8\pi} 2.435} = \frac{4}{2.435} \approx 1.64 \quad (2-124)$$

A partir da diretividade obtém-se a área efetiva que é então:

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{\lambda^2}{4\pi} 1.64 \approx 0.13 \lambda^2 \quad (2-125)$$

2.5.6 Dipolos alinhados segundo um eixo genérico

Por conveniência de cálculos, nas secções anteriores considerou-se sempre os dipolos orientados segundo o eixo dos zz. No entanto, por vezes é conveniente considerar os dipolos orientados segundo outros eixos.

Nas expressões obtidas para os campos radiados por um dipolo orientado segundo o eixo dos zz, aparece explicitamente o ângulo θ , que não é mais do que o ângulo entre o eixo do dipolo e a direcção de observação. Então, numa forma geral, dever-se-á substituir, nessas expressões o ângulo θ pelo ângulo γ , que representa o ângulo entre o eixo do dipolo que se está a considerar e a direcção de observação. As expressões assim obtidas dão a amplitude dos campos, os quais em geral terão componentes segundo θ e ϕ .

As componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ podem-se obter a partir do vetor potencial magnético $\vec{A}$. Esta dedução é relativamente fácil se apenas se pretender as expressões para o campo distante. De facto, nesta região podem-se desprezar, no desenvolvimento da expressão (2-36), todos os termos que variam com $1/r^n$ face aos que variam com $1/r$. Esta simplificação faz com que a expressão (2-36) se reduza à relação:

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} \quad (2-126)$$

Como também se sabe que no campo distante a onda radiada é TEM, isto é, não tem componente radial, então a expressão (2-126), só se aplica às componentes em θ e ϕ .

Isto pode ser verificado por exemplo para o dipolo elementar, comparando as expressões de $\vec{A}$ e de $\vec{E}$, respetivamente (2-53) e (2-69), atendendo a que $\omega\mu = \beta\eta$.

Como no campo distante os vetores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são ortogonais entre si e ambos perpendiculares à direcção radial, isso significa que só têm componentes segundo θ e ϕ . O vetor densidade de potência $\vec{S}$, dado por (2-127), só tem, portanto, componente segundo r .

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} [(\hat{\theta} E_\theta + \hat{\phi} E_\phi) \times (\hat{\theta} H_\theta^* + \hat{\phi} H_\phi^*)] = \hat{r} \frac{1}{2} (E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \quad (2-127)$$

Por outro lado, também se sabe que no campo distante os vetores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ além de serem ortogonais entre si, as suas normas obedecem à condição $|\vec{H}| = \frac{|\vec{E}|}{\eta}$, pelo que a norma do vetor $\vec{S}$ pode ser expressa como:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{E}| |\vec{H}^*| = \frac{1}{2} |\vec{E}| \left| \frac{\vec{E}^*}{\eta} \right| = \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}|^2}{\eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{|E_\theta|^2}{\eta} + \frac{|E_\phi|^2}{\eta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{E}_\theta \vec{E}_\theta^*}{\eta} + \frac{\vec{E}_\phi \vec{E}_\phi^*}{\eta} \right) \quad (2-128)$$

Equacionando as expressões (2-127) e (2-128), facilmente se verifica que, para serem iguais, é necessário que se verifiquem as seguintes relações:

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta} \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_\theta = -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} \quad (2-129)$$

Em conclusão, no campo distante as componentes do campo elétrico podem ser obtidas pela relação (2-126) e as componentes do campo magnético a partir destas últimas, pelas relações (2-129).

2.5.6.1 Dipolo orientado segundo o eixo dos xx

Este caso particular importante é representado pela geometria indicada na Figura 2.18.

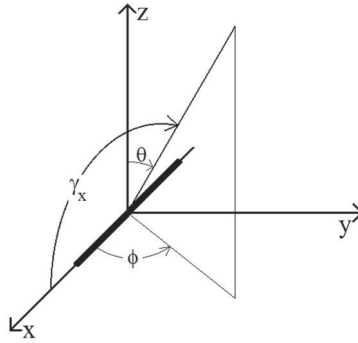


Figura 2.18 Geometria indicada para um dipolo orientado segundo o eixo dos xx.

Considerando que o dipolo está colocado simetricamente ao longo do eixo dos xx, a distribuição de corrente é dada pela seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{I}}(\mathbf{x}') = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} I_0 \text{sen} \left[\beta \left(\frac{l}{2} + x' \right) \right] & -\frac{l}{2} \leq x' \leq 0 \\ \hat{\mathbf{x}} I_0 \text{sen} \left[\beta \left(\frac{l}{2} - x' \right) \right] & 0 \leq x' \leq \frac{l}{2} \end{cases} \quad (2-130)$$

em que I_0 é a máxima amplitude que ocorre ao longo do dipolo.

No campo distante o vetor potencial magnético é dado pela expressão

$$\bar{\mathbf{A}}(x, y, z) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \bar{\mathbf{I}}(\mathbf{x}') e^{j\beta \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}'} d\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \bar{\mathbf{I}}(\mathbf{x}') e^{j\beta x' \cos \gamma_x} d\mathbf{x}' \quad (2-131)$$

em que o cosseno do ângulo γ_x é dado por:

$$\cos \gamma_x = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \text{sen} \theta \cos \phi \quad (2-132)$$

Substituindo (2-130) em (2-131), obtém-se para o vetor $\bar{\mathbf{A}}$ a expressão:

$$\bar{\mathbf{A}}(x, y, z) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu I_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{2}{\beta} \frac{\cos \left(\frac{\beta l}{2} \cos \gamma_x \right) - \cos \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\text{sen}^2 \gamma_x} \quad (2-133)$$

Em coordenadas esféricas o vetor $\vec{\mathbf{A}}$ tem as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r &= \mathbf{A}_x \sin\theta \cos\phi \\ \mathbf{A}_\theta &= \mathbf{A}_x \cos\theta \cos\phi \\ \mathbf{A}_\phi &= -\mathbf{A}_x \sin\phi \end{aligned} \quad (2-134)$$

A partir destas expressões e de acordo com as conclusões da secção anterior obtém-se para o vetor $\vec{\mathbf{E}}$ as seguintes componentes:

$$\mathbf{E}_\theta = -j\omega\mathbf{A}_\theta = -j\omega \frac{\mu\mathbf{I}_0}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{1}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos\gamma_x\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin^2\gamma_x} \cos\theta \cos\phi \quad (2-135)$$

e

$$\mathbf{E}_\phi = -j\omega\mathbf{A}_\phi = j\omega \frac{\mu\mathbf{I}_0}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{1}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos\gamma_x\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin^2\gamma_x} \sin\phi \quad (2-136)$$

As componentes do vetor $\vec{\mathbf{H}}$ podem ser obtidas a partir destas pela aplicação das relações (2-129).

A norma do vetor $\vec{\mathbf{E}}$ é dada por $|\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2$. Substituindo (2-135) e (2-136) nesta última expressão obtém-se, após algumas simplificações, a amplitude do campo elétrico dada por (2-137), em função de θ e ϕ .

$$|\mathbf{E}| \cong \eta \frac{\mathbf{I}_0}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \sin\theta \cos\phi\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi}} \right] \quad (2-137)$$

Como quando o dipolo está alinhado segundo o eixo dos zz , o campo radiado só tem a componente segundo θ , a amplitude do vetor é igual à amplitude dessa componente e portanto a expressão (2-137) também poderia ter sido obtida diretamente da expressão (2-102) substituindo $\cos\theta$ por $\cos\gamma_x = \sin\theta \cos\phi$ e $\sin\theta$ por $\sin\gamma_x = \sqrt{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi}$.

2.5.6.2 Dipolo orientado segundo o eixo dos yy

Este é outro caso particular importante e está representado pela geometria indicada na Figura 2.19:

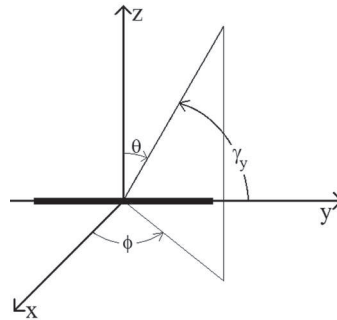


Figura 2.19 Geometria indicada para um dipolo orientado segundo o eixo dos yy .

À semelhança do caso anterior, no campo distante o vetor potencial magnético é dado pela expressão:

$$\vec{A}(x, y, z) = \hat{y} \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \mathbf{I}(y') e^{j\beta \hat{r} \cdot y' \hat{y}} dy' = \hat{y} \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \mathbf{I}(y') e^{j\beta y' \cos \gamma_y} dy' \quad (2-138)$$

em que o cosseno do ângulo γ_y é dado por:

$$\cos \gamma_y = \hat{y} \cdot \hat{r} = \sin \theta \sin \phi \quad (2-139)$$

Substituindo em (2-138), a corrente $\mathbf{I}(y')$ por uma expressão semelhante a (2-130) obtém-se para o vetor $\vec{A}$ a expressão:

$$\vec{A}(x, y, z) = \hat{y} \frac{\mu I_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{2}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos \gamma_y\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin^2 \gamma_y} \quad (2-140)$$

em que I_0 é a máxima amplitude que ocorre ao longo do dipolo.

Em coordenadas esféricas o vetor $\vec{A}$ tem as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} A_r &= A_y \sin \theta \sin \phi \\ A_\theta &= A_y \cos \theta \sin \phi \\ A_\phi &= A_y \cos \phi \end{aligned} \quad (2-141)$$

A partir destas expressões e à semelhança do caso anterior, obtém-se para o vetor $\vec{E}$ as seguintes componentes:

$$\mathbf{E}_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega \frac{\mu I_0}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{1}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos \gamma_y\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin^2 \gamma_y} \cos \theta \sin \phi \quad (2-142)$$

e,

$$\mathbf{E}_\phi = -j\omega A_\phi = -j\omega \frac{\mu I_0}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{1}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos \gamma_y\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin^2 \gamma_y} \cos \phi \quad (2-143)$$

As componentes do vetor $\vec{H}$ podem ser obtidas a partir destas pela aplicação das relações (2-129).

A amplitude do vetor $\vec{E}$ é dada por $|\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2$. Substituindo (2-142) e (2-143) nesta última expressão obtém-se, após algumas simplificações, a amplitude do campo elétrico dada por (2-144), em função de θ e ϕ .

$$|\mathbf{E}| \cong \eta \frac{I_0}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \sin \theta \sin \phi\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}} \right] \quad (2-144)$$

Como quando o dipolo está alinhado segundo o eixo dos zz , o campo radiado só tem a componente segundo θ , a amplitude do vetor é igual à amplitude dessa componente e portanto a expressão (2-144) também poderia ter sido obtida diretamente da expressão (2-102) substituindo $\cos \theta$ por $\cos \gamma_y = \sin \theta \sin \phi$ e $\sin \theta$ por $\sin \gamma_y = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}$.

2.6 Dipolos colocados acima dum plano separador de dois meios

Nas secções anteriores considerou-se que os dipolos estavam situados em espaço livre, isto é, sem a presença de quaisquer obstáculos. Na prática, no entanto, há sempre alguns obstáculos mais ou menos próximos dos dipolos. Há sobretudo um que não se pode evitar e que tem importância sobretudo às frequências mais baixas. Trata-se da superfície da Terra. Assumindo que na vizinhança da antena a superfície é plana, pode-se tratar este problema considerando o dipolo acima dum plano separador de dois meios. O ar, onde está o dipolo, caracterizado por μ_0 , ϵ_0 e $\sigma=0$ e a Terra (no sentido lato) caracterizada por μ_r , ϵ_r e σ .

No sentido lato a terra pode ser um solo com determinadas características, água doce, água do mar ou ainda uma superfície muito próxima dum condutor perfeito. Para o solo, a condutividade varia de cerca de 10^{-3} S/m para um solo seco e arenoso, até 10^{-1} S/m para um solo arável e húmido e a permitividade relativa varia de cerca de 2 para um solo seco, até 20 para um solo húmido. Para a água doce, a condutividade é cerca de 10^{-2} S/m e a permitividade relativa cerca de 80. Para a água do mar, a condutividade é cerca de 4 S/m e a permitividade relativa cerca de 80. É importante notar que estes valores se devem tomar apenas como indicativos já que podem variar consideravelmente com a composição exata do meio, com a frequência, a temperatura e outras variáveis.

As características e o desempenho dum dipolo colocado nesta situação dependem das propriedades do meio e da altura a que o dipolo está da interface. Isto é particularmente notado a frequências para as quais a altura é pequena em comparação com o comprimento de onda.

Para o estudo deste problema utilizaremos o conceito de fonte imagem, pesando devidamente a sua contribuição através dos coeficientes de reflexão que dependem da polarização da onda incidente, do ângulo de incidência e das propriedades dos meios.

2.6.1 Dipolo elementar colocado verticalmente à altura h

Consideremos a situação ilustrada na Figura 2.20 em que se representa um dipolo elementar situado à altura h dum plano de interface entre o ar e um meio caracterizado por μ_0 , ϵ_{r1} e σ_1 . O dipolo está alinhado segundo o eixo z e o plano de interface é o plano xy .

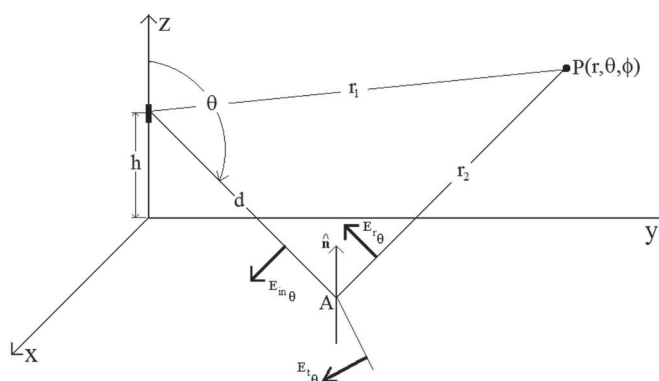


Figura 2.20 Dipolo elementar vertical sobre um plano separador de dois meios.

O observador no ponto P recebe duas contribuições, uma direta através do percurso r_1 e outra indireta que lhe chega através do percurso r_2 depois da reflexão no ponto A. Analisando a reflexão no ponto A, comecemos por definir plano de incidência como o plano definido pela direção de propagação e pela normal ao plano refletor. Como se pode ver pela Figura 2.20, neste caso qualquer plano ϕ é um plano de incidência. Quando o vetor campo elétrico $\vec{E}$ é paralelo ao plano de incidência diz-se que há polarização paralela. Quando o vetor campo elétrico $\vec{E}$ é perpendicular ao plano de incidência diz-se que há polarização perpendicular. Como neste caso o campo elétrico emitido pelo dipolo, isto é, o campo incidente só tem componente θ e está, portanto, situado nesse plano, a polarização é paralela, tal como está representado na Figura 2.21.

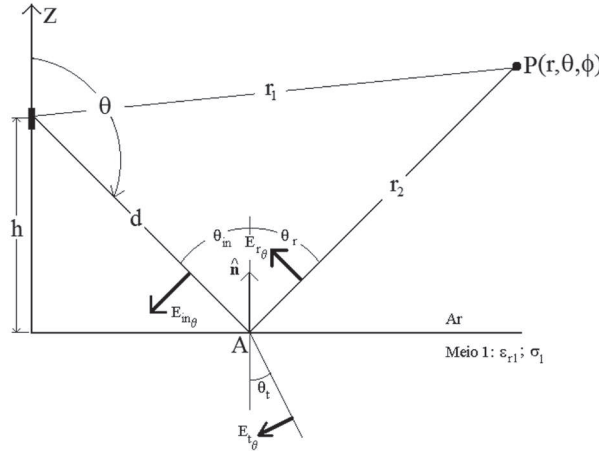


Figura 2.21 Plano de incidência para o caso dum dipolo elementar colocado verticalmente sobre um plano separador de dois meios.

O campo incidente $E_{in\theta}$ no ponto A, proveniente do dipolo é dado por:

$$E_{in\theta} = j\eta_0 \frac{\beta_0 I l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 d}}{d} \sin \theta \quad (2-145)$$

Passando para coordenadas retangulares, obtém-se:

$$\begin{aligned} E_{n\ x} &= E_{n\ \theta} \cos \theta \cos \phi \\ E_{n\ y} &= E_{n\ \theta} \cos \theta \sin \phi \\ E_{n\ z} &= -E_{n\ \theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (2-146)$$

De acordo com as orientações dos campos adotadas nas figuras anteriores, vê-se que as componentes de $E_{r\theta}$ segundo x e segundo y têm a mesma orientação das componentes de $E_{in\theta}$ segundo x e segundo y e que, a componente de $E_{r\theta}$ segundo z tem orientação oposta da componente de $E_{in\theta}$ segundo z.

As componentes de $E_{r\theta}$ em coordenadas retangulares são, portanto, as seguintes:

$$\begin{aligned} E_{r\ x} &= E_{r\ \theta} \cos \theta \cos \phi \\ E_{r\ y} &= E_{r\ \theta} \cos \theta \sin \phi \\ E_{r\ z} &= E_{r\ \theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (2-147)$$

Para determinar o campo refletido em função do campo incidente, deve-se aplicar as condições fronteira que impõem a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético na interface. Ainda de acordo com as orientações dos campos adotadas nas figuras anteriores, a aplicação destas condições faz com

que o campo refletido $\mathbf{E}_{r\theta}$ seja igual ao campo $\mathbf{E}_{in\theta}$ multiplicado pelo coeficiente de reflexão $\Gamma_{\parallel}$. Tendo em conta esta relação, obtém-se então:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{rx} &= \Gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{n\theta} \cos \theta \cos \phi \\ \mathbf{E}_{ry} &= \Gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{n\theta} \cos \theta \sin \phi \\ \mathbf{E}_{rz} &= \Gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{n\theta} \sin \theta\end{aligned}\tag{2-148}$$

em que $\Gamma_{\parallel}$ é definido por (2-149) tal como se mostra em [6].

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-\eta_0 \cos \theta_n + \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_0 \cos \theta_n + \eta_1 \cos \theta_t}\tag{2-149}$$

em que $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ é a impedância intrínseca do ar e $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{1ef}}}$ é a impedância intrínseca do meio 1, sendo ϵ_{1ef} a permitividade efetiva do meio 1 dada por $\epsilon_{1ef} = \epsilon_1 - j \frac{\sigma_1}{\omega}$.

É possível eliminar o ângulo θ_t na expressão (2-149) recorrendo à lei de Snell, que é expressa pela relação $\frac{\sin \theta_n}{\sin \theta_t} = \frac{v_{p0}}{v_{p1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{1ef}}{\epsilon_0}}$. A partir desta relação, facilmente se obtém a expressão (2-150) para o cosseno do ângulo θ_t .

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{\omega \epsilon_0}{\epsilon_1 \omega - j \sigma_1} \sin^2 \theta_n}\tag{2-150}$$

Substituindo (2-150) em (2-149), obtém-se, após algumas simplificações, a seguinte expressão alternativa para $\Gamma_{\parallel}$:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-\epsilon_{1efr} \cos \theta_n + \sqrt{\epsilon_{1efr} - \sin^2 \theta_n}}{\epsilon_{1efr} \cos \theta_n + \sqrt{\epsilon_{1efr} - \sin^2 \theta_n}}\tag{2-151}$$

em que ϵ_{1efr} é a permitividade efetiva relativa do meio 1 dada por $\epsilon_{1efr} = \epsilon_{1r} - j \frac{\sigma_1}{\omega \epsilon_0}$.

Consideremos agora que se tem um dipolo idêntico ao anterior, mas colocado do lado de baixo do plano de interface à distância h , tal como se indica na Figura 2.22.

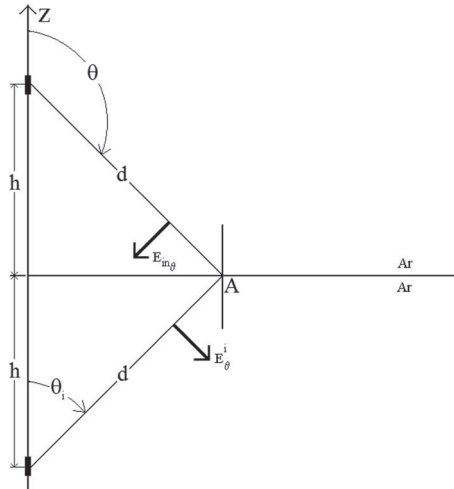


Figura 2.22 Dipolo elementar vertical e respetivo dipolo imagem.

Consideremos ainda que o meio onde está situado é o mesmo em que está colocado o dipolo original. Pode-se então dizer que este dipolo é uma imagem do dipolo que está acima do plano de interface.

Se o dipolo imagem for alimentado com uma corrente $(-\Gamma_{\parallel})I$, o campo elétrico por ele produzido é dado por:

$$\mathbf{E}_{\theta}^i = j\eta_0 \frac{\beta_0 (-\Gamma_{\parallel}) I l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 d}}{d} \sin \theta_i \quad (2-152)$$

Como $\theta_i = 180 - \theta$, $\sin \theta_i = \sin \theta$, pelo que $\mathbf{E}_{\theta}^i = (-\Gamma_{\parallel}) \mathbf{E}_{n\theta}$. Passando para coordenadas retangulares, temos:

$$\mathbf{E}_x^i = \mathbf{E}_{\theta}^i \cos \theta_i \cos \phi$$

$$\mathbf{E}_y^i = \mathbf{E}_{\theta}^i \cos \theta_i \sin \phi$$

$$\mathbf{E}_z^i = -\mathbf{E}_{\theta}^i \sin \theta_i$$

Atendendo a que $\cos \theta_i = -\cos \theta$, e que $\mathbf{E}_{\theta}^i = (-\Gamma_{\parallel}) \mathbf{E}_{n\theta}$, obtém-se:

$$\mathbf{E}_x^i = \Gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{n\theta} \cos \theta \cos \phi$$

$$\mathbf{E}_y^i = \Gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{n\theta} \cos \theta \sin \phi \quad (2-153)$$

$$\mathbf{E}_z^i = \Gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{n\theta} \sin \theta$$

Comparando as equações (2-148) e (2-153), verifica-se que o campo refletido no ponto A do plano de interface é idêntico ao que seria produzido por um dipolo imagem desde que alimentado por uma corrente $I' = (-\Gamma_{\parallel})I$, em que $\Gamma_{\parallel}$ é dado pela expressão (2-151). Isto significa que a situação representada na Figura 2.20 pode ser substituída pela situação equivalente, ilustrada na Figura 2.23, em que se tem dois dipolos situados no mesmo meio homogêneo e isotrópico separados por uma distância $2h$. Nesta figura considera-se o caso do campo distante, por ser o mais relevante.

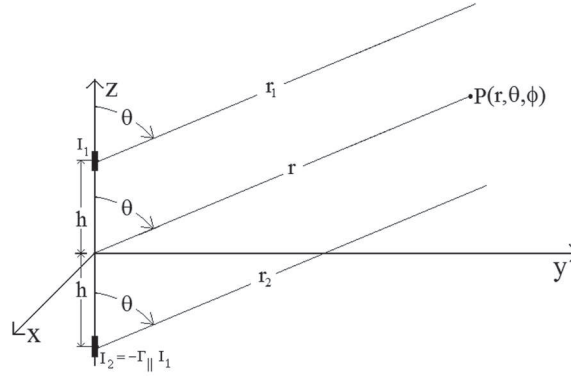


Figura 2.23 Geometria equivalente para o caso dum dipolo elementar vertical sobre um plano separador de dois meios, com coeficiente de reflexão $\Gamma_{\parallel}$. Situação de campo distante.

Tendo em conta esta figura, vê-se que ao ponto P chegam duas contribuições, a proveniente do dipolo original, aqui designado por dipolo 1 e a proveniente do dipolo imagem, designado por dipolo 2. Estas contribuições são respetivamente:

$$\mathbf{E}_{1\theta} = j\eta_0 \frac{\beta_0 I_1 l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 r_1}}{r_1} \sin \theta \quad (2-154)$$

e

$$\mathbf{E}_{2\theta} = j\eta_0 \frac{\beta_0 (-\Gamma_{\parallel}) I_1 l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 r_2}}{r_2} \sin \theta \quad (2-155)$$

O campo total é a soma dos campos E_{10} e E_{20} . Atendendo que para o campo distante se tem: $r_1 \approx r - h \cos \theta$ e $r_2 \approx r + h \cos \theta$, no expoente e $r_1 \approx r_2 \approx r$ no denominador, o campo total é dado pela expressão:

$$E_\theta = E_{10} + E_{20} = j\eta_0 \frac{\beta_0 I_1}{4\pi r} e^{-j\beta_0 r} \sin \theta \left[e^{j\beta_0 h \cos \theta} - \Gamma_{||} e^{-j\beta_0 h \cos \theta} \right] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (2-156)$$

$$E_\theta = 0 \quad \theta > 90^\circ$$

O campo considera-se nulo para $\theta > 90^\circ$, isto é, abaixo do plano de interface porque com o sistema representado na Figura 2.23 pretende-se modelar a situação representada na Figura 2.20, em que essencialmente se pretende obter o campo no ar, onde está o dipolo, tendo em conta a reflexão no plano. Além disso, em geral o campo elétrico é também muito pequeno dentro do meio 1.

Como se pode ver pela equação (2-156) o campo radiado depende do meio 1 através do respetivo coeficiente de reflexão. Vejamos este coeficiente para alguns casos particulares. Na Figura 2.24 estão representadas a amplitude e a fase do coeficiente de reflexão $\Gamma_{||}$, para diversas frequências, em função do ângulo de incidência numa terra plana caracterizada por $\sigma = 12 \times 10^{-3} \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 15$. Na Figura 2.25 estão representadas a amplitude e a fase do coeficiente de reflexão $\Gamma_{||}$, para diversas frequências, em função do ângulo de incidência na água do mar caracterizada por $\sigma = 4 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 81$.

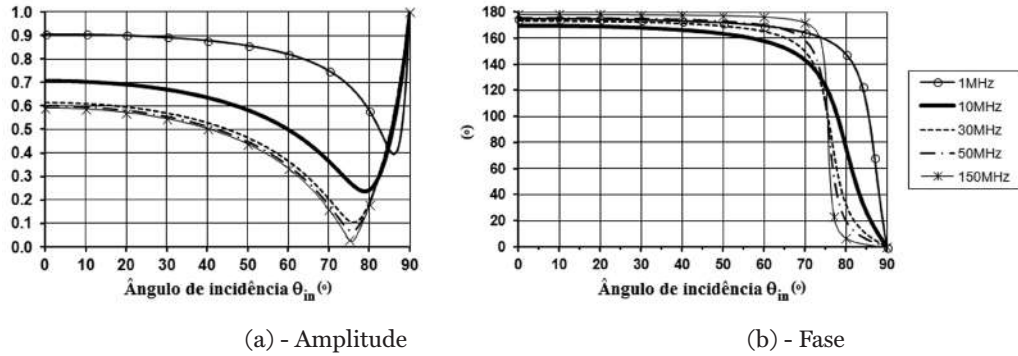


Figura 2.24 Amplitude e fase do coeficiente de reflexão $\Gamma_{||}$, para diversas frequências, em função do ângulo de incidência numa terra plana caracterizada por $\sigma = 12 \times 10^{-3} \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 15$.

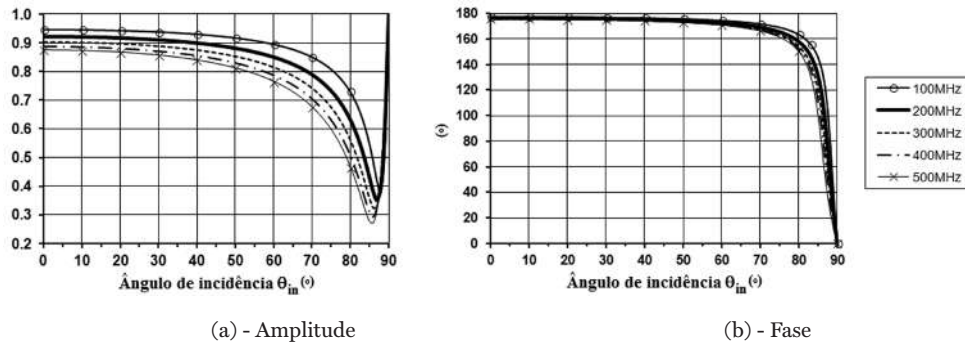


Figura 2.25 Amplitude e fase do coeficiente de reflexão $\Gamma_{||}$, para diversas frequências em função do ângulo de incidência na água do mar caracterizada por $\sigma = 4 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 81$.

Outro caso particular importante é quando o meio 1 é um bom condutor. Embora o caso ideal fosse um plano de extensão infinita e condutor perfeito, há casos que se podem considerar uma boa aproximação. Isso acontece quando a antena está colocada, a pouca altura, sobre uma placa ou uma rede metálica de dimensões

maiores do que a antena. Como exemplos, temos o caso duma antena montada num tejadilho dum carro ou quando na terra debaixo da antena se coloca uma rede metálica.

Para que o meio 1 se possa considerar bom condutor devem-se verificar as condições $\sigma_1 \gg \omega \epsilon_1$ e $\sigma_1 \gg \omega \epsilon_0$. Esta condição tem como consequência, tal como se pode ver pela relação (2-150), que θ_i tende para 0 quanto mais condutor for o meio 1. Tomando isto em consideração, a relação (2-149) pode-se escrever como:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-\eta_0 \cos \theta_{in} + \eta_1}{\eta_0 \cos \theta_{in} + \eta_1} = \frac{-\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right) \cos \theta_{in} + 1}{\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right) \cos \theta_{in} + 1} \quad (2-157)$$

As condições $\sigma_1 \gg \omega \epsilon_1$ e $\sigma_1 \gg \omega \epsilon_0$ têm ainda como consequência que $\eta_1 \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma_1}}$, o que implica que $\frac{\eta_0}{\eta_1} \approx \sqrt{\frac{\sigma_1}{j\omega\epsilon_0}} > 1$.

Como $|\cos \theta_{in}|$ é limitado a 1, conclui-se então que para um meio muito bom condutor o coeficiente de reflexão $\Gamma_{\parallel} \cong -1$. Então, para o caso dum dipolo colocado verticalmente, à altura h , sobre um plano condutor perfeito o campo radiado é dado pela expressão (2-158).

$$\mathbf{E}_{\theta} = j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I}_1 l}{4\pi r} \sin \theta \left[e^{j\beta_0 h \cos \theta} + e^{-j\beta_0 h \cos \theta} \right] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (2-158)$$

$$\mathbf{E}_{\theta} = 0 \quad \theta > 90^\circ$$

Que se pode ainda escrever da forma indicada em (2-159).

$$\mathbf{E}_{\theta} = j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I}_1 l}{4\pi r} \sin \theta \left[2 \cos(\beta_0 h \cos \theta) \right] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (2-159)$$

$$\mathbf{E}_{\theta} = 0 \quad \theta > 90^\circ$$

Como já foi mencionado, o campo radiado por um dipolo colocado verticalmente à altura h da interface entre o ar e um dado meio, depende desse meio através do respetivo coeficiente de reflexão na interface. Para ilustrar essa dependência, na Figura 2.26 estão representados os diagramas de radiação dum dipolo elementar, colocado verticalmente à altura de 0.25λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz.

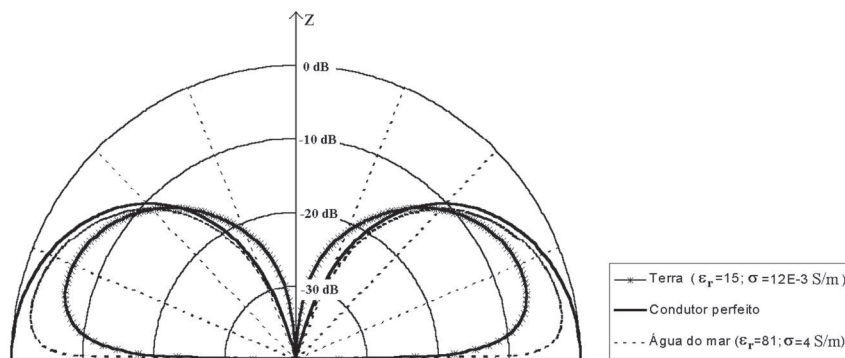


Figura 2.26 Diagramas de radiação dum dipolo elementar, colocado verticalmente à altura de 0.25λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz.

Desta figura nota-se que há algumas diferenças entre os diagramas de radiação, sendo a mais significativa a de o campo máximo não ocorrer para $\theta=90^\circ$, se o meio não for um bom condutor, ao contrário do que acontece se o dipolo estiver acima dum plano condutor perfeito.

Como o campo radiado por um dipolo colocado verticalmente à altura h da interface entre o ar e um dado meio, depende desse meio e da altura h , isso tem como consequência que a potência radiada, a resistência de radiação e a diretividade também variem com esses parâmetros. A partir da expressão do campo radiado dada por (2-159), pode-se obter a intensidade de radiação. Como para $\theta > 90^\circ$ esta grandeza é nula, a potência radiada determina-se integrando a intensidade de radiação apenas sobre o hemisfério superior.

Na Figura 2.27 estão representadas a resistência de radiação e a diretividade dum dipolo elementar, com comprimento $1/50\lambda$, em função da altura a que está colocado verticalmente sobre um plano condutor perfeito (PCP). A resistência de radiação e a diretividade foram obtidas a partir do valor da potência radiada que por sua vez foi obtida por integração numérica da intensidade de radiação.

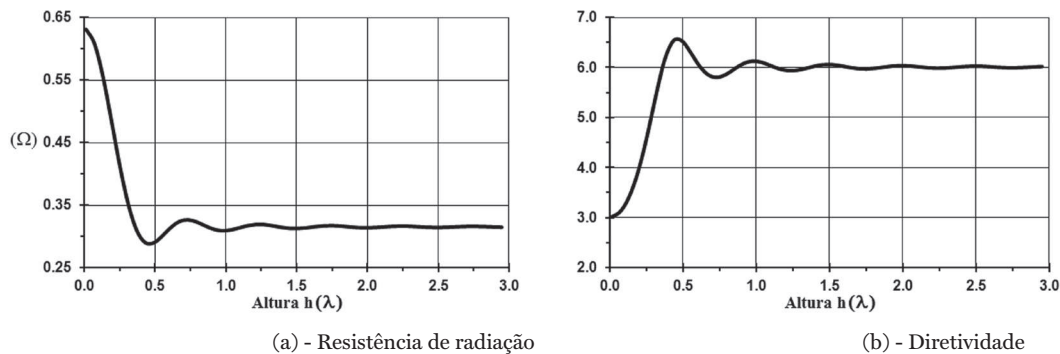


Figura 2.27 Resistência de radiação e diretividade dum dipolo elementar, com comprimento $1/50\lambda$, em função da altura a que está colocado verticalmente sobre um plano condutor perfeito.

Vimos na secção 2.2.2 que a resistência de radiação dum dipolo elementar isolado é dada pela relação (2-63), isto é, $R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$ pelo que a resistência de radiação dum dipolo com $l=1/50\lambda$ é igual a 0.316Ω .

Vê-se então da Figura 2.27 (a) que quando o dipolo está muito próximo do PCP a resistência de radiação é o dobro da do dipolo isolado e que, à medida que o dipolo se afasta do PCP, a resistência de radiação tende para a resistência de radiação do dipolo isolado. A resistência de radiação oscila com o valor de h , sendo as oscilações mais significativas entre $h=0$ e $h=\lambda$. O valor de R_r atinge o mínimo $R_r=0.291\Omega$ para $h=0.49\lambda$.

Vimos também na secção 2.2.4 que a diretividade dum dipolo elementar isolado é dada pela relação (2-73) e que é $D=1.5$. Vê-se agora da Figura 2.27 (b) que quando o dipolo está muito próximo do PCP que a diretividade é o dobro da do dipolo isolado e que, à medida que o dipolo se afasta do PCP, a diretividade tende para quatro vezes do valor da diretividade do dipolo isolado. A diretividade oscila com o valor de h , sendo as oscilações mais significativas entre $h=0$ e $h=\lambda$, atingindo o máximo $D=6.52$ para $h=0.49\lambda$.

É de notar que a diretividade máxima, ou simplesmente diretividade, ocorre para $\theta=90^\circ$, independentemente da altura h , que é a direção segundo a qual o campo radiado é o dobro do campo produzido por um dipolo isolado. Daqui decorre que a intensidade de radiação é quatro vezes a intensidade de radiação produzida por um dipolo isolado. Como, quando $h \rightarrow \infty$ a potência radiada tende para a potência radiada por um dipolo isolado, então pela definição de diretividade resulta que a diretividade tende para quatro vezes do valor da diretividade do dipolo isolado.

Até agora nesta secção analisou-se o caso dum dipolo elementar colocado verticalmente sobre a interface entre o ar e outro meio. As conclusões obtidas podem-se generalizar a dipolos de outros comprimentos. Como exemplo, na Figura 2.28 estão representados os diagramas de radiação dum dipolo de meia onda, colocado verticalmente à altura de 0.5λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz.

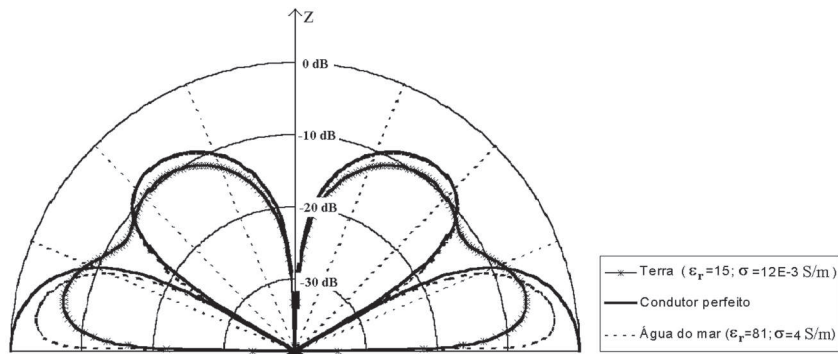


Figura 2.28 Diagramas de radiação dum dipolo de meia onda, colocado verticalmente à altura de 0.5λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz.

Também por esta figura se nota que há algumas diferenças entre os diagramas de radiação. As mais significativas são: o campo máximo não ocorre para $\theta=90^\circ$, se o meio não for um bom condutor, ao contrário do que acontece se o dipolo estiver acima dum plano condutor perfeito; o mínimo intermédio é muito menos pronunciado se o meio não for um bom condutor.

Ainda para ilustrar que as conclusões obtidas para o dipolo elementar podem-se generalizar a dipolos de outros comprimentos, na Figura 2.29 estão representadas a resistência de radiação e a diretividade dum dipolo de meia onda, em função da altura a que está colocado verticalmente sobre um plano condutor perfeito (PCP).

Vimos na secção 2.5.5 que a resistência de radiação dum dipolo de meia onda isolado é dada pela relação (2-122), isto é, $R_r=73\Omega$. Vê-se então da Figura 2.29 (a) que quando o dipolo está muito próximo do PCP a resistência de radiação se aproxima do dobro da do dipolo isolado e que, à medida que o dipolo se afasta do PCP, a resistência de radiação tende para a resistência de radiação do dipolo isolado. A resistência de radiação oscila com o valor de h , sendo as oscilações mais significativas entre $h=0.25$ e $h=1.5\lambda$. O valor de R_r atinge o mínimo $R_r=69\Omega$ para $h=0.5\lambda$.

Vimos também na secção 2.5.5 que a diretividade dum dipolo de meia onda isolado é dada pela relação (2-124), e que é $D=1.64$. Vê-se agora da Figura 2.29 (b) que quando o dipolo está muito próximo do PCP a diretividade se aproxima do dobro da do dipolo isolado e que, à medida que o dipolo se afasta do PCP, a diretividade tende para quatro vezes do valor da diretividade do dipolo isolado. A diretividade oscila com o valor de h , sendo as oscilações mais significativas entre $h=0.25$ e $h=1.5\lambda$, atingindo o máximo $D=6.95$ para $h=0.5\lambda$.

Tal como no caso do dipolo elementar, também neste caso é de notar que a diretividade máxima, ou simplesmente diretividade, ocorre para $\theta=90^\circ$, independentemente da altura h , que é a direção segundo a qual o campo radiado é o dobro do campo produzido por um dipolo de meia onda isolado. Daqui decorre que a intensidade de radiação é quatro vezes a intensidade de radiação produzida por um dipolo isolado. Como, quando $h \rightarrow \infty$ a potência radiada tende para a potência radiada por um dipolo isolado então, pela definição de diretividade, resulta que a diretividade tende para quatro vezes do valor da diretividade do dipolo isolado.

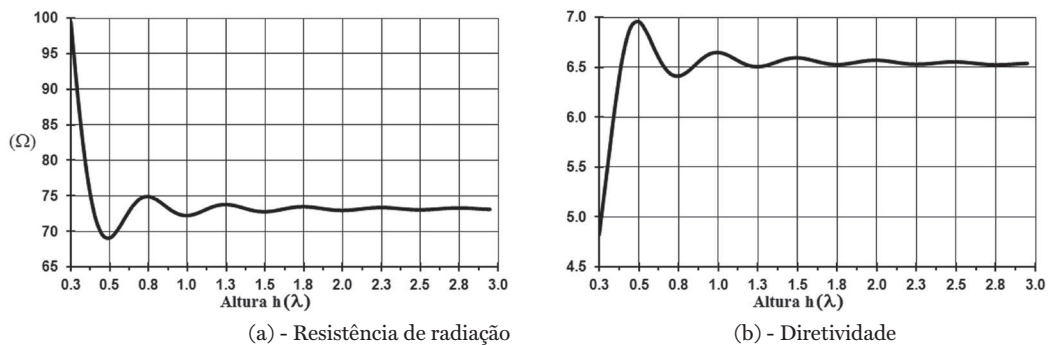


Figura 2.29 Resistência de radiação e diretividade dum dipolo de meia onda, em função da altura a que está colocado verticalmente sobre um plano condutor perfeito.

2.6.1.1 Monopolo

Um monopolo é um troço de fio, de comprimento l , colocado verticalmente sobre um plano condutor perfeito e alimentado entre a sua base e o plano, tal como se indica na Figura 2.30 (a). Pela teoria das imagens o monopolo pode ser modelado por um dipolo equivalente de comprimento $2l$, situado em espaço livre, tal como se indica na Figura 2.30 (c). Convém, no entanto, notar que este modelo equivalente dá o campo produzido pelo monopolo desde que se imponha a condição do campo radiado ser nulo para $\theta > 90^\circ$.

Na Figura 2.31 estão ilustradas duas configurações usadas na prática na construção de monopolos para VHF e UHF.

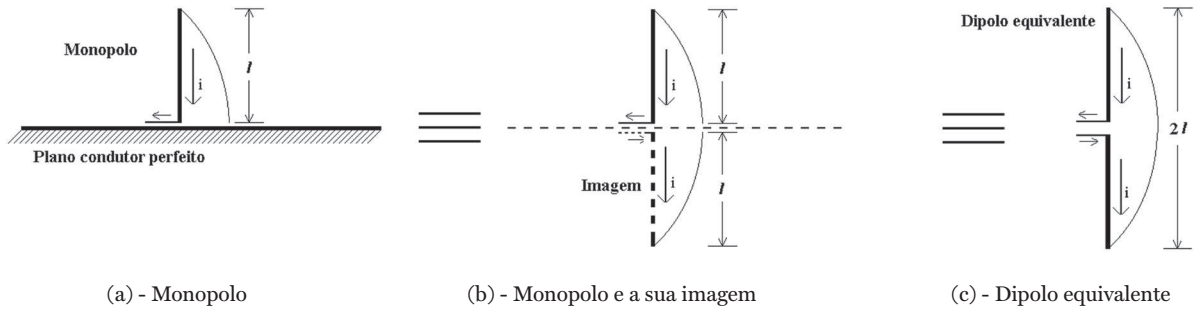


Figura 2.30 Monopolo e respetivo modelo equivalente.

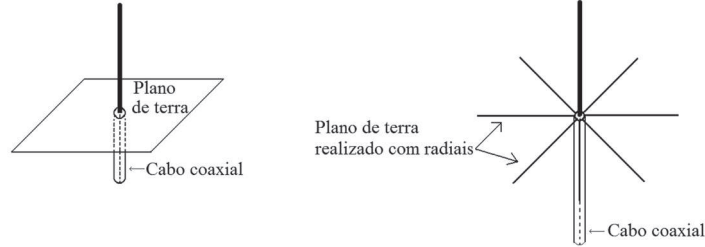


Figura 2.31 Realizações práticas de monopolos para altas frequências (VHF e UHF).

As características dum monopolo podem-se obter a partir das características do dipolo equivalente. Afetemos as grandezas respeitantes ao monopolo pelo sobreíndice M e as correspondentes às do dipolo equivalente pelo sobreíndice D_{eq}. Podemos então estabelecer as seguintes relações:

$$E_{\theta}^M = E_{\theta}^{D_{eq}} \Rightarrow S_{\theta}^M = S_{\theta}^{D_{eq}} \Rightarrow U_{\theta}^M = U_{\theta}^{D_{eq}} \text{ para } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

Para $\theta > 90^\circ$ todas estas grandezas são nulas, isto significa que para determinar a potência radiada se integra a intensidade de radiação apenas sobre o hemisfério superior.

$$\text{Tendo em conta estas considerações, pode-se escrever } P_r^M = \frac{1}{2} P_r^{D_{eq}}.$$

Isto implica então que a resistência de radiação dum monopolo com comprimento l é metade da resistência de radiação do dipolo equivalente com comprimento $2l$, tal como se indica em (2-160).

$$R_r^M = \frac{1}{2} R_r^{D_{eq}} \quad (2-160)$$

Pela definição de diretividade temos:

$$D^M = 4\pi \frac{U_{\max}^M}{P_r^M} = 4\pi \frac{U_{\max}^{D_{eq}}}{\frac{1}{2}P_r^{D_{eq}}} = 2 \left(4\pi \frac{U_{\max}^{D_{eq}}}{P_r^{D_{eq}}} \right) = 2D^{D_{eq}} \quad (2-161)$$

O que significa que a diretividade dum monopolo com comprimento l é o dobro da diretividade do dipolo equivalente com comprimento $2l$, tal como se indica em (2-161).

Um dos monopolos mais usados, sobretudo nas bandas de VHF e UHF, é o monopolo de $\frac{1}{4}\lambda$. Para este caso temos então que a resistência de radiação é:

$$R_r^{M(\frac{1}{4}\lambda)} = \frac{1}{2}R_r^{D(\frac{1}{2}\lambda)} = \frac{1}{2}73 = 36.5\Omega \quad (2-162)$$

Como neste caso o máximo da corrente coincide com a corrente à entrada, numa forma mais geral podemos dizer que:

$$Z_n^{M(\frac{1}{4}\lambda)} = \frac{1}{2}Z_n^{D(\frac{1}{2}\lambda)} = \frac{1}{2}(73 + j42.5)\Omega = 36.5 + j21.3\Omega \quad (2-163)$$

2.6.2 Dipolo elementar colocado horizontalmente à altura h

Consideremos a situação ilustrada na Figura 2.32 em que se representa um dipolo elementar situado à altura h dum plano de interface entre o ar e um meio caracterizado por μ_0 , ϵ_{r1} e σ_1 . O dipolo está alinhado segundo o eixo dos yy e o plano de interface é o plano xy .

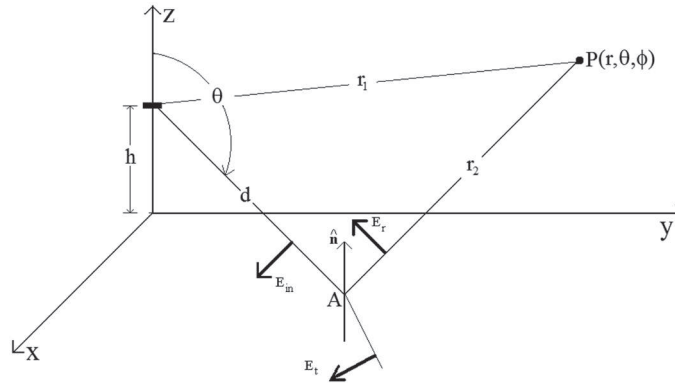


Figura 2.32 Dipolo elementar horizontal sobre um plano separador de dois meios.

Neste caso e para um ponto genérico A, a polarização é uma combinação de duas polarizações, uma paralela e outra perpendicular. Para facilitar a análise consideremos apenas os dois planos principais $\phi=0^\circ$ e $\phi=90^\circ$.

Como se pode observar na Figura 2.33, no plano de incidência $\phi=0^\circ$, o campo $\vec{E}$ está orientado segundo o eixo dos yy , isto é, perpendicular ao plano de incidência e, portanto, a polarização é perpendicular. No plano $\phi=90^\circ$, o campo $\vec{E}$ está no plano de incidência e, portanto, a polarização é paralela.

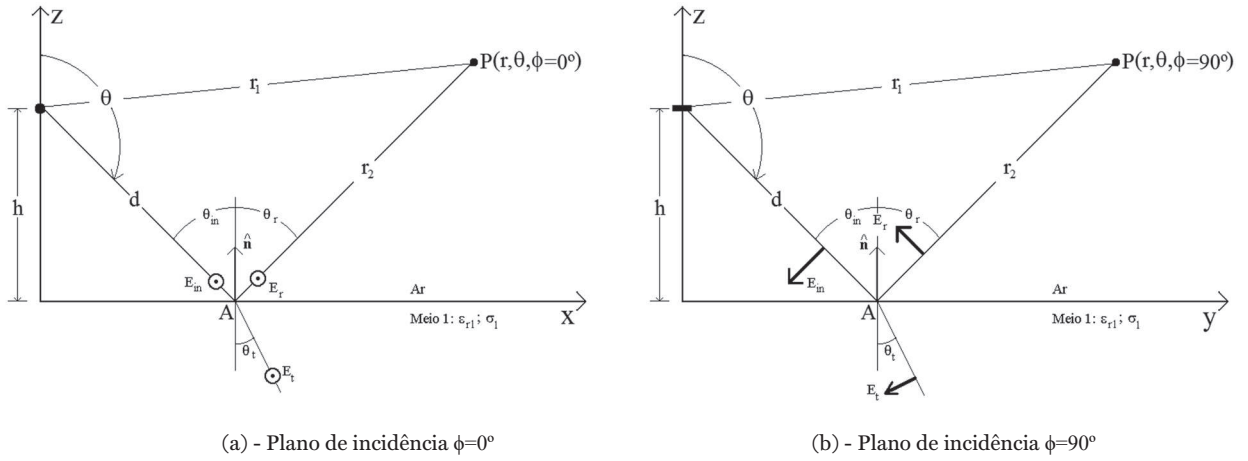


Figura 2.33 Planos principais de incidência para o caso dum dipolo elementar colocado horizontalmente sobre um plano separador de dois meios.

O campo radiado pelo dipolo é dado por:

$$\mathbf{E}_n = j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I} l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 d}}{d} \sin \gamma_y \quad (2-164)$$

em que $\sin \gamma_y = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}$.

No plano de incidência $\phi=0^\circ$ o campo elétrico só tem componente ϕ que é dada por:

$$\mathbf{E}_{n\phi} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I} l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 d}}{d} \quad (2-165)$$

Isto significa que neste caso só existe uma componente tangencial e nenhuma perpendicular. Tal como no caso do dipolo vertical, para determinar o campo refletido em função do campo incidente, deve-se aplicar as condições fronteira que impõem a continuidade da componente tangencial do campo elétrico na interface. Então, a componente tangencial do campo $\mathbf{E}_r$ refletido em A obtém-se, multiplicando a componente tangencial de $\mathbf{E}_{in}$ pelo coeficiente de reflexão perpendicular $\Gamma_\perp$. Aplicando esta condição obtém-se então:

$$\mathbf{E}_{r\phi} = \Gamma_\perp \mathbf{E}_{in\phi} \quad (2-166)$$

Com $\Gamma_\perp$ definido por:

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_1 \cos \theta_n - \eta_0 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_n + \eta_0 \cos \theta_t} \quad (2-167)$$

Ou por:

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos \theta_n - \sqrt{\epsilon_{\text{lef } r} - \sin^2 \theta_n}}{\cos \theta_n + \sqrt{\epsilon_{\text{lef } r} - \sin^2 \theta_n}} \quad (2-168)$$

Consideremos agora que se tem um dipolo idêntico ao anterior, mas colocado do lado de baixo do plano de interface à distância h , tal como se indica na Figura 2.34.

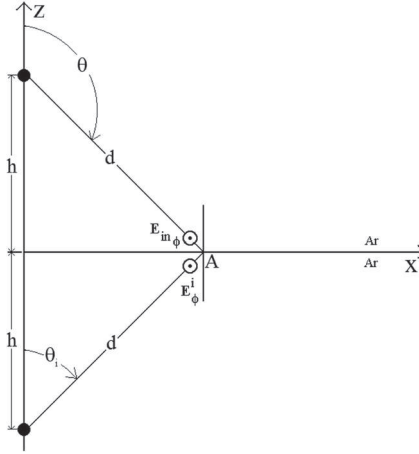


Figura 2.34 Dipolo elementar horizontal e respectivo dipolo imagem no plano de incidência $\phi=0^\circ$.

Consideremos ainda que o meio onde está situado é o mesmo em que está colocado o dipolo original. Pode-se então dizer que este dipolo é uma imagem do dipolo que está acima do plano de interface.

Se o dipolo imagem for alimentado com uma corrente $\Gamma_\perp \mathbf{I}$, o campo elétrico por ele produzido é dado por:

$$\mathbf{E}_\phi^i = -j\eta_0 \frac{\beta_0 \Gamma_\perp \mathbf{I} l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 d}}{d} = \Gamma_\perp \mathbf{E}_{in\phi} \quad (2-169)$$

Comparando as equações (2-169) e (2-166), verifica-se que o campo refletido no ponto A do plano de interface é idêntico ao que seria produzido por um dipolo imagem desde que alimentado por uma corrente $\mathbf{I}' = \Gamma_\perp \mathbf{I}$, em que $\Gamma_\perp$ é dado pela expressão (2-168). Isto significa que a situação representada na Figura 2.33 (a) pode ser substituída pela situação equivalente, ilustrada na Figura 2.35, em que se tem dois dipolos situados no mesmo meio homogêneo e isotrópico separados por uma distância $2h$. Nesta figura considera-se o caso do campo distante, por ser o mais relevante.

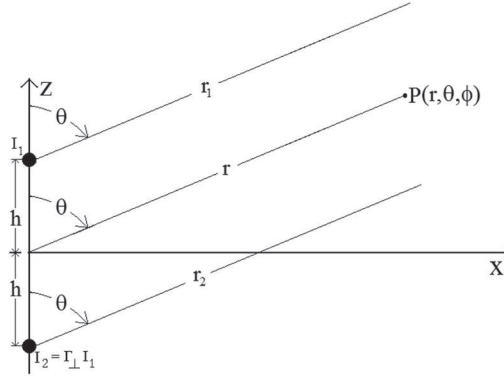


Figura 2.35 Geometria equivalente, no plano $\phi=0^\circ$, para o caso dum dipolo elementar alinhado segundo o eixo dos yy e colocado horizontalmente sobre um plano separador de dois meios, com coeficiente de reflexão $\Gamma_\perp$. Situação de campo distante.

Tendo em conta esta figura, vê-se que ao ponto P chegam duas contribuições, a proveniente do dipolo original, aqui designado por dipolo 1 e a proveniente do dipolo imagem, designado por dipolo 2. Estas contribuições são respetivamente:

$$\mathbf{E}_{1\phi} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I}_1 l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 r_1}}{r_1} \quad (2-170)$$

e

$$\mathbf{E}_{2\phi} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 (\Gamma_\perp) \mathbf{I}_1 l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 r_2}}{r_2} \quad (2-171)$$

O campo total é a soma dos campos $E_{1\phi}$ e $E_{2\phi}$. Atendendo que para o campo distante se tem: $r_1 \approx r - h \cos \theta$ e $r_2 \approx r + h \cos \theta$ no expoente e $r_1 \approx r_2 \approx r$ no denominador, o campo total é dado pela expressão:

$$E_{\phi} = E_{1\phi} + E_{2\phi} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 I l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} \left[e^{j\beta_0 h \cos \theta} + \Gamma_{\perp} e^{-j\beta_0 h \cos \theta} \right] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (2-172)$$

$$E_{\phi} = 0 \quad \theta > 90^\circ$$

O campo considera-se nulo para $\theta > 90^\circ$, isto é, abaixo do plano de interface porque com o sistema representado na Figura 2.35 pretende-se modelar a situação representada na Figura 2.33 (a), em que essencialmente se pretende obter o campo no ar, onde está o dipolo, tendo em conta a reflexão no plano. Além disso, em geral o campo elétrico é também muito pequeno dentro do meio 1.

Como se pode ver pela equação (2-172) o campo radiado depende do meio 1 através do respetivo coeficiente de reflexão. Vejamos este coeficiente para alguns casos particulares. Na Figura 2.36 estão representadas a amplitude e a fase do coeficiente de reflexão $\Gamma_{\perp}$, para diversas frequências, em função do ângulo de incidência numa terra plana caracterizada por $\sigma = 12 \times 10^{-3} \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 15$. Na Figura 2.37 estão representadas a amplitude e a fase do coeficiente de reflexão $\Gamma_{\perp}$, para diversas frequências, em função do ângulo de incidência na água do mar caracterizada por $\sigma = 4 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 81$.

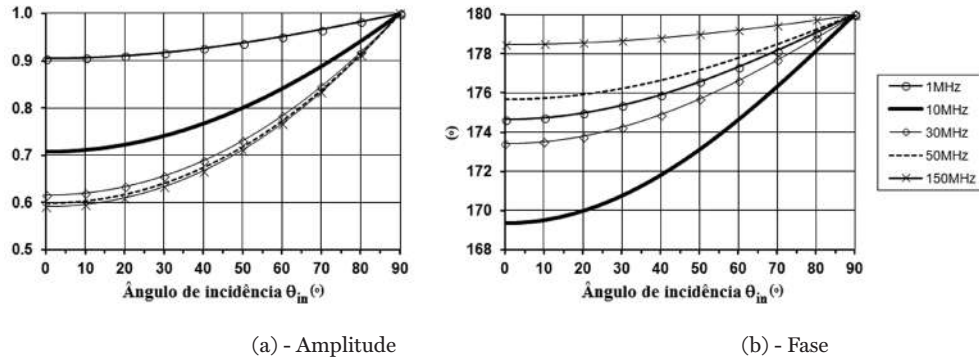


Figura 2.36 Amplitude e fase do coeficiente de reflexão $\Gamma_{\perp}$, para diversas frequências, em função do ângulo de incidência numa terra plana caracterizada por $\sigma = 12 \times 10^{-3} \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 15$.

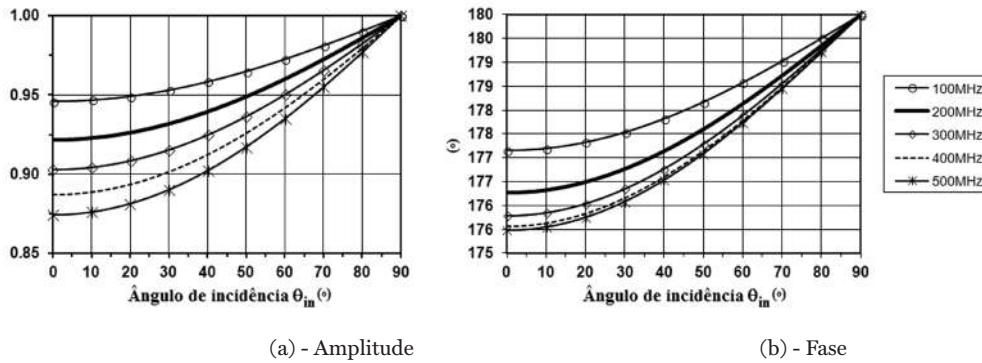


Figura 2.37 Amplitude e fase do coeficiente de reflexão $\Gamma_{\perp}$, para diversas frequências, em função do ângulo de incidência na água do mar caracterizada por $\sigma = 4 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 81$.

No plano de incidência $\phi = 90^\circ$, tal como se pode ver pela Figura 2.33 (b), o campo elétrico só tem componente θ que é dada por:

$$E_{in\theta} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 I l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 d}}{d} \cos \theta \quad (2-173)$$

Passando para coordenadas retangulares, obtém-se:

$$\mathbf{E}_{inx} = 0$$

$$\mathbf{E}_{iny} = \mathbf{E}_{in\theta} \cos \theta \quad (2-174)$$

$$\mathbf{E}_{inz} = -\mathbf{E}_{in\theta} \sin \theta$$

De acordo com as orientações dos campos adotadas na Figura 2.33, vê-se que a componente de $\mathbf{E}_{r\theta}$ segundo y tem a mesma orientação da componente de $\mathbf{E}_{in\theta}$ segundo y e que, a componente de $\mathbf{E}_{r\theta}$ segundo z tem orientação oposta da componente de $\mathbf{E}_{in\theta}$ segundo z.

As componentes de $\mathbf{E}_{r\theta}$ em coordenadas retangulares são, portanto, as seguintes:

$$\mathbf{E}_{rx} = 0$$

$$\mathbf{E}_{ry} = \mathbf{E}_{r\theta} \cos \theta \quad (2-175)$$

$$\mathbf{E}_{rz} = \mathbf{E}_{r\theta} \sin \theta$$

Para determinar o campo refletido em função do campo incidente, deve-se aplicar as condições fronteira que impõem a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético na interface. A aplicação destas condições faz com que o campo refletido $\mathbf{E}_{r\theta}$ seja igual ao campo $\mathbf{E}_{in\theta}$ multiplicado pelo coeficiente de reflexão $\Gamma_{\parallel}$ dado pela expressão (2-151). Tendo em conta esta relação, obtém-se então:

$$\mathbf{E}_{rx} = 0$$

$$\mathbf{E}_{ry} = \Gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{in\theta} \cos \theta \quad (2-176)$$

$$\mathbf{E}_{rz} = \Gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{in\theta} \sin \theta$$

Consideremos agora que se tem um dipolo idêntico ao anterior, mas colocado do lado de baixo do plano de interface à distância h, tal como se indica na Figura 2.38.

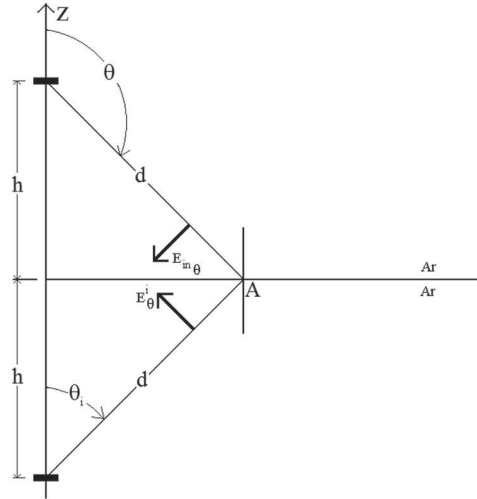


Figura 2.38 Dipolo elementar horizontal e respectivo dipolo imagem no plano de incidência $\phi=90^\circ$.

Consideremos ainda que o meio onde está situado é o mesmo em que está colocado o dipolo original. Pode-se então dizer que este dipolo é uma imagem do dipolo que está acima do plano de interface.

Se o dipolo imagem for alimentado com uma corrente $\Gamma_{\parallel} \mathbf{I}$, o campo elétrico por ele produzido é dado por:

$$\mathbf{E}_{\theta}^i = -j\eta_0 \frac{\beta_0 \Gamma_{\parallel} \mathbf{I} l}{4\pi d} e^{-j\beta_0 d} \cos \theta_i \quad (2-177)$$

Como $\theta_i = 180^\circ - \theta$, $\cos \theta_i = -\cos \theta$, então $\mathbf{E}_\theta^i = (-\Gamma_\parallel) \mathbf{E}_{n\theta}$. Passando para coordenadas retangulares, temos:

$$E_x^i = E_\theta^i \cos \theta_i \cos \phi$$

$$E_y^i = E_\theta^i \cos \theta_i \sin \phi$$

$$E_z^i = -E_\theta^i \sin \theta_i$$

Atendendo a que $\cos \theta_i = -\cos \theta$, e que $\mathbf{E}_\theta^i = (-\Gamma_\parallel) \mathbf{E}_{n\theta}$, obtém-se:

$$E_x^i = \Gamma_\parallel E_{in\theta} \cos \theta \cos \phi$$

$$E_y^i = \Gamma_\parallel E_{in\theta} \cos \theta \sin \phi \quad (2-178)$$

$$E_z^i = \Gamma_\parallel E_{in\theta} \sin \theta$$

Comparando as equações (2-176) e (2-178), verifica-se que o campo refletido no ponto A do plano de interface é idêntico ao que seria produzido por um dipolo imagem desde que alimentado por uma corrente $I^i = \Gamma_\parallel I$, em que $\Gamma_\parallel$ é dado pela expressão (2-151).

Isto significa que a situação representada na Figura 2.33 (b) pode ser substituída pela situação equivalente, ilustrada na Figura 2.39, em que se tem dois dipolos situados no mesmo meio homogêneo e isotrópico separados por uma distância $2h$. Nesta figura considera-se o caso do campo distante, por ser o mais relevante.

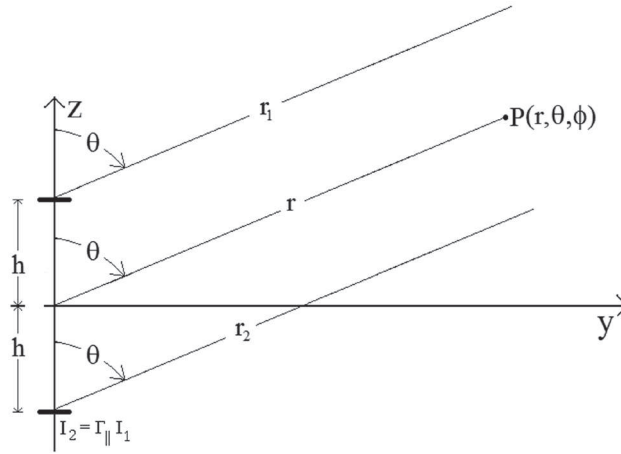


Figura 2.39 Geometria equivalente, no plano $\phi = 90^\circ$, para o caso dum dipolo elementar alinhado segundo o eixo dos yy e colocado horizontalmente sobre um plano separador de dois meios, com coeficiente de reflexão $\Gamma_\parallel$. Situação de campo distante.

Tendo em conta esta figura, vê-se que ao ponto P chegam duas contribuições, a proveniente do dipolo original, aqui designado por dipolo 1 e a proveniente do dipolo imagem, designado por dipolo 2. Estas contribuições são respetivamente:

$$\mathbf{E}_{1\theta} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I}_1 l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 r_1}}{r_1} \cos \theta \quad (2-179)$$

e

$$\mathbf{E}_{2\theta} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 (\Gamma_\parallel) \mathbf{I}_1 l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta_0 r_2}}{r_2} \cos \theta \quad (2-180)$$

O campo total é a soma dos campos $\mathbf{E}_{1\theta}$ e $\mathbf{E}_{2\theta}$. Atendendo que para o campo distante se tem: $r_1 \approx r - h \cos \theta$ e $r_2 \approx r + h \cos \theta$ no expoente e $r_1 \approx r_2 \approx r$ no denominador, o campo total é dado pela expressão:

$$\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_{1\theta} + \mathbf{E}_{2\theta} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I}_1 l}{4\pi r} \cos \theta \left[e^{j\beta_0 h \cos \theta} + \Gamma_{\parallel} e^{-j\beta_0 h \cos \theta} \right] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (2-181)$$

$$\mathbf{E}_\theta = 0 \quad \theta > 90^\circ$$

Já vimos que se o meio 1 for muito bom condutor o coeficiente de reflexão $\Gamma_{\parallel} \cong -1$. Facilmente se conclui que nesse caso também $\Gamma_{\perp} \cong -1$.

Então, para o caso dum dipolo colocado horizontalmente, à altura h , sobre um plano condutor perfeito o campo radiado é dado pela expressão (2-182):

$$\mathbf{E}_{\gamma_y} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I}_1 l}{4\pi r} \sin \gamma_y \left[e^{j\beta_0 h \cos \theta} - e^{-j\beta_0 h \cos \theta} \right] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (2-182)$$

$$\mathbf{E} = 0 \quad \theta > 90^\circ$$

que se pode ainda escrever da forma indicada em (2-183):

$$\mathbf{E}_{\gamma_y} = -j\eta_0 \frac{\beta_0 \mathbf{I}_1 l}{4\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi} \left[2 j \sin(\beta_0 h \cos \theta) \right] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (2-183)$$

$$\mathbf{E} = 0 \quad \theta > 90^\circ$$

Como se pode ver pelas expressões (2-172) e (2-181), o campo radiado por um dipolo colocado horizontalmente à altura h da interface entre o ar e um dado meio, depende desse meio através dos respectivos coeficientes de reflexão na interface. Para ilustrar essa dependência, na Figura 2.40 estão representados os diagramas de radiação, no plano $\phi=90^\circ$, dum dipolo elementar alinhado segundo o eixo dos yy , colocado horizontalmente à altura de 0.25λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz. Nesta situação a polarização é paralela.

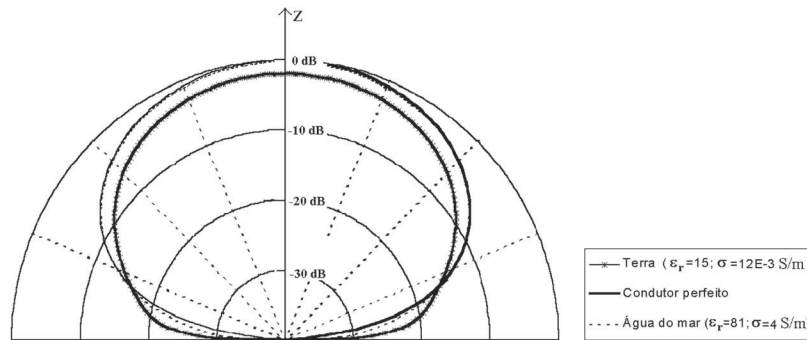


Figura 2.40 Diagramas de radiação, no plano $\phi=90^\circ$, dum dipolo elementar, colocado horizontalmente à altura de 0.25λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz.

Na Figura 2.41 estão representados os diagramas de radiação, no plano $\phi=0^\circ$. Nesta situação a polarização é perpendicular.

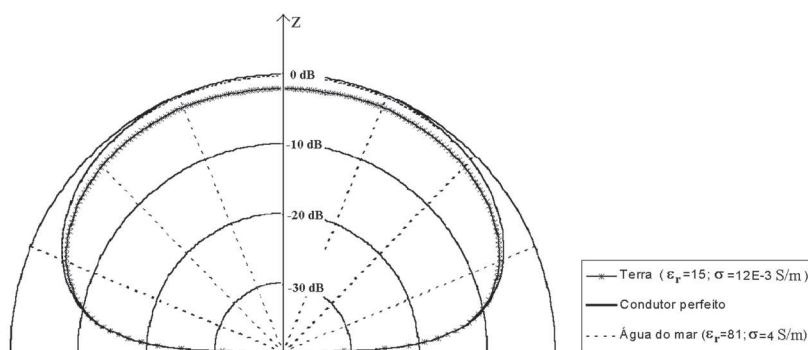


Figura 2.41 Diagramas de radiação, no plano $\phi=0^\circ$, dum dipolo elementar, colocado horizontalmente à altura de 0.25λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz.

Destas figuras nota-se que há algumas diferenças entre os diagramas de radiação, sobretudo no plano $\phi=90^\circ$, no entanto há menos diferenças do que no caso do dipolo vertical. Convém salientar que se a altura h for um múltiplo de $\lambda/2$ verifica-se um mínimo segundo a direção $\theta=0^\circ$, que se torna um nulo no caso dum condutor perfeito.

Como o campo radiado depende do meio e da altura h , isso tem como consequência que a potência radiada, a resistência de radiação e a diretividade também variem com esses parâmetros. Para ilustrar essa dependência, na Figura 2.42 estão representadas a resistência de radiação e a diretividade, segundo a direção $\theta=0^\circ$, dum dipolo elementar, com comprimento $1/50 \lambda$, em função da altura h a que está colocado horizontalmente sobre um plano condutor perfeito (PCP).

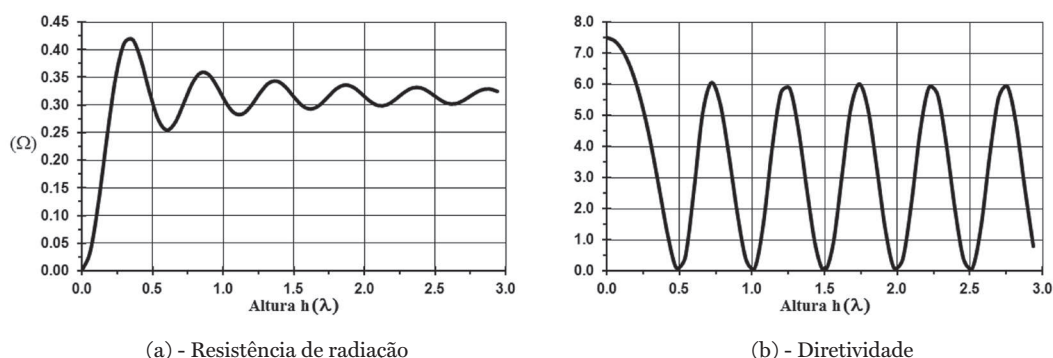


Figura 2.42 Resistência de radiação e diretividade, segundo a direção $\theta=0^\circ$, dum dipolo elementar, com comprimento $1/50\lambda$, em função da altura h a que está colocado horizontalmente sobre um plano condutor perfeito.

Vê-se pela Figura 2.42 (a) que a resistência de radiação oscila com o valor de h . Quando o dipolo está muito próximo do PCP a resistência de radiação é nula pois o dipolo fica curto-circuitado e, portanto, não radia. À medida que o dipolo se afasta do PCP, a resistência de radiação tende para a resistência de radiação do dipolo isolado que, para um dipolo com $l=1/50\lambda$ é igual a 0.316Ω . O valor de R_r atinge o máximo $R_r=0.418\Omega$ para $h=0.36\lambda$.

O caso dum dipolo horizontal à altura h acima dum PCP, é modelado por dois dipolos em oposição de fase separados duma distância $2h$. Isso tem como consequência que se a altura h for um múltiplo de $\lambda/2$ os dipolos do modelo estarão separados duma distância que é múltipla de λ . Então, um observador colocado segundo a direção $\theta=0^\circ$ recebe duas ondas emanadas em oposição de fase e que viajaram distâncias que diferem dum múltiplo de λ . Isso significa que as duas contribuições continuam em oposição de fase pelo que o campo total é nulo, sendo a diretividade, portanto também nula, tal como se pode observar na Figura 2.42 (b).

Na Figura 2.43 estão representadas as diretividades, (segundo a direção de máxima radiação), nos planos $\phi=0^\circ$ e $\phi=90^\circ$. Vê-se por esta figura que a diretividade oscila bastante com o valor de h , tendendo para quatro vezes do valor da diretividade do dipolo isolado à medida que o dipolo se afasta do PCP.

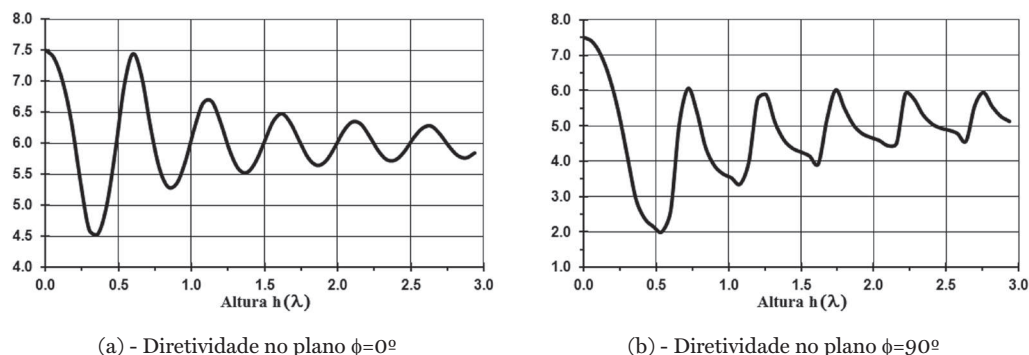


Figura 2.43 Diretividade, nos planos $\phi=0^\circ$ e $\phi=90^\circ$, dum dipolo elementar, com comprimento $1/50\lambda$, em função da altura a que está colocado horizontalmente sobre um plano condutor perfeito.

Até agora nesta secção analisou-se o caso dum dipolo elementar colocado horizontalmente sobre a interface entre o ar e outro meio. As conclusões obtidas podem-se generalizar a dipolos de outros comprimentos.

Como exemplo, na Figura 2.44 estão representados os diagramas de radiação, no plano $\phi=0^\circ$, dum dipolo de meia onda alinhado segundo o eixo dos yy , colocado horizontalmente à altura de 0.5λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz. Nesta situação a polarização é perpendicular.

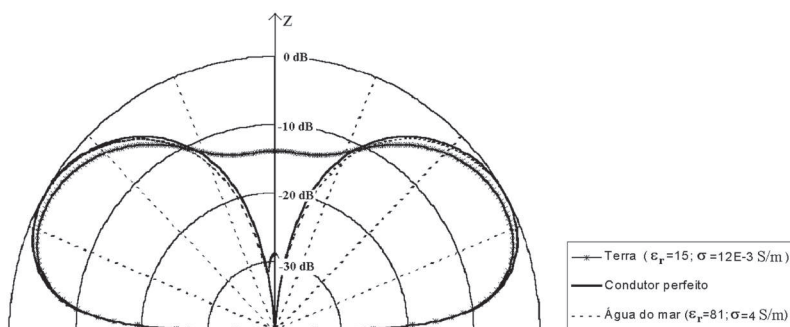


Figura 2.44 Diagramas de radiação, no plano $\phi=0^\circ$, dum dipolo de meia onda alinhado segundo o eixo dos yy , colocado horizontalmente à altura de 0.5λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz.

Na Figura 2.45 estão representados os diagramas de radiação, no plano $\phi=90^\circ$. Nesta situação a polarização é paralela.

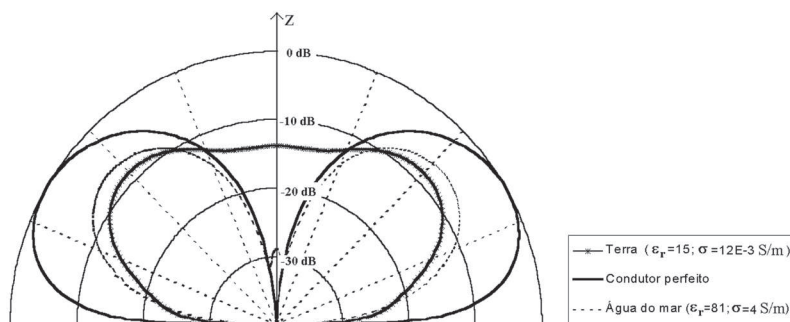


Figura 2.45 Diagramas de radiação, no plano $\phi=90^\circ$, dum dipolo de meia onda alinhado segundo o eixo dos yy , colocado horizontalmente à altura de 0.5λ , acima de três meios diferentes, à frequência de 100MHz.

Ainda para ilustrar que as conclusões obtidas para o dipolo elementar podem-se generalizar a dipolos de outros comprimentos, na Figura 2.46 estão representadas a resistência de radiação e a diretividade, segundo a direção $\theta=0^\circ$, dum dipolo de meia onda, em função da altura a que está colocado horizontalmente sobre um plano condutor perfeito (PCP).

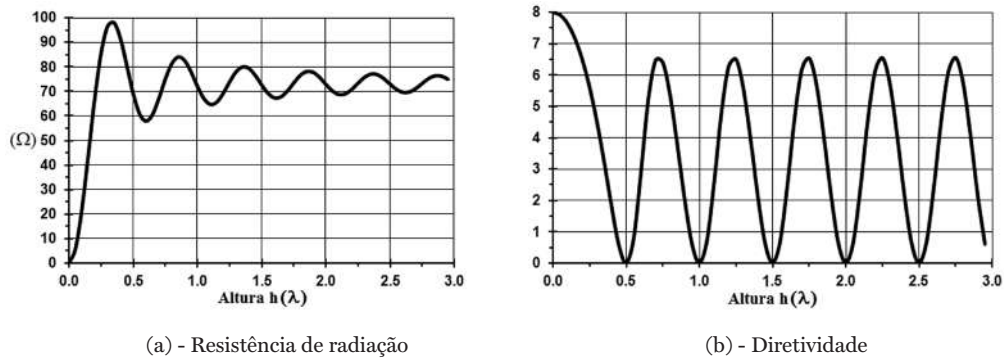


Figura 2.46 Resistência de radiação e diretividade, segundo a direção $\theta=0^\circ$, dum dipolo de 0.5λ , em função da altura a que está colocado horizontalmente sobre um plano condutor perfeito.

Vê-se pela Figura 2.46 (a) que a resistência de radiação oscila com o valor de h . Quando o dipolo está muito próximo do PCP a resistência de radiação é nula pois o dipolo fica curto-circuitado e, portanto, não radia. À medida que o dipolo se afasta do PCP, a resistência de radiação tende para a resistência de radiação do dipolo isolado que, para um dipolo com $l=0.5\lambda$ é igual a 73Ω . O valor de R_r atinge o máximo $R_r=98\Omega$ para $h=0.35\lambda$.

Tal como acontecia com o dipolo elementar, também a diretividade dipolo de meia onda colocado horizontalmente sobre um PCP, é nula quando a altura h for um múltiplo de $\lambda/2$, tal como se pode observar na Figura 2.46 (b).

Na Figura 2.47 estão representadas as diretividades, (segundo a direção de máxima radiação), nos planos $\phi=0^\circ$ e $\phi=90^\circ$. Vê-se por esta figura que a diretividade oscila bastante com o valor de h , tendendo para quatro vezes do valor da diretividade do dipolo isolado à medida que o dipolo se afasta do PCP.

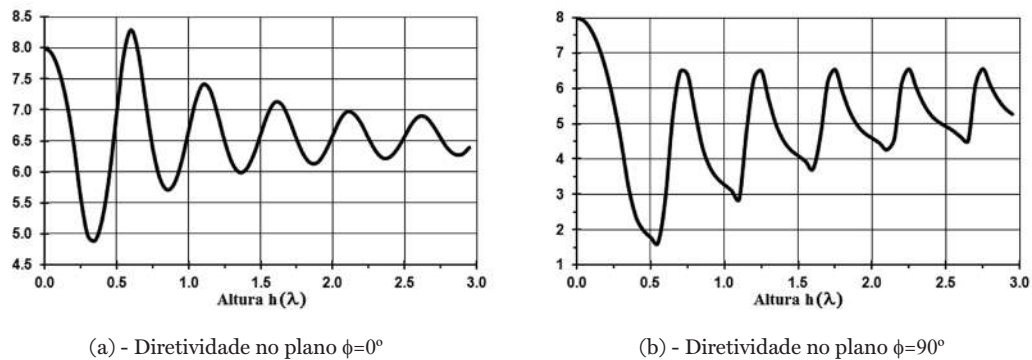


Figura 2.47 Diretividade, nos planos $\phi=0^\circ$ e $\phi=90^\circ$, dum dipolo com comprimento 0.5λ , em função da altura a que está colocado horizontalmente sobre um plano condutor perfeito.

2.7 Comprimento efetivo dum dipolo

Define-se comprimento efetivo dum dipolo de comprimento l e com uma distribuição de corrente $\mathbf{I}(z')$ cujo máximo é $\mathbf{I}_0$, como o comprimento l_{ef} que deveria ter um dipolo com uma distribuição de corrente constante ao longo do dipolo igual a $\mathbf{I}_0$, de modo a produzir o mesmo campo, no mesmo ponto de observação.

Tendo em conta que num dipolo prático a corrente é nula nos seus extremos, é de presumir que se consiga obter o mesmo campo com um dipolo mais curto que tenha uma distribuição de corrente uniforme dum extremo ou outro. Isto significa então que $l_{\text{ef}} \leq l$.

Consideremos o dipolo alinhado segundo o eixo dos zz . A grande distância o campo radiado pelo dipolo é dado por (2-184):

$$\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{\beta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') e^{+j\beta z' \cos\theta} dz' \right] \quad (2-184)$$

Para um dipolo de comprimento l_{ef} e com distribuição de corrente constante $\mathbf{I}_0$, o campo é dado por (2-185):

$$\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{\beta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \mathbf{I}_0 \left[\int_{-\frac{l_{\text{ef}}}{2}}^{\frac{l_{\text{ef}}}{2}} e^{+j\beta z' \cos\theta} dz' \right] \quad (2-185)$$

Supondo que se pretende obter o comprimento efetivo válido para a direção θ_a , então, por definição de comprimento efetivo, as expressões (2-184) e (2-185) devem ser iguais para θ_a , pelo que se tem:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') e^{+j\beta z' \cos\theta_a} dz' = \mathbf{I}_0 \int_{-\frac{l_{\text{ef}}}{2}}^{\frac{l_{\text{ef}}}{2}} e^{+j\beta z' \cos\theta_a} dz' \quad (2-186)$$

Resolvendo o integral que está à direita na expressão anterior, obtém-se:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') e^{+j\beta z' \cos\theta_a} dz' = 2\mathbf{I}_0 \frac{l_{\text{ef}}}{2} \frac{\sin\left(\beta \frac{l_{\text{ef}}}{2} \cos\theta_a\right)}{\beta \frac{l_{\text{ef}}}{2} \cos\theta_a} = 2\mathbf{I}_0 \frac{l_{\text{ef}}}{2} \text{sinc}\left(\frac{l_{\text{ef}}}{\lambda} \cos\theta_a\right) \quad (2-187)$$

Embora seja possível resolver a equação anterior, pelo menos numericamente, de modo a obter-se um valor de l_{ef} , em função de l que satisfaça a equação, isso não é em geral feito. Há, no entanto, dois casos particulares importantes que interessa analisar.

Primeiro caso. Quando o dipolo é muito pequeno comparado com o comprimento de onda.

Nesta situação também $l_{\text{ef}} \ll \lambda$, pelo que $\text{sinc}\left(\frac{l_{\text{ef}}}{\lambda} \cos\theta_a\right) \cong 1$. Então, nesse caso o comprimento efetivo é dado pela expressão (2-188):

$$l_{\text{ef}} = \frac{1}{\mathbf{I}_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') dz' \quad (2-188)$$

É de realçar que neste caso l_{ef} não depende da direção de observação pelo que, o dipolo dado pode ser substituído, para o cálculo do campo radiado, por um dipolo de comprimento l_{ef} e distribuição de corrente constante I_0 .

Consideremos como exemplo um dipolo curto de comprimento l e com a distribuição de corrente dada pela expressão (2-189):

$$\mathbf{I}(z') = \begin{cases} I_0 \left(1 + \frac{2}{l} z'\right) & -\frac{l}{2} \leq z' \leq 0 \\ I_0 \left(1 - \frac{2}{l} z'\right) & 0 \leq z' \leq \frac{l}{2} \end{cases} \quad (2-189)$$

Substituindo esta distribuição de corrente em (2-188) obtém-se facilmente:

$$l_{\text{ef}} = \frac{1}{I_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') dz' = \frac{1}{I_0} \left[I_0 \int_{-\frac{l}{2}}^0 \left(1 + \frac{2}{l} z'\right) dz' + I_0 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{2}{l} z'\right) dz' \right] = \frac{l}{2} \quad (2-190)$$

Em conclusão, pode-se então dizer que o campo radiado a grande distância por um dipolo curto de comprimento l é igual ao campo radiado por um dipolo com metade do comprimento, que tenha uma distribuição de corrente constante e igual à corrente máxima do dipolo curto.

Também se pode concluir que o campo radiado a grande distância por um dipolo curto de comprimento l é metade do campo radiado por um dipolo com o mesmo comprimento, que tenha uma distribuição de corrente constante e igual à corrente máxima do dipolo. Já se tinha obtido esta conclusão na secção 2.4 quando se estudou o dipolo curto.

Segundo caso. Quando se considera apenas a direção perpendicular ao dipolo, isto é, $\theta_a = 90^\circ$.

Nesse caso, $\cos \theta_a = 0$ e por consequência $\text{sinc}\left(\frac{l_{\text{ef}}}{\lambda} \cos \theta_a\right) = 1$. Então, o comprimento efetivo é dado pela expressão (2-191):

$$l_{\text{ef}} = \frac{1}{I_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') dz' \quad (2-191)$$

Para exemplificar este segundo caso, consideremos um dipolo de comprimento l com a distribuição de corrente sinusoidal dada pela expressão (2-192):

$$\mathbf{I}(z') = \begin{cases} I_0 \text{sen} \left[\beta \left(\frac{l}{2} + z' \right) \right] & -\frac{l}{2} \leq z' \leq 0 \\ I_0 \text{sen} \left[\beta \left(\frac{l}{2} - z' \right) \right] & 0 \leq z' \leq \frac{l}{2} \end{cases} \quad (2-192)$$

Substituindo esta distribuição de corrente em (2-188) obtém-se após algumas simplificações:

$$l_{ef} = \frac{1}{I_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z') dz' = \frac{2}{\beta} \left[1 - \cos\left(\pi \frac{l}{\lambda}\right) \right] \quad (2-193)$$

Para o caso particular do dipolo de meia onda, $l = \frac{\lambda}{2}$, tem-se $l_{ef} = \frac{\lambda}{\pi}$.

Para comprovar esta equivalência calculemos o campo radiado na direção $\theta=90^\circ$ por um dipolo de meia onda, pela expressão genérica (2-102) válida para um dipolo de comprimento finito e distribuição de corrente sinusoidal. Dessa expressão obtém-se:

$$E_\theta \cong j\eta \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2} \cos\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}} \right] = j\eta \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \quad (2-194)$$

Calculemos agora o campo radiado, na direção $\theta=90^\circ$, por um dipolo de comprimento $\frac{\lambda}{\pi}$, usando a expressão (2-69) válida para um dipolo com distribuição de corrente constante. Dessa expressão obtém-se:

$$E_\theta \cong j\eta \frac{\beta I_0 \frac{\lambda}{\pi}}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j\eta I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{2\pi r} \quad (2-195)$$

Comparando (2-194) com (2-195) verifica-se que o campo radiado, na direção $\theta=90^\circ$, por um dipolo de meia onda com distribuição de corrente sinusoidal assume o mesmo valor que o campo radiado, na mesma direção, por um dipolo de comprimento $\frac{\lambda}{\pi}$, com distribuição de corrente constante.

Verifica-se, portanto, que na direção $\theta=90^\circ$, o comprimento efetivo dum dipolo de meia onda com distribuição de corrente sinusoidal é $\frac{\lambda}{\pi}$.

2.8 Antena em forma de aro

Já vimos no capítulo 1 que existem antenas em forma de aro, normalmente circular ou quadrado, que se podem considerar derivadas de linhas bifilares. Se o perímetro do aro for muito menor do que o comprimento de onda a corrente no aro pode-se considerar aproximadamente constante, sendo neste caso a análise relativamente simples. No entanto, se o perímetro do aro for uma fração apreciável do comprimento de onda, ou inclusivamente maior do que um comprimento de onda, a corrente já não se pode considerar constante, tornando a análise mais morosa.

2.8.1 Aro elementar

Esta antena pode-se considerar derivada de linha bifilar terminada em curto-circuito, tal como se ilustra na Figura 2.48 para o caso dum aro quadrado.

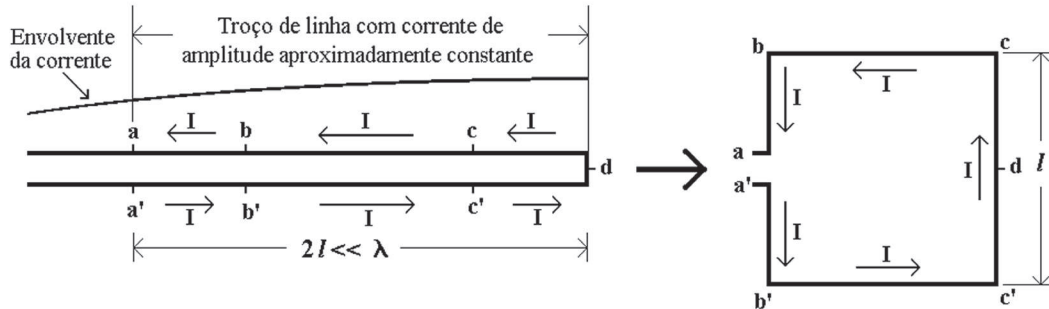


Figura 2.48 Aro elementar. Perímetro pequeno comparado com o comprimento de onda.

Considerando que o perímetro do aro é muito menor do que o comprimento de onda a corrente no aro pode-se considerar aproximadamente constante em amplitude e fase ao longo de todo o aro.

2.8.1.1 Campo radiado a grande distância

Para a análise desta antena consideremos que ela está situada no referencial indicado na Figura 2.49.

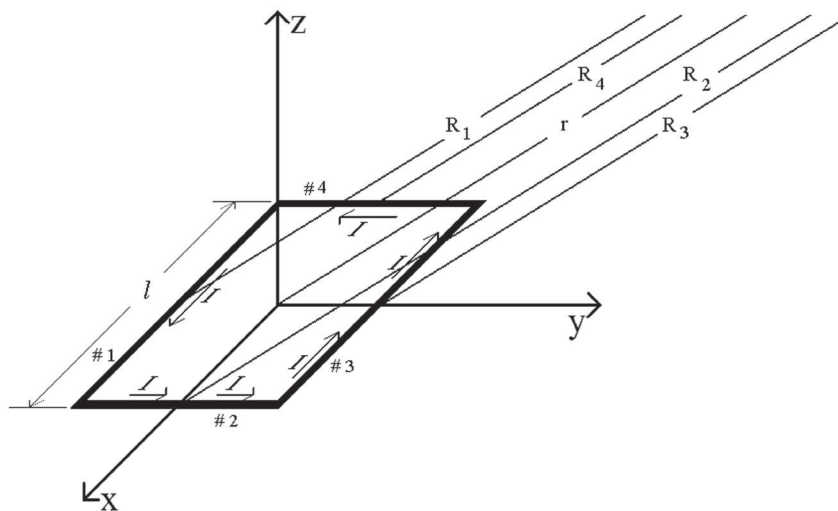


Figura 2.49 Antena em forma de aro quadrado eletricamente pequeno.

Os vetores potenciais magnéticos para cada um dos lados são dados pelas expressões (2-196).

Para o lado #1:

$$\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{x}} \mu \frac{\mathbf{I}l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} = \hat{\mathbf{x}} \mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1}, \text{ com } \mathbf{A}_0 = \mu \frac{\mathbf{I}l}{4\pi}$$

Para o lado #2:

$$\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{y}} \mu \frac{\mathbf{I}l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta R_2}}{R_2} = \hat{\mathbf{y}} \mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta R_2}}{R_2}, \text{ com } \mathbf{A}_0 = \mu \frac{\mathbf{I}l}{4\pi}$$

(2-196)

Para o lado #3:

$$\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{x}} \mu \frac{(-\mathbf{I}l)}{4\pi} \frac{e^{-j\beta R_3}}{R_3} = \hat{\mathbf{x}} (-\mathbf{A}_0) \frac{e^{-j\beta R_3}}{R_3}, \text{ com } \mathbf{A}_0 = \mu \frac{\mathbf{I}l}{4\pi}$$

Para o lado #4:

$$\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{y}} \mu \frac{(-\mathbf{I}l)}{4\pi} \frac{e^{-j\beta R_4}}{R_4} = \hat{\mathbf{y}} (-\mathbf{A}_0) \frac{e^{-j\beta R_4}}{R_4}, \text{ com } \mathbf{A}_0 = \mu \frac{\mathbf{I}l}{4\pi}$$

No campo distante podem-se fazer as seguintes aproximações:

$$R_1 \approx r + \frac{l}{2} \cos \gamma_y$$

$$R_2 \approx r - \frac{l}{2} \cos \gamma_x$$

$$R_3 \approx r - \frac{l}{2} \cos \gamma_y$$

(2-197)

$$R_4 \approx r + \frac{l}{2} \cos \gamma_x$$

no expoente e,

$R_1 \approx R_2 \approx R_3 \approx R_4 \approx r$ no denominador.

Também já se viu que no campo distante o campo eletromagnético é dado pelas seguintes relações:

$$\vec{\mathbf{E}} \approx -j\omega \vec{\mathbf{A}} \quad \text{com } \mathbf{E}_r = 0$$

e

$$\mathbf{H}_\theta \approx -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_\phi \approx \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

(2-198)

Substituindo (2-196) em (2-198), tendo em conta (2-197), obtém-se:

Para o lado #1:

$$\mathbf{E}_{\theta_1} = -j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta\frac{l}{2}\sin\theta\sin\phi} \cos\theta\cos\phi$$

$$\mathbf{E}_{\phi_1} = j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta\frac{l}{2}\sin\theta\sin\phi} \sin\phi$$

Para o lado #2:

$$\mathbf{E}_{\theta_2} = -j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{j\beta\frac{l}{2}\sin\theta\cos\phi} \cos\theta\sin\phi$$

$$\mathbf{E}_{\phi_2} = -j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{j\beta\frac{l}{2}\sin\theta\cos\phi} \cos\phi \quad (2-199)$$

Para o lado #3:

$$\mathbf{E}_{\theta_3} = j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{j\beta\frac{l}{2}\sin\theta\sin\phi} \cos\theta\cos\phi$$

$$\mathbf{E}_{\phi_3} = -j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{j\beta\frac{l}{2}\sin\theta\sin\phi} \sin\phi$$

Para o lado #4:

$$\mathbf{E}_{\theta_4} = j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta\frac{l}{2}\sin\theta\cos\phi} \cos\theta\sin\phi$$

$$\mathbf{E}_{\phi_4} = j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta\frac{l}{2}\sin\theta\cos\phi} \cos\phi$$

O campo elétrico total radiado pelo aro é a soma destes quatro campos, isto é:

$$\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_{\theta_1} + \mathbf{E}_{\theta_2} + \mathbf{E}_{\theta_3} + \mathbf{E}_{\theta_4} \quad (2-200)$$

$$\mathbf{E}_\phi = \mathbf{E}_{\phi_1} + \mathbf{E}_{\phi_2} + \mathbf{E}_{\phi_3} + \mathbf{E}_{\phi_4}$$

Substituindo as expressões (2-199) em (2-200) obtém-se:

$$\mathbf{E}_\theta = j\omega\mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \times \left[\cos\theta\cos\phi 2j\sin\left(\beta\frac{l}{2}\sin\theta\sin\phi\right) - \cos\theta\sin\phi 2j\sin\left(\beta\frac{l}{2}\sin\theta\cos\phi\right) \right] \quad (2-201)$$

No entanto neste caso $l \ll \lambda$ o que implica $\beta\frac{l}{2} = \pi\frac{l}{\lambda} \ll \pi$, pelo que se pode considerar que: $\sin\left(\beta\frac{l}{2}\sin\theta\sin\phi\right) \approx \beta\frac{l}{2}\sin\theta\sin\phi$ e que: $\sin\left(\beta\frac{l}{2}\sin\theta\cos\phi\right) \approx \beta\frac{l}{2}\sin\theta\cos\phi$.

Tendo em conta estas aproximações resulta que $\mathbf{E}_\theta \approx 0$.

Dum modo semelhante e usando as mesmas aproximações, obtém-se para a componente ϕ do campo elétrico a seguinte expressão:

$$\mathbf{E}_\phi = \omega \mathbf{A}_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \beta l \sin\theta = \omega \mu \frac{\mathbf{I} l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \beta l \sin\theta \quad (2-202)$$

Designando por $S = l^2$ a área do aro, a expressão (2-202) pode-se escrever como:

$$\mathbf{E}_\phi = \beta \frac{\omega \mu \mathbf{I} S}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta \quad (2-203)$$

Tendo em conta a relação (2-198), o campo magnético tem apenas componente segundo θ , dada por:

$$\mathbf{H}_\theta = -\beta \frac{\omega \mu \mathbf{I} S}{4\pi \eta} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta \quad (2-204)$$

Comparando a expressão (2-203) com a expressão (2-77), obtida para um dipolo magnético elementar, verifica-se que um aro que limita uma superfície de área S quando percorrido por uma corrente constante $\mathbf{I}$, é equivalente a um dipolo magnético elementar de comprimento l e com uma corrente constante $\mathbf{I}_m$, desde que se verifique a condição seguinte:

$$\mathbf{I}_m l = j\omega \mu \mathbf{I} S \quad (2-205)$$

Esta equivalência é ilustrada na Figura 2.50.

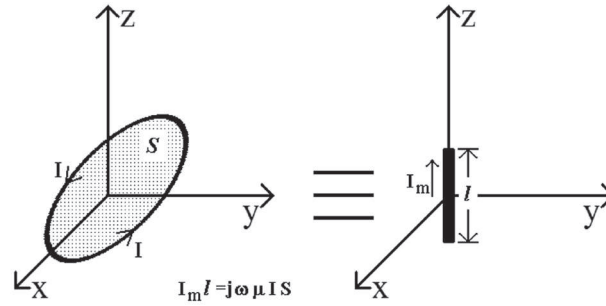


Figura 2.50 Equivalência entre um aro pequeno e um dipolo magnético elementar.

No campo distante, a intensidade de radiação dum aro com um perímetro muito menor do que o comprimento de onda pode ser obtida atendendo à expressão (2-203), sendo dada por:

$$U(\theta) = r^2 \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{E}_\phi|^2}{\eta} \right) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\beta \omega \mu |\mathbf{I}| S}{4\pi} \right)^2 \sin^2\theta = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\beta^2 |\mathbf{I}| S}{4\pi} \right)^2 \sin^2\theta \quad (2-206)$$

Como se pode ver por esta expressão, a intensidade de radiação não depende da coordenada ϕ , o que significa que há simetria relativamente ao eixo dos zz . Também se conclui facilmente que o máximo de $U(\theta)$ ocorre para $\theta=90^\circ$, valendo $U_{\max} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\beta^2 |\mathbf{I}| S}{4\pi} \right)^2$.

O diagrama de radiação é a representação gráfica da intensidade de radiação normalizada dada por:

$$U_n(\theta) = \frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \sin^2\theta \quad (2-207)$$

Sendo assim o diagrama de radiação é uma estrutura de revolução em torno do eixo dos zz , que apresenta um nulo na direção perpendicular ao plano do aro e um valor máximo e constante no plano $\theta=90^\circ$. Este diagrama está esboçado na Figura 2.51 e tem uma forma semelhante à dum dipolo elementar fazendo lembrar um “*doughnut*”.

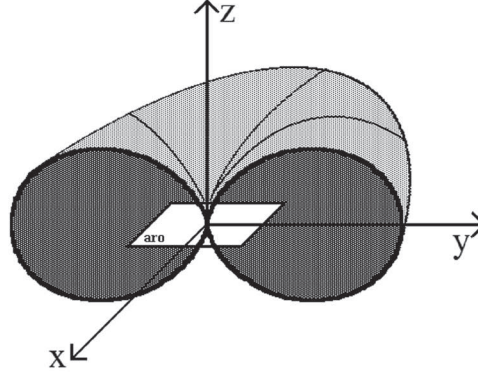


Figura 2.51 Diagrama de radiação dum aro pequeno.

2.8.1.2 Potência radiada e resistência de radiação

Vimos atrás que um aro pequeno, percorrido por uma corrente constante I , é equivalente a um dipolo magnético elementar. Por outro lado, um dipolo magnético elementar é dual dum dipolo elétrico elementar. Sendo assim, podem-se obter as expressões da potência radiada e da resistência de radiação dum aro pequeno, através destas equivalências.

Comecemos por relembrar que a potência radiada por um dipolo elétrico elementar de comprimento l e percorrido pela corrente I é dada por:

$$P_{\text{rad}} = \eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{|I|l}{\lambda} \right)^2 \quad (2-208)$$

Por dualidade, a potência radiada por um dipolo magnético elementar de comprimento l e percorrido pela corrente I_m é dada então por:

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{\eta} \frac{\pi}{3} \left(\frac{|I_m|l}{\lambda} \right)^2 \quad (2-209)$$

Mas já sabemos que um aro de área S , percorrido por uma corrente constante I , é equivalente a um dipolo magnético elementar de comprimento l e com uma corrente constante I_m , desde que se verifique a condição seguinte:

$$I_m l = j\omega\mu IS \quad (2-210)$$

Substituindo esta relação em (2-209) e atendendo a que $\omega\mu = \eta\beta$, obtém-se:

$$P_{\text{rad}} = \eta \frac{\pi}{3} |I|^2 \left(\frac{\beta S}{\lambda} \right)^2 \quad (2-211)$$

A resistência de radiação é então dada por:

$$R_r = \frac{2P_{\text{rad}}}{|I|^2} = 2\eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{\beta S}{\lambda} \right)^2 \quad (2-212)$$

Se em vez duma só espira tivermos N espiras sobrepostas, a área efetiva é NS , pelo que a resistência de radiação será nesse caso dada por:

$$R_r = \frac{2P_{\text{rad}}}{|I|^2} = 2\eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{\beta S}{\lambda} \right)^2 N^2 \quad (2-213)$$

No caso particular dum aro circular de raio a , o perímetro C é dado por $C = 2\pi a$ pelo que a área S se pode exprimir como: $S = \frac{C^2}{4\pi}$. Se o aro estiver situado no ar $\eta = 120\pi$, então a resistência de radiação também pode ser expressa por:

$$R_r = 20\pi^2 \left(\frac{C}{\lambda} \right)^4 \quad (2-214)$$

Se em vez duma só espira tivermos N espiras sobrepostas, a área efetiva é NS , pelo que a resistência de radiação será nesse caso dada por:

$$R_r = 20\pi^2 \left(\frac{C}{\lambda} \right)^4 N^2 \quad (2-215)$$

2.8.2 Aro de maiores dimensões

Na secção anterior viu-se que as características dum aro pequeno, comparado com o comprimento de onda, não dependiam da sua forma, mas sim da área da superfície por ele limitada. Também se viu que o diagrama de radiação era isotrópico e assumia o valor máximo no plano do aro e tinha um nulo segundo a direção normal ao aro. Isto é assim, porque se assumiu que a corrente que percorre o aro é constante quer em amplitude quer em fase. Contudo, esta hipótese só pode ser colocada se as dimensões do aro se puderem considerar muito pequenas em relação ao comprimento de onda.

Contudo, para aros cujo perímetro já é uma fração apreciável do comprimento de onda, ou ainda maior, a corrente ao longo do aro varia tanto em amplitude como em fase, fazendo com que as características do aro passem a depender do seu tamanho.

Os aros habitualmente mais usados, com um perímetro aproximadamente igual a um comprimento de onda, são aros de secção circular ou retangular.

2.8.2.1 Aro quadrado com um perímetro de um comprimento de onda

Consideremos um aro quadrado com um perímetro de um comprimento de onda, e com uma distribuição de corrente sinusoidal derivada duma linha bifilar terminada em curto-circuito, tal como se ilustra na Figura 2.52.

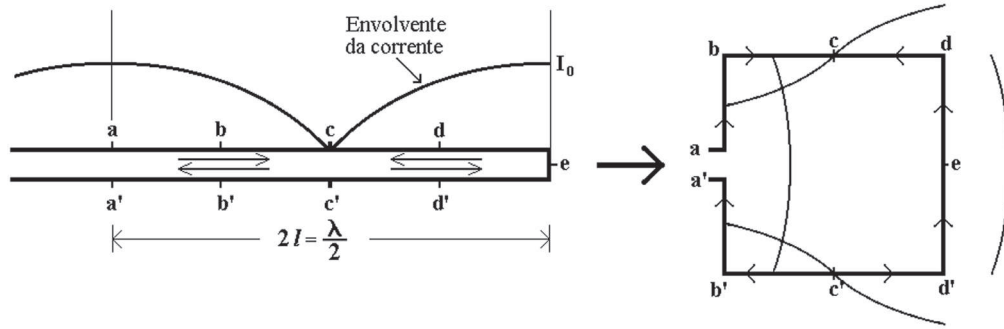


Figura 2.52 Aro quadrado com um perímetro de $l\lambda$, e com uma distribuição de corrente sinusoidal.

Para determinar os campos radiados por este aro a grande distância, consideremos a geometria representada na Figura 2.53, em que o plano do aro coincide com o plano x-y.

De acordo com esta geometria as correntes nos quatro lados do aro são dadas pelas relações (2-216):

$$\begin{aligned} \vec{I}_1 = -\vec{I}_3 = -\hat{x} I_0 \sin(\beta x') & \quad -\frac{\lambda}{8} \leq x' \leq \frac{\lambda}{8} \\ \vec{I}_2 = \vec{I}_4 = -\hat{y} I_0 \cos(\beta y') & \quad -\frac{\lambda}{8} \leq y' \leq \frac{\lambda}{8} \end{aligned} \quad (2-216)$$

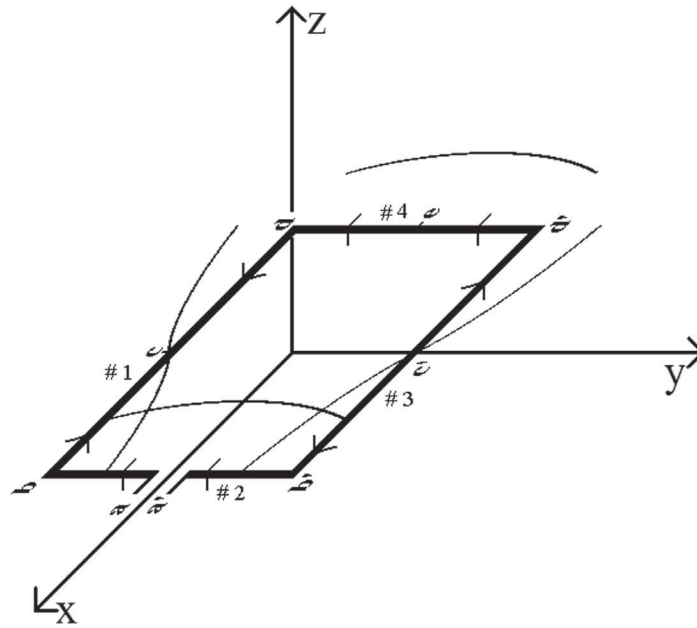


Figura 2.53 Geometria para analisar um aro quadrado com um perímetro de $l\lambda$.

No campo distante o vetor potencial magnético associado ao lado #1 é dado pela expressão (2-217):

$$\vec{A}_1(x, y, z) = \hat{x} \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_{-\frac{\lambda}{8}}^{+\frac{\lambda}{8}} I_1(x') e^{j\beta \hat{r} \cdot \vec{r}_1'} dx' \quad (2-217)$$

$$\text{Com } \vec{r}_1' = \hat{x} x' - \hat{y} \frac{\lambda}{8}$$

De igual modo se pode calcular os vetores potencial magnéticos associados aos outros lados, tendo em conta as seguintes relações:

$$\vec{r}_2' = \hat{x} \frac{\lambda}{8} + \hat{y} y' \quad ; \quad \vec{r}_3' = \hat{x} x' + \hat{y} \frac{\lambda}{8} \quad ; \quad \vec{r}_4' = -\hat{x} \frac{\lambda}{8} + \hat{y} y' \quad (2-218)$$

Desenvolvendo a expressão (2-117) obtém-se:

$$\vec{A}_1 = \hat{x} A_0 I_0 \int_{-\frac{\lambda}{8}}^{+\frac{\lambda}{8}} -\text{sen}(\beta x') e^{j\beta \left(x' \cos \gamma_x + \frac{\lambda}{8} \cos \gamma_y \right)} dx' \quad (2-219)$$

$$\text{Com } A_0 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \quad ; \quad \cos \gamma_x = \text{sen} \theta \cos \phi \quad \text{e} \quad \cos \gamma_y = \text{sen} \theta \text{sen} \phi$$

O vetor potencial magnético associado ao lado #3 é dado pela expressão:

$$\vec{A}_3 = \hat{x} A_0 I_0 \int_{-\frac{\lambda}{8}}^{+\frac{\lambda}{8}} \text{sen}(\beta x') e^{j\beta \left(x' \cos \gamma_x + \frac{\lambda}{8} \cos \gamma_y \right)} dx' \quad (2-220)$$

Somando estas duas expressões obtém-se a componente A_x do vetor $\vec{A}$, que é dada pela expressão (2-221):

$$A_x = j2 A_0 I_0 \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} \cos \gamma_y \right) \int_{-\frac{\lambda}{8}}^{+\frac{\lambda}{8}} \text{sen}(\beta x') e^{j\beta x' \cos \gamma_x} dx' \quad (2-221)$$

Determinando de forma análoga os vetores potenciais magnéticos associados aos lados #2 e #4, obtém-se a componente A_y do vetor $\vec{A}$, que é dada pela expressão (2-222):

$$A_y = -2 A_0 I_0 \cos \left(\frac{\pi}{4} \cos \gamma_x \right) \int_{-\frac{\lambda}{8}}^{+\frac{\lambda}{8}} \cos(\beta y') e^{j\beta y' \cos \gamma_y} dy' \quad (2-222)$$

O integral da expressão (2-221) tem a seguinte primitiva:

$$\int \text{sen}(\beta x') e^{j\beta x' \cos \gamma_x} dx' = \frac{e^{j\beta x' \cos \gamma_x}}{(j\beta \cos \gamma_x)^2 + \beta^2} [j\beta \cos \gamma_x \text{sen}(\beta x') - \beta \cos(\beta x')]]$$

A partir desta primitiva calcula-se o integral definido e, após algumas simplificações da equação (2-221), obtém-se para a componente A_x do vetor $\vec{A}$, a expressão (2-223):

$$A_x = j2 A_0 I_0 \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} \cos \gamma_y \right) \frac{j\sqrt{2}}{\beta \text{sen}^2 \gamma_x} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \cos \gamma_x \right) \cos \gamma_x - \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} \cos \gamma_x \right) \right] \quad (2-223)$$

O integral da expressão (2-222) tem a seguinte primitiva:

$$\int \cos(\beta y') e^{j\beta y' \cos \gamma_y} dy' = \frac{e^{j\beta y' \cos \gamma_y}}{(j\beta \cos \gamma_y)^2 + \beta^2} [j\beta \cos \gamma_y \cos(\beta y') + \beta \text{sen}(\beta y')]]$$

A partir desta primitiva calcula-se o integral definido e, após algumas simplificações da equação (2-222), obtém-se para a componente A_y do vetor $\vec{A}$, a expressão (2-224):

$$\mathbf{A}_y = 2 \mathbf{A}_0 \mathbf{I}_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} \cos \gamma_x\right) \frac{\sqrt{2}}{\beta \sin^2 \gamma_y} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} \cos \gamma_y\right) \cos \gamma_y - \cos\left(\frac{\pi}{4} \cos \gamma_y\right) \right] \quad (2-224)$$

Como já se viu, no campo distante, o campo elétrico é dado pelas relações $\vec{\mathbf{E}} \approx -j\omega\vec{\mathbf{A}}$ com $\mathbf{E}_r=0$. Em coordenadas esféricas as componentes do campo elétrico são então dadas pelas relações (2-225):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &= -j\omega\mathbf{A}_\theta = -j\omega(\mathbf{A}_x \cos \theta \cos \phi + \mathbf{A}_y \cos \theta \sin \phi) \\ \mathbf{E}_\phi &= -j\omega\mathbf{A}_\phi = -j\omega(-\mathbf{A}_x \sin \phi + \mathbf{A}_y \cos \phi) \end{aligned} \quad (2-225)$$

A partir das expressões anteriores poderemos determinar os diagramas de radiação. Consideremos apenas os planos principais.

No plano xz, isto é, no plano $\phi=0^\circ$, verificam-se as seguintes relações

$$\sin \phi = 0 ; \cos \phi = 1 ; \cos \gamma_y = 0 ; \sin \gamma_y = 1 ; \cos \gamma_x = \sin \theta ; \sin \gamma_x = \cos \theta .$$

Atendendo a estas relações as componentes do campo elétrico neste plano são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &= 0 \\ \mathbf{E}_\phi &= -j\omega\mathbf{A}_\phi|_{\phi=0^\circ} = j \frac{\omega\mathbf{A}_0 \mathbf{I}_0 2\sqrt{2}}{\beta} \cos\left(\frac{\pi}{4} \sin \theta\right) \end{aligned} \quad (2-226)$$

Analisando esta expressão verifica-se que o máximo ocorre para $\theta=0^\circ$, isto é, segundo o eixo dos zz e tem o valor $E_{\max} = |\mathbf{E}_\phi| = \frac{\eta |\mathbf{I}_0|}{\sqrt{2} \pi r}$.

Para $\theta=90^\circ$, isto é, segundo o eixo dos xx o valor do campo é $\frac{1}{\sqrt{2}}E_{\max}$, isto é, está 3dB abaixo do máximo.

No plano yz, isto é, no plano $\phi=90^\circ$, verificam-se as seguintes relações:

$$\sin \phi = 1 ; \cos \phi = 0 ; \cos \gamma_x = 0 ; \sin \gamma_x = 1 ; \cos \gamma_y = \sin \theta ; \sin \gamma_y = \cos \theta .$$

Atendendo a estas relações as componentes do campo elétrico neste plano são as seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &= -j\omega\mathbf{A}_\theta|_{\phi=90^\circ} = -j \frac{\omega\mathbf{A}_0 \mathbf{I}_0 2\sqrt{2}}{\beta \cos \theta} \left[\sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} \sin \theta\right) \right] \\ \mathbf{E}_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (2-227)$$

Analisando esta expressão verifica-se que o máximo ocorre para $\theta=0^\circ$, isto é, segundo o eixo dos zz tendo, como é óbvio, o mesmo valor $E_{\max} = \frac{\eta |\mathbf{I}_0|}{\sqrt{2} \pi r}$. Para $\theta=90^\circ$, isto é, segundo o eixo dos yy o valor do campo é nulo.

No plano xy que é o plano do aro, isto é, no plano $\theta=90^\circ$, verificam-se as seguintes relações:

$$\sin \theta = 1 ; \cos \theta = 0 ; \cos \gamma_x = \cos \phi ; \sin \gamma_x = \sin \phi ; \cos \gamma_y = \sin \phi ; \sin \gamma_y = \cos \phi .$$

Atendendo a estas relações as componentes do campo elétrico neste plano são as seguintes:

$$\mathbf{E}_\theta = 0$$

$$\mathbf{E}_\phi = -j\omega\mathbf{A}_\phi|_{\theta=90^\circ} = -j\frac{\omega\mathbf{A}_0\mathbf{I}_02\sqrt{2}}{\beta} \times$$

$$\left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\sin\phi\right)}{\sin\phi} \left[\cos\phi \cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi\right)}{\cos\phi} \left[\sin\phi \sin\left(\frac{\pi}{4}\sin\phi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\sin\phi\right) \right] \right\} \quad (2-228)$$

Para $\phi=0^\circ$, isto é, segundo o eixo dos xx o valor do campo é $\frac{1}{\sqrt{2}}E_{\max}$, isto é, está 3dB abaixo do máximo. Para $\phi=90^\circ$, isto é, segundo o eixo dos yy o valor do campo é nulo.

Na Figura 2.54 estão representados os diagramas de radiação dum aro quadrado com um perímetro de um comprimento de onda, nos planos principais.

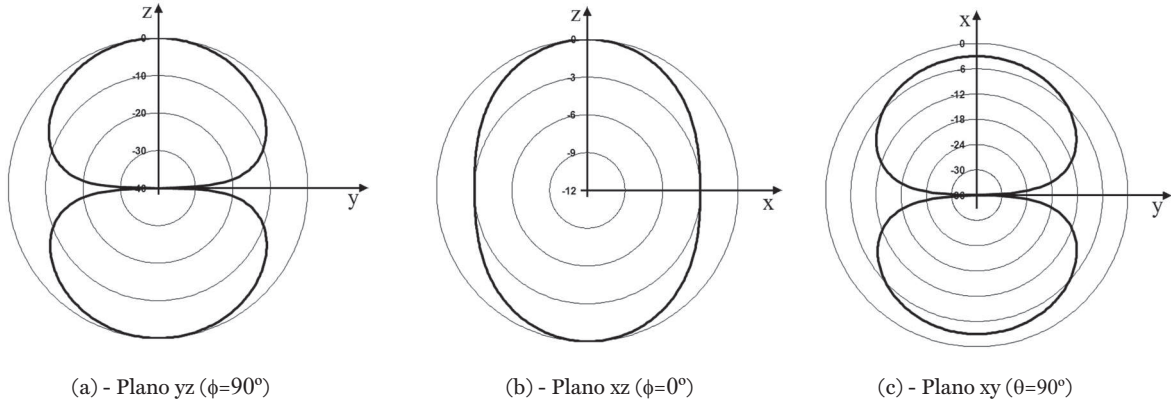


Figura 2.54 Diagramas de radiação dum aro quadrado com um perímetro de 1λ .

Desta figura podem-se tirar algumas conclusões à cerca do modo como esta antena radia. O máximo de radiação ocorre segundo a direção perpendicular ao plano do aro. No plano do aro a intensidade de radiação é nula segundo a direção paralela ao lado alimentado e, segundo a direção perpendicular a esta é metade da intensidade máxima.

Verifica-se, portanto, que um aro com um perímetro de um comprimento de onda radia dum modo bastante diferente dum aro com um perímetro reduzido que, como vimos tem o máximo no plano do aro e um nulo segundo a normal a esse plano.

Podemos ainda concluir que um aro quadrado com um perímetro de um comprimento de onda radia, segundo a direção do máximo, um campo elétrico linearmente polarizado que é paralelo ao lado alimentado, tal como se ilustra na Figura 2.55.



Figura 2.55 Polarização do campo radiado por um aro quadrado com um perímetro de 1λ .

A diretividade pode ser calculada pela relação $D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}}$ e a resistência de radiação pela relação $R_r = \frac{2P_{\text{rad}}}{|I_0|^2}$.

A potência radiada por esta antena é dada pela relação $P_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \frac{r^2}{2\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{E}|^2(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi$, em que $|\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2$.

Usando as equações (2-225) pode-se mostrar, após algumas manipulações matemáticas, que a diretividade é dada pela relação $D = \frac{4\pi}{\Pi}$ e a resistência de radiação $R_r = \frac{60}{\pi} \Pi$. Sendo Π o integral da equação (2-229):

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \left| -[A_x] \cos\theta \cos\phi + [A_y] \cos\theta \sin\phi \right|^2 + \left| [A_x] \sin\phi + [A_y] \cos\phi \right|^2 \right\} \sin\theta d\theta d\phi \quad (2-229)$$

em que $[A_x]$ e $[A_y]$ são dados pelas equações seguintes:

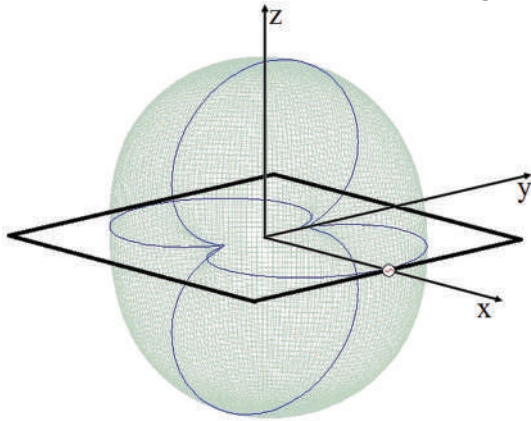
$$[A_x] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cos\gamma_y\right)}{\sin^2\gamma_x} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\gamma_x\right) \cos\gamma_x - \sin\left(\frac{\pi}{4} \cos\gamma_x\right) \right]$$

e

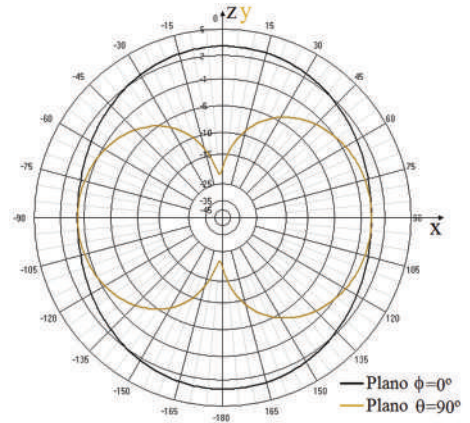
$$[A_y] = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\gamma_x\right)}{\sin^2\gamma_y} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} \cos\gamma_y\right) \cos\gamma_y - \cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\gamma_y\right) \right]$$

Calculando numericamente o integral Π , obtém-se o valor $\Pi=6.1881$. Usando este valor calcula-se uma diretividade de 2, isto é, 3dBi e uma resistência de radiação de 118Ω .

Simulando esta antena com o código NEC³, obtém-se os diagramas ilustrados na Figura 2.56.



(a) - Visão 3D e 2D nos planos $\theta=90^\circ$ e $\phi=90^\circ$



(b) - Diagramas 2D nos planos $\theta=90^\circ$ e $\phi=0^\circ$

Figura 2.56 Diagramas de radiação dum aro com um perímetro de 1λ .

Desta figura verifica-se que os diagramas simulados são muito semelhantes aos teóricos ilustrados na Figura 2.54. A diretividade prevista pela simulação é 3.13dBi que é muito próxima da que foi deduzida teoricamente. A simulação também dá uma impedância de entrada $Z=110-j144\Omega$, isto é, uma resistência de entrada (resistência de radiação) de 110Ω , que também é muito próximo do que foi deduzido teoricamente.

³ Este código baseado no método dos momentos será explicado no capítulo 5.

2.8.2.2 Aro circular com um perímetro de um comprimento de onda

Uma antena em forma de aro com características interessantes é o aro circular com um perímetro de um comprimento de onda, tal como se representa na Figura 2.57.

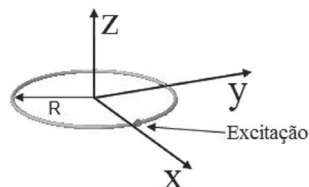


Figura 2.57 Aro circular com um perímetro de 1λ , $R=\lambda/2\pi$.

A análise teórica necessária para determinar os campos radiados por este aro a grande distância, é bastante complexa pelo que não será feita aqui. No entanto, simulando esta antena com o código NEC obtém-se uns diagramas muito semelhantes aos do aro quadrado, ilustrados na Figura 2.56. A simulação também dá uma diretividade de 3.53dBi e uma impedância de entrada $Z \approx 120 - j93\Omega$, isto é, uma resistência de entrada (resistência de radiação) de 120Ω .

Esta antena quando alimentada com duas excitações colocadas ortogonalmente e desfasadas de 90° radia uma onda com polarização circular e um diagrama de radiação aproximadamente de revolução em torno do eixo dos zz. Consideremos o aro circular com duas excitações, uma na posição $(x=R; y=0)$ com o valor $1\angle 0^\circ$ e outra colocada na posição $(x=0; y=R)$ com o valor $1\angle 90^\circ$, tal como ilustrado na Figura 2.58.

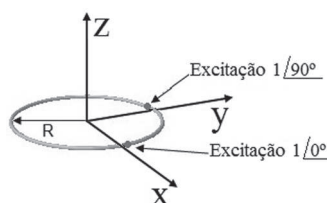


Figura 2.58 Aro circular com um perímetro de 1λ , $R=\lambda/2\pi$, alimentado com duas excitações.

Simulando esta antena com o código NEC obtém-se os diagramas ilustrados na Figura 2.59.

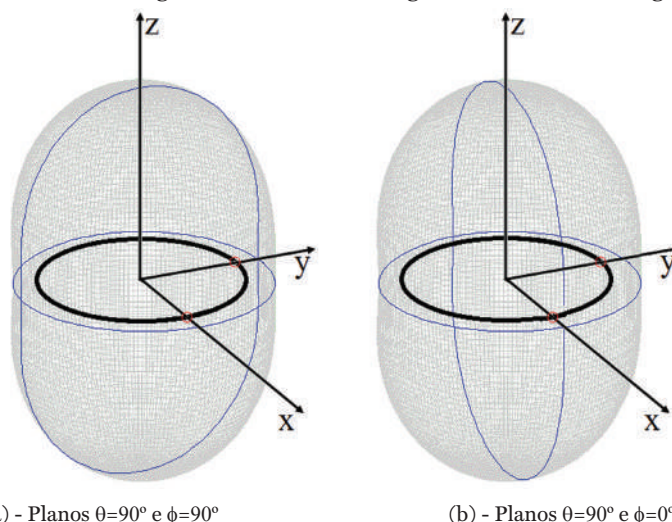


Figura 2.59 Diagramas dum aro circular com um perímetro de 1λ , alimentado com duas excitações.

Como se pode ver desta figura, ao contrário do que acontece quando o aro só tem uma excitação, os diagramas nos dois planos principais, $\phi=0^\circ$ e $\phi=90^\circ$ são bastante semelhantes devido ao diagrama 3D ser aproximadamente de revolução em torno do eixo dos zz . A forma destes diagramas verticais é semelhante ao dum campo $|E|=\cos(\theta)$, como se pode observar na Figura 2.60.

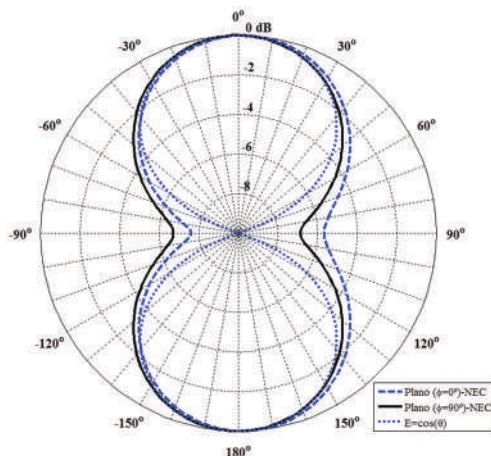


Figura 2.60 Diagramas dum aro circular com um perímetro de 1λ , alimentado com duas excitações, nos planos $\phi=0^\circ$ e $\phi=90^\circ$. Comparação com o diagrama da forma $|E|=\cos(\theta)$.

A simulação também dá uma diretividade de 3.54dBic e uma impedância de entrada $Z \cong 115-j78\Omega$ para a excitação $1\angle 0^\circ$ e $Z \cong 126-j115\Omega$ para a excitação $1\angle 90^\circ$. Em qualquer caso a resistência de entrada (resistência de radiação) é cerca de 120Ω .

Um aro quando alimentado com duas excitações colocadas ortogonalmente e desfasadas de 90° radia uma onda com polarização circular. No caso ilustrado na Figura 2.58 a polarização é circular esquerda no sentido do eixo positivo do eixo dos zz , isto é, no sentido $\theta=0^\circ$. Se a segunda excitação fosse $1\angle -90^\circ$, a polarização seria circular direita no sentido $\theta=0^\circ$. Como já foi referido no primeiro capítulo, este tipo de polarização é um caso particular da polarização mais geral que é elíptica. Nesse capítulo definiu-se razão axial RA como a razão entre o eixo maior e o eixo menor da elipse. Nesse caso como a amplitude do eixo menor pode ser nula, $1 \leq RA \leq \infty$. Há autores que definem RA como o inverso e nesse caso $1 \geq RA \geq 0$, é o caso do código NEC. Na Figura 2.61 está representada a variação da RA em função do ângulo θ .

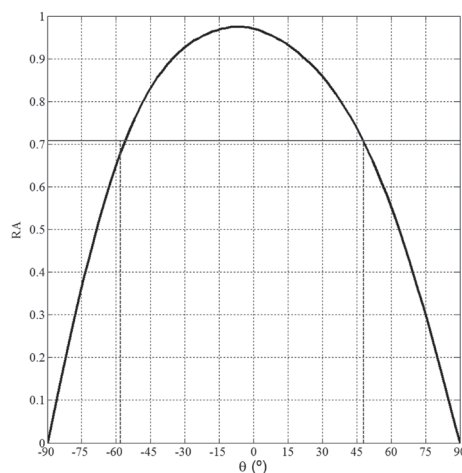


Figura 2.61 Razão axial em função de θ dum aro circular com um perímetro de 1λ , alimentado com duas excitações.

É habitual considerar que a polarização é circular para valores de RA compreendidos entre 0.707 e 1, isto é, entre 0 e -3dB. Como se pode ver da figura, esta antena exibe polarização circular num ângulo sólido de cerca de 45° em redor do eixo dos zz .

Referências

- [1] VAN BLADEL, J. , “Lorenz or Lorentz?”, *IEEE Ant. & Prop. Magazine*, Vol. 33, pp. 69, Abril 1991.
- [2] PARIS, D. T. and HURD, F. K. , *Basic Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, 1969.
- [3] COLLIN, R. E. , *Field Theory of Guided Waves*. McGraw-Hill, 1960.
- [4] KRAUS, J. D. , *Antennas*. 2nd edition. McGraw-Hill, 1988.
- [5] BALANIS, C. A. , *Antenna Theory-Analysis and Design*. New York: Harper & Row, Publishers, 1982.
- [6] INAN, U.; INAN, A., *Electromagnetic Waves*. New Jersey: Prentice-Hall, 1999.

Exercícios

1- Um dipolo de $\lambda/2$ à frequência de 150MHz é construído com um fio de 2.6mm de diâmetro dum condutor com uma condutividade $\sigma = 10^6 \text{ S/m}$. Trata-se, portanto, dum dipolo fino. O dipolo está colocado horizontalmente e alinhado segundo a direção (N-S) de modo a emitir com polarização horizontal. Desprezando o efeito da terra, pretende-se que o campo recebido em dois pontos situados a 20km de distância, um segundo a direção E e outro segundo a direção (E-NE), seja pelo menos $10\mu\text{V/m}$ (eficazes).

- a) Calcule a potência que o emissor deve fornecer ao dipolo.
- b) Considere agora que o dipolo está a receber um campo com $100\mu\text{V/m}$ (eficazes) linearmente polarizado segundo uma direção que faz 30° com o eixo do dipolo. Calcule a potência recebida.

2- Considere um dipolo curto de comprimento L colocado verticalmente à altura h sobre um plano perfeitamente condutor.

- a) Determine, justificando, a expressão do campo radiado a grande distância.
- b) Determine a altura h que dá origem a dois nulos no intervalo $]0^\circ, 90^\circ]$, sendo um deles segundo a direção $\theta=45^\circ$.
- c) Considerando que $L=\lambda/10$, $h=\lambda$ e $R_r = 1.95\Omega$, determine a diretividade.

3- Um dipolo com 1.25λ de comprimento e com uma eficiência de 80% é usado como antena transmissora à frequência de 100MHz. A antena recetora, que é um monopolo de $\lambda/4$ sem perdas, está a 50km de distância ligada a um recetor que é capaz de receber uma potência de -80dBm .

Assumindo que ao longo do dipolo existe uma distribuição de corrente sinusoidal, calcule a corrente máxima I_0 dessa distribuição necessária para estabelecer a ligação.

4- Dois dipolos de meia onda, colocados à distância de 10km, são usados à frequência de 100MHz, um como antena transmissora e outro como antena recetora, exatamente com a mesma polarização.

Ambos os dipolos são feitos de tubo com 10mm de diâmetro e com condutividade $\sigma=5.7 \times 10^6 \text{ S/m}$. Considere ainda que a oxidação, provocada pela exposição ao ambiente, produz uma resistência superficial adicional de 2Ω . A potência fornecida à antena transmissora é 10kW.

Calcule a potência recebida pela carga ligada à antena receptora, quando:

- Há adaptação perfeita entre estes dois elementos ($SWR=1$).
- O VSWR é 1.5.

5- Um dipolo com comprimento da ordem de meio comprimento de onda, preparado para polarização vertical à frequência de 300MHz, produz a grande distância um campo elétrico dado aproximadamente por: $|E(\theta, \phi, r)| = 50 I \frac{\sin(\theta)}{r}$ (V/m), sendo I a corrente à entrada do dipolo.

a) Em transmissão o dipolo está ligado a um gerador através de uma linha na qual há um VSWR=1.5. O gerador fornece à linha 100W e 5% da potência que entra no dipolo é dissipada nos condutores e dielétricos. Calcule:

A diretividade, o ganho, a eficiência, a potência radiada, a resistência de radiação e a corrente I .

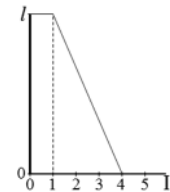
b) Considere agora que devido a um temporal o dipolo passou a fazer um ângulo de 30° com a vertical do lugar. Determine a potência que, em recepção, ele pode entregar à carga, supondo que a onda eletromagnética que está a incidir na antena tem uma densidade de potência de $13 \mu\text{W}/\text{m}^2$.

6- Um dipolo fino sem perdas, com distribuição de corrente sinusoidal e comprimento igual a 150cm, está a funcionar à frequência de 300MHz.

- Esboce o diagrama de radiação num plano contendo o eixo do dipolo.
- Sabendo que o dipolo está a radiar 0dBm, calcule o campo elétrico (em valores eficazes), que existe a 100km do dipolo na direção de máxima radiação.
- Qual deve ser o ganho de uma antena receptora que, colocada à mesma distância, mas na direção perpendicular ao eixo do dipolo, entregue à carga uma potência de -100dBm?

7-

- Defina comprimento efetivo de uma antena.
- Considere o monopolo de comprimento l , com a distribuição de corrente representada na figura seguinte. Determine o seu comprimento efetivo.



Capítulo 3

Distribuições Contínuas

3.1 Introdução

Viu-se no capítulo 2 que o campo radiado a grande distância por um dipolo de comprimento l , alinhado ao longo do eixo dos zz e com uma distribuição de corrente $I(z')$, é dado por

$$E(\theta) \cong j\eta \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z') e^{+j\beta z' \cos \theta} dz' \quad (3-1)$$

Considerando que a distribuição $I(z')$ só existe entre $z' = -\frac{l}{2}$ e $z' = \frac{l}{2}$, isto é, que $I(z') \equiv 0$ para $|z'| > \frac{l}{2}$, então pode-se escrever (3-1) como

$$E(\theta) \cong j\eta \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} I(z') e^{+j\beta z' \cos \theta} dz' \quad (3-2)$$

Fazendo as mudanças de variável $\xi = \frac{z'}{\lambda}$ e $s = \cos \theta$ pode-se escrever,

$$E(\theta) \cong j\eta \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \lambda \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi) e^{+j2\pi \xi s} d\xi \quad (3-3)$$

O integral da expressão (3-3) é formalmente uma transformada de Fourier. Deste modo pode-se concluir que, à parte um fator multiplicativo, o campo radiado a grande distância e a distribuição de corrente que o provoca, formam um par de transformadas de Fourier.

Duma forma mais geral, uma distribuição de corrente unidimensional $I(\xi)$, como a representada na Figura 3.1, provoca a grande distância um campo elétrico dado pela relação (3-4).

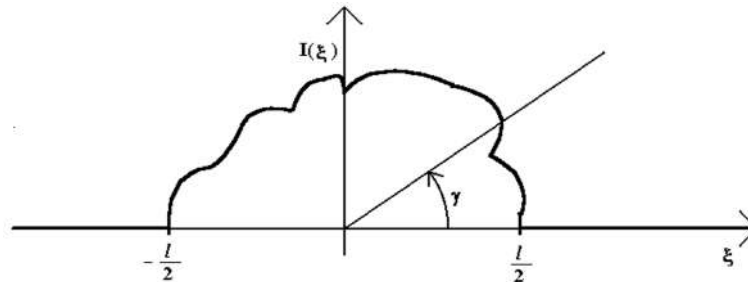


Figura 3.1 Distribuição unidimensional de corrente.

$$\mathbf{E}(s) = j\eta \frac{\beta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\gamma \lambda \mathcal{F}[\mathbf{I}(\xi)] \quad (3-4)$$

em que:

ξ - dimensão linear expressa em comprimentos de onda

$s = \cos \gamma$

γ - ângulo entre o eixo da distribuição e a direção de observação

e $\mathcal{F}[\mathbf{I}(\xi)]$, que passaremos a descrever como $\mathcal{E}(s)$, representa a transformada de Fourier da distribuição $\mathbf{I}(\xi)$, definida como $\mathcal{E}(s) = \mathcal{F}[\mathbf{I}(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}(\xi) e^{+j2\pi\xi \cos\gamma} d\xi$.

$\mathbf{I}(\xi)$ e $\mathcal{E}(s)$ formam, portanto, um par de transformadas expresso pela notação $\mathbf{I}(\xi) \longleftrightarrow \mathcal{E}(s)$.

Fazendo uma analogia com a área de processamento de sinal, e tendo como referência a notação usada nessa área [1],[2], pode-se estabelecer as seguintes correspondências apresentadas na Tabela 3-1.

Sinal e Espectro	Distribuição de corrente e Campo radiado
f Frequência	ξ Dimensão em comprimentos de onda
t Tempo	s Direção de observação ($\cos \gamma$)
V(f) Espectro	$\mathbf{I}(\xi)$ Distribuição de corrente
v(t) Sinal	$\mathbf{E}(s)$ Campo radiado

Tabela 3-1 Correspondências entre as variáveis usadas em processamento de sinal e em distribuições contínuas (antenas).

3.2 Exemplos de distribuições unidimensionais

3.2.1 Distribuição retangular

A distribuição retangular é a que existe num dipolo elementar em que se assume que a amplitude da corrente é uniforme e com o valor constante I_0 ao longo do seu comprimento. Uma distribuição deste tipo é definida pela notação expressa em (3-5),

$$\mathbf{I}(\xi) = \mathbf{I}_0 \Pi\left(\frac{\xi}{l_\lambda}\right) = \begin{cases} \mathbf{I}_0 & |\xi| < \frac{l_\lambda}{2} \\ 0 & |\xi| > \frac{l_\lambda}{2} \end{cases} \quad (3-5)$$

Cuja representação gráfica está feita na Figura 3.2 sendo $l_\lambda = \frac{l}{\lambda}$, o comprimento do dipolo expresso em comprimentos de onda. Assumindo que o dipolo está orientado segundo o eixo dos zz , o ângulo γ coincide com o ângulo θ .

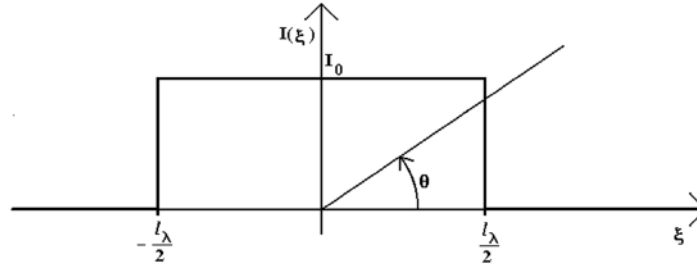


Figura 3.2 Distribuição retangular.

A transformada de $\mathbf{I}(\xi)$ é uma função sinc de acordo com o par de transformadas expresso na relação (3-6). Considera-se para a função sinc a definição $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$.

$$\mathbf{I}_0 \Pi\left(\frac{\xi}{l_\lambda}\right) \longleftrightarrow \mathbf{I}_0 l_\lambda \text{sinc}(l_\lambda s) \quad (3-6)$$

Se consideramos um dipolo de comprimento $l \leq \frac{\lambda}{50}$ isso implica $l_\lambda \leq \frac{1}{50}$.

Como θ varia de 0 a π , s varia em módulo de 0 a 1 e por consequência o valor da função $\text{sinc}\left(\frac{s}{50}\right)$ varia entre 1 e $\text{sinc}\left(\frac{1}{50}\right) = 0.999 \approx 1$. Em conclusão, neste caso particular $\mathcal{F}[\mathbf{I}(\xi)] \approx \mathbf{I}_0 l_\lambda$.

Substituindo esta transformada em (3-4) obtém-se a expressão (3-7) que dá o campo radiado a grande distância por dipolo elementar, de comprimento l e com distribuição de corrente retangular de valor $\mathbf{I}_0$

$$\mathbf{E}(s) = j\eta \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \text{sen } \theta \lambda \mathbf{I}_0 l_\lambda \quad (3-7)$$

que se pode ainda escrever como em

$$\mathbf{E}(\theta) = j\eta \frac{\beta \mathbf{I}_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \text{sen } \theta \quad (3-8)$$

Esta expressão é exatamente igual à que se obteve no capítulo 2 quando se estudou o dipolo elementar.

3.2.2 Distribuição triangular

A distribuição triangular é a que existe num dipolo curto em que se assume que a amplitude da corrente varia linearmente, desde 0 nos extremos até ao centro, onde atinge o valor máximo I_0 . Uma distribuição deste tipo é definida pela notação expressa em (3-9),

$$I(\xi) = I_0 \Lambda\left(\frac{\xi}{l_\lambda/2}\right) = \begin{cases} I_0 \left(1 - \frac{|\xi|}{l_\lambda/2}\right) & |\xi| < \frac{l_\lambda}{2} \\ 0 & |\xi| > \frac{l_\lambda}{2} \end{cases} \quad (3-9)$$

cuja representação gráfica está feita na Figura 3.3 sendo $l_\lambda = \frac{l}{\lambda}$, o comprimento do dipolo expresso em comprimentos de onda.

É interessante notar que esta distribuição pode ser obtida a partir da convolução de duas distribuições retangulares de largura $\frac{l_\lambda}{2}$, tal como se mostra na equação (3-10) e também na Figura 3.3.

Assumindo que o dipolo está orientado segundo o eixo dos zz , o ângulo γ coincide com o ângulo θ .

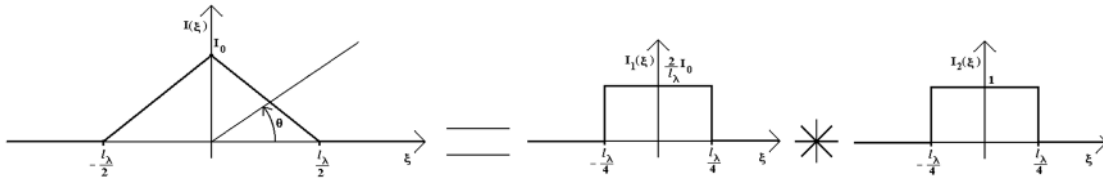


Figura 3.3 Distribuição triangular e sua equivalência à convolução de duas distribuições retangulares.

$$I_0 \Lambda\left(\frac{\xi}{l_\lambda/2}\right) = I_0 \frac{2}{l_\lambda} \Pi\left(\frac{\xi}{l_\lambda/2}\right) * \Pi\left(\frac{\xi}{l_\lambda/2}\right) \quad (3-10)$$

A transformada de $I(\xi)$ é uma função sinc^2 de acordo com o par de transformadas expresso na relação (3-11).

$$I_0 \Lambda\left(\frac{\xi}{l_\lambda/2}\right) \longleftrightarrow I_0 \frac{l_\lambda}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{l_\lambda}{2}s\right). \quad (3-11)$$

Este par de transformadas pode ser obtido diretamente duma tabela de transformadas de Fourier ou através da propriedade que estipula que à convolução num domínio corresponde a multiplicação no outro. Se, tal como se mostra também na Figura 3.3, a distribuição triangular de largura l_λ é igual à convolução de duas distribuições retangulares de largura $\frac{l_\lambda}{2}$, então a sua transformada é dada pelo produto de duas funções sinc, tal como se expressa na relação (3-12).

$$\mathcal{F}\left[I_0 \Lambda\left(\frac{\xi}{l_\lambda/2}\right)\right] = \frac{l_\lambda}{2} I_0 \frac{2}{l_\lambda} \text{sinc}\left(\frac{l_\lambda}{2}s\right) \times \frac{l_\lambda}{2} \text{sinc}\left(\frac{l_\lambda}{2}s\right) = I_0 \frac{l_\lambda}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{l_\lambda}{2}s\right) \quad (3-12)$$

Como θ varia de 0 a π , s varia em módulo de 0 a 1.

Se consideramos um dipolo curto de comprimento $l = \frac{\lambda}{10}$ isso implica que o valor da função $\text{sinc}^2\left(\frac{s}{20}\right)$ varia entre 1 e $\text{sinc}^2\left(\frac{1}{20}\right) = 0.996 \approx 1$.

Em conclusão, neste caso particular $\mathcal{F}[I(\xi)] \approx I_0 \frac{l_\lambda}{2}$. Substituindo esta transformada em (3-4) obtém-se a expressão (3-13) que dá o campo radiado a grande distância por dipolo curto, de comprimento l e com distribuição de corrente triangular com um valor máximo I_0

$$E(s) = j\eta \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \lambda I_0 \frac{l_\lambda}{2} \quad (3-13)$$

que se pode ainda escrever como em

$$E(\theta) = j\eta \frac{\beta I_0}{8\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \quad (3-14)$$

Esta expressão é exatamente igual à que se obteve no capítulo 2 quando se estudou o dipolo curto.

3.2.3 Distribuição cossinusoidal

Uma distribuição cossinusoidal de comprimento l_λ representa uma amplitude de corrente que varia, de acordo com uma arcada da função cosseno, desde 0 nos extremos até ao centro, onde atinge o valor máximo I_0 . A representação gráfica desta distribuição está feita na Figura 3.4. Esta distribuição é semelhante à que existe num dipolo de meia onda com distribuição de corrente sinusoidal.

Esta distribuição pode ser obtida pelo produto de distribuições. Uma distribuição que é uma função cosseno com amplitude I_0 e período $T = 2l_\lambda$ e uma distribuição retangular de altura 1 e largura l_λ , tal como se mostra na equação (3-15) e também na Figura 3.4

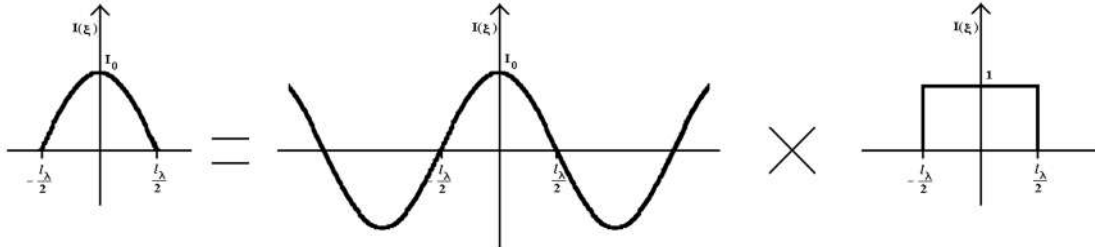


Figura 3.4 Distribuição cossinusoidal e sua equivalência ao produto de duas outras distribuições.

$$I(\xi) = I_0 \cos(2\pi s_0 \xi) \times \Pi\left(\frac{\xi}{l_\lambda}\right) \quad (3-15)$$

em que s_0 é a frequência desta função cosseno sendo $s_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2l_\lambda}$.

Se esta distribuição de largura l_λ é igual ao produto de duas distribuições, então a sua transformada é dada pela convolução das respetivas transformadas, tal como se expressa na relação (3-16).

$$\mathcal{F}[I(\xi)] = l_\lambda \text{sinc}(l_\lambda s) * \frac{I_0}{2} [\delta(s_0) + \delta(-s_0)] \quad (3-16)$$

Esta relação pode-se escrever como,

$$\mathcal{F}[I(\xi)] = \frac{I_0}{2} l_\lambda \{ \text{sinc}[l_\lambda (s - s_0)] + \text{sinc}[l_\lambda (s + s_0)] \} \quad (3-17)$$

Ou ainda,

$$\mathcal{F}[\mathbf{I}(\xi)] = \frac{\mathbf{I}_0}{2} l_\lambda \left\{ \frac{\text{sen}[\pi l_\lambda (s - s_0)]}{\pi l_\lambda (s - s_0)} + \frac{\text{sen}[\pi l_\lambda (s + s_0)]}{\pi l_\lambda (s + s_0)} \right\} \quad (3-18)$$

Simplificando esta expressão, facilmente lhe podemos dar a forma apresentada em (3-19).

$$\mathcal{F}[\mathbf{I}(\xi)] = \frac{\mathbf{I}_0}{2} l_\lambda \frac{\pi \cos(\pi l_\lambda s)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\pi l_\lambda s)^2} \quad (3-19)$$

Substituindo esta transformada em (3-4) e tendo em conta que $l_\lambda = \frac{l}{\lambda}$ e $s = \cos \theta$, obtém-se a expressão (3-20) que dá o campo radiado a grande distância por dipolo de comprimento l e com distribuição de corrente cossinusoidal com um valor máximo $\mathbf{I}_0$.

$$\mathbf{E}(\theta) = j\eta \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \text{sen } \theta \lambda \frac{\mathbf{I}_0}{2} \frac{l}{\lambda} \frac{\pi \cos\left(\pi \frac{l}{\lambda} \cos \theta\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\pi \frac{l}{\lambda} \cos \theta\right)^2} \quad (3-20)$$

No caso particular de $l = \frac{\lambda}{2}$, esta expressão simplifica-se e toma a forma indicada em (3-21).

$$\mathbf{E}(\theta) = j\eta \frac{\mathbf{I}_0}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\text{sen } \theta} \quad (3-21)$$

Esta expressão é exatamente a mesma que se obteve no capítulo 2 quando se estudou o dipolo de meia onda.

3.3 Aplicação dos teoremas da transformada de Fourier às distribuições contínuas

3.3.1 Teorema da mudança de escala. Comprimento da distribuição e largura de feixe.

Este teorema mostra que se num domínio as dimensões são expandidas por um dado fator, mantendo-se a forma da distribuição, então no outro domínio a forma também se mantém, mas as dimensões são comprimidas pelo mesmo fator. Isto é:

Se,

$$\mathbf{I}(\xi) \longleftrightarrow \mathcal{F}(s) \quad (3-22)$$

então,

$$\mathbf{I}(a\xi) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(\frac{s}{a}\right)$$

De acordo com (3-22) se a é maior que 1, $\mathbf{I}(a\xi)$ é uma versão comprimida de $\mathbf{I}(\xi)$ e se a é menor que 1, $\mathbf{I}(a\xi)$ é uma versão expandida de $\mathbf{I}(\xi)$. Em linguagem de antenas isto significa que, para o mesmo tipo de distribuição, quanto mais longa for a distribuição (maior for a antena), mais estreito é o feixe e, portanto, mais diretiva é a antena.

Exemplo 3.1

Determinação do campo radiado pela distribuição cossinusoidal com 5λ de comprimento, representada na Figura 3.5 (b).

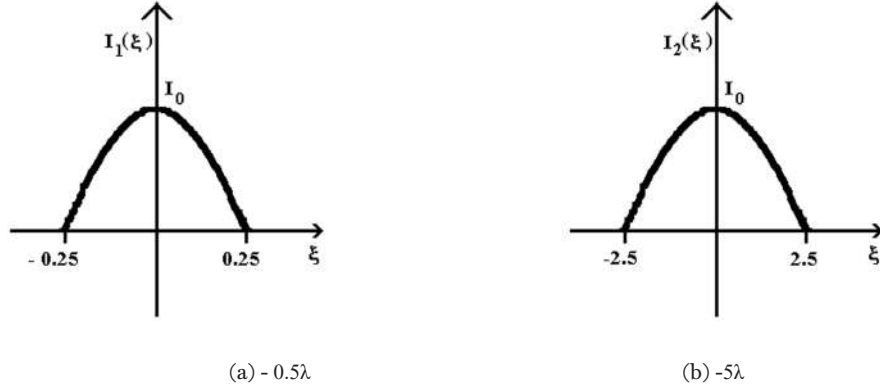


Figura 3.5 Distribuições cossinusoidais com 0.5λ e 5λ de comprimento.

A distribuição $\mathbf{I}_2(\xi)$ com 5 comprimentos de onda, é uma versão expandida de $\mathbf{I}_1(\xi)$, através dum fator $a=0.1$, isto é, $\mathbf{I}_2(\xi) = \mathbf{I}_1(0.1\xi)$. Atendendo, tal como se pode ver por (3-19), que

$$\mathbf{I}_1(\xi) \longleftrightarrow \mathcal{F}_1(s) = 0.25 \mathbf{I}_0 \frac{\pi \cos(0.5 \pi s)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (0.5 \pi s)^2}$$

então, pela relação (3-22), tem-se

$$\mathbf{I}_2(\xi) \longleftrightarrow \mathcal{F}_2(s) = \frac{1}{0.1} \mathcal{F}_1\left(\frac{s}{0.1}\right) = 2.5 \mathbf{I}_0 \frac{\pi \cos(5 \pi s)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (5 \pi s)^2} \quad (3-23)$$

Como é evidente a expressão (3-23) pode ser obtida diretamente de (3-19) substituindo l_λ por 5.

Para ilustrar que, para o mesmo tipo de distribuição, quanto mais longa for a distribuição mais estreito é o feixe do diagrama de radiação, na Figura 3.6 estão representadas as amplitudes normalizadas dos campos $E(\theta)$ radiados por quatro distribuições de comprimentos diferentes mas todas com o mesmo tipo de distribuição.

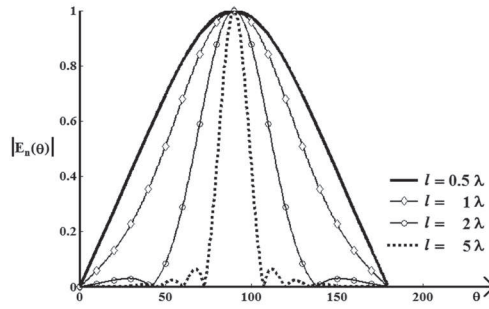


Figura 3.6 Campo elétrico radiado por distribuições cossinusoidais com diversos comprimentos.

3.3.2 Teorema do atraso. Variação da orientação do feixe.

De acordo com este teorema se num domínio se provocar um atraso de fase progressivo, no outro domínio resulta uma deslocação da forma de onda da respetiva transformada. Isto é, se

$$\mathbf{I}(\xi) \longleftrightarrow \mathcal{E}(s)$$

então,

$$\mathbf{I}(\xi) e^{-j2\pi s_0 \xi} \longleftrightarrow \mathcal{E}(s - s_0) \quad (3-24)$$

Isto significa que se pode variar a orientação do feixe da antena ou seja a direção de máxima radiação, de $s=0$ para $s=s_0$, introduzindo uma variação linear de fase de s_0 ciclos por comprimento de onda, ao longo da distribuição.

Exemplo 3.2

Consideremos as distribuições cossinusoidais $\mathbf{I}_1(\xi)$ e $\mathbf{I}_2(\xi)$, com 2λ de comprimento, representadas na Figura 3.7.

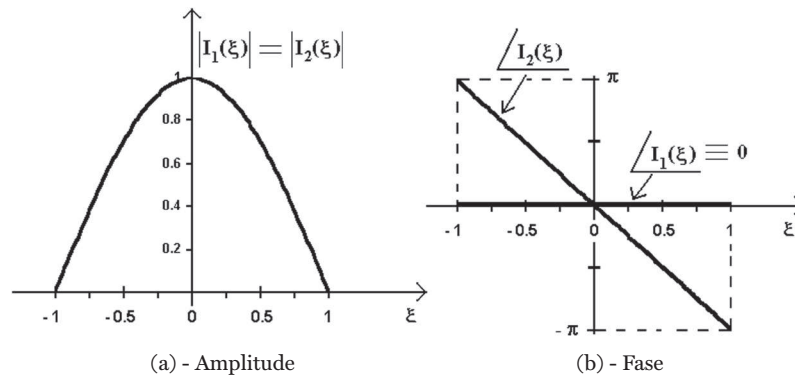


Figura 3.7 Distribuições cossinusoidais $\mathbf{I}_1(\xi)$ e $\mathbf{I}_2(\xi)$.

Como se pode ver pela Figura 3.7 $\mathbf{I}_2(\xi) = \mathbf{I}_1(\xi) e^{-j2\pi 0.5\xi}$, isto é, a fase de $\mathbf{I}_2(\xi)$ varia linearmente ao longo da distribuição, ao ritmo de 0.5 ciclos por comprimento de onda, ou seja de π radianos por comprimento de onda. Então, se:

$$\mathbf{I}_1(\xi) \longleftrightarrow \mathcal{E}_1(s)$$

teremos,

(3-25)

$$\mathbf{I}_2(\xi) = \mathbf{I}_1(\xi) e^{-j2\pi 0.5\xi} \longleftrightarrow \mathcal{E}_2(s) = \mathcal{E}_1(s - 0.5)$$

Tal como se indica na Figura 3.8.

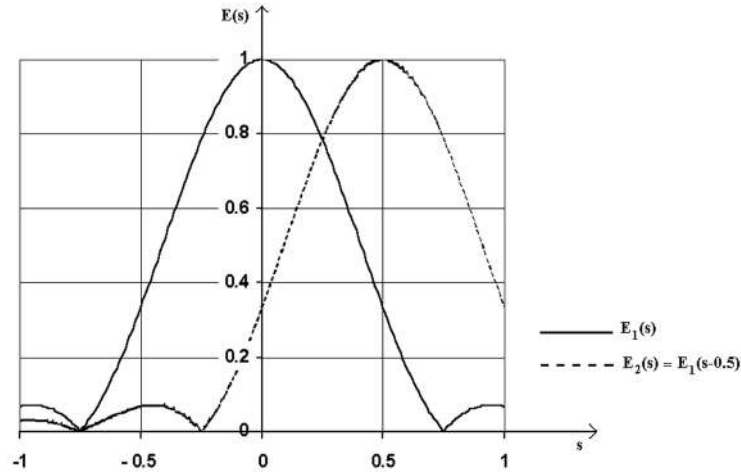


Figura 3.8 Transformadas $\mathcal{E}_1(s)$ e $\mathcal{E}_2(s)$ das distribuições cossinusoidais $\mathbf{I}_1(\xi)$ e $\mathbf{I}_2(\xi)$.

Como se pode ver desta figura, a distribuição $\mathbf{I}_1(\xi)$ tem uma transformada que assume o máximo para $s=0$. Como $s=\cos\theta$, isso significa que o campo radiado é máximo para $\theta=90^\circ$. Do mesmo modo se vê que a distribuição $\mathbf{I}_2(\xi)$ tem uma transformada que assume o máximo para $s=0.5$ o que significa que o campo radiado é máximo para $\theta=60^\circ$. Verifica-se então que, com uma variação de fase de π radianos por comprimento de onda, se provoca um desvio de 30° na orientação do máximo de radiação.

Convém notar que o diagrama de radiação em função da variável s mantém a sua forma apesar do deslocamento s_0 . No entanto o diagrama de radiação em função da variável θ torna-se distorcido devido à transformação trigonométrica $s=\cos(\theta)$ que relaciona s com θ e, ainda ao fator $\sin(\theta)$ que deve ser incorporado na expressão do diagrama de radiação, tal como se indica na relação (3-4). Esta distorção é ligeira na vizinhança do lobo principal para pequenos deslocamentos, contudo torna-se considerável na região dos lobos secundários extremos, tal como se pode ver pela Figura 3.9.

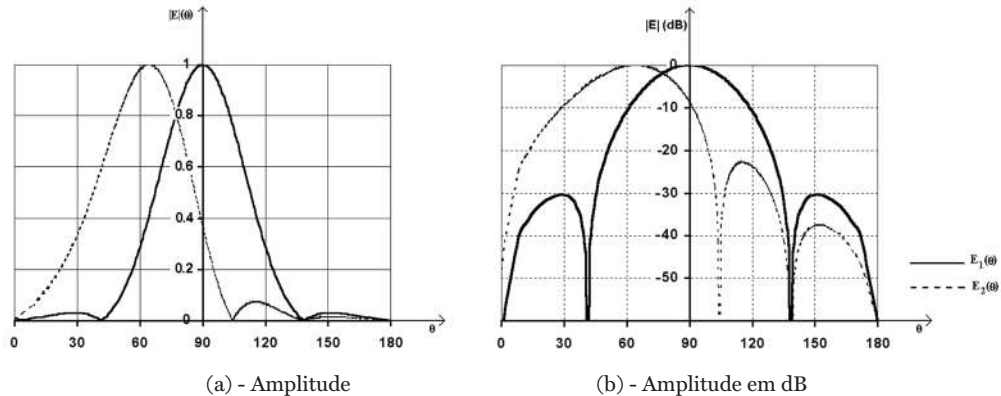


Figura 3.9 Diagramas de radiação produzidos pelas distribuições cossinusoidais $\mathbf{I}_1(\xi)$ e $\mathbf{I}_2(\xi)$.

Esta propriedade é usada em antenas diretivas para variar a orientação do feixe em alternativa à rotação mecânica da antena, por ser simples e rápida. É usada em antenas de RADAR na pesquisa rápida dum alvo e em antenas adaptativas (ou inteligentes) que se começam a usar em comunicações móveis para adaptar o diagrama de radiação às condições de tráfego.

3.3.3 Teorema da modulação. Interferómetro.

De acordo com este teorema se num domínio tivermos uma distribuição composta por duas distribuições idênticas, separadas da distância $2d_\lambda = 2\frac{d}{\lambda}$, no outro domínio tem-se uma distribuição que é igual ao produto da transformada da distribuição base pela função $2\cos(2\pi d_\lambda s)$.

Isto é, se

$$\mathbf{I}_1(\xi) \longleftrightarrow \mathcal{F}_1(s)$$

então,

$$\mathbf{I}_2(\xi) = \mathbf{I}_1(\xi - d_\lambda) + \mathbf{I}_1(\xi + d_\lambda) \longleftrightarrow \mathcal{F}_1(s) 2\cos(2\pi d_\lambda s) \quad (3-26)$$

Isto resulta do facto da distribuição $\mathbf{I}_2(\xi)$ ser igual à convolução da distribuição $\mathbf{I}_1(\xi)$ com dois impulsos de Dirac separados de $2d$, um centrado em $-d$ e outro em d . Como a convolução num domínio corresponde à multiplicação no outro domínio e como a transformada dos dois impulsos de Dirac é um cosseno, resulta a transformada indicada em (3-26).

Exemplo 3.3

Consideremos a distribuição $\mathbf{I}_2(\xi)$ representada na Figura 3.10.

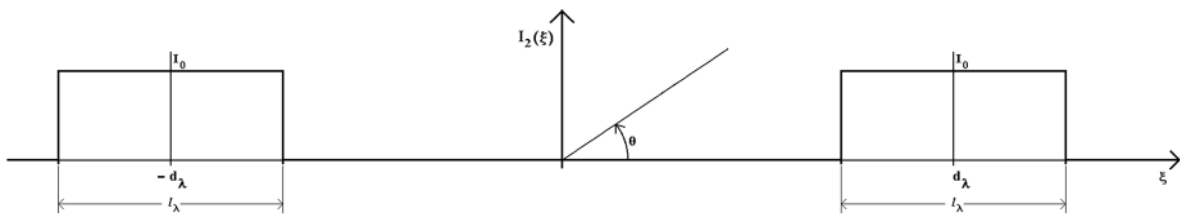


Figura 3.10 Distribuição $\mathbf{I}_2(\xi)$ composta por duas distribuições retangulares de largura l_λ separadas pela distância $2d_\lambda$.

Como se pode ver pela Figura 3.10, a distribuição $\mathbf{I}_2(\xi)$ é composta por duas distribuições retangulares de largura l_λ separadas pela distância $2d_\lambda$ então, de acordo com este teorema, se

$$\mathbf{I}_1(\xi) = I_0 \Pi\left(\frac{\xi}{l_\lambda}\right) \longleftrightarrow I_0 l_\lambda \text{sinc}(l_\lambda s)$$

então,

$$\mathbf{I}_2(\xi) = \mathbf{I}_1(\xi - d_\lambda) + \mathbf{I}_1(\xi + d_\lambda) \longleftrightarrow I_0 l_\lambda \text{sinc}(l_\lambda s) 2\cos(2\pi d_\lambda s) \quad (3-27)$$

Na Figura 3.11 está representada a transformada da distribuição $I_2(\xi)$, considerando $l_\lambda = 1$ e $d_\lambda = 5$.

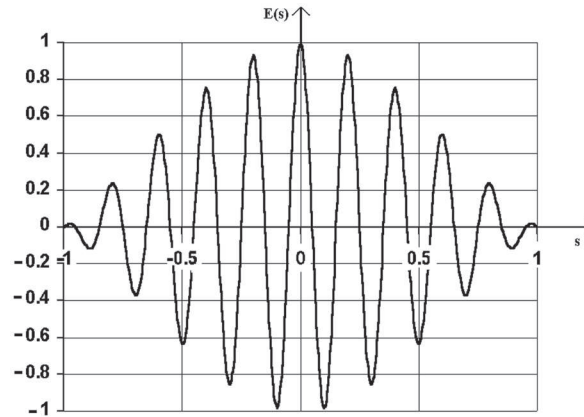


Figura 3.11 Transformada da distribuição $I_2(\xi)$, considerando $l_\lambda = 1$ e $d_\lambda = 5$.

Este arranjo é designado por interferómetro. É um modo simples de se conseguir com duas antenas de pequenas dimensões um lobo muito estreito, embora com lobos secundários muito elevados. É bastante usado em radioastronomia. Na Figura 3.12 está representada a parte central do diagrama de radiação correspondente à transformada da Figura 3.11 podendo ver-se que o lobo central tem uma LFEN de cerca de 6° . Verifica-se também que os lobos adjacentes têm quase o mesmo nível que o lobo principal.

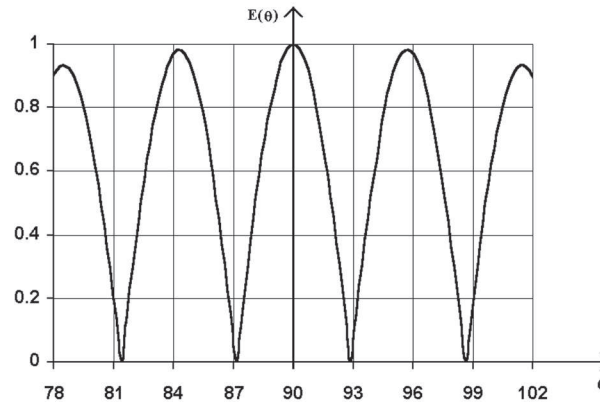


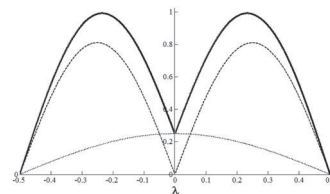
Figura 3.12 Parte central do diagrama de radiação correspondente à transformada da Figura 3.11.

Referências

- [1] CARLSON, A. Bruce, *Communication Systems*. McGraw-Hill, 1975.
- [2] BRACEWELL, R. N. , *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill, 1978.

Exercícios

1- Na figura ao lado, a curva a cheio representa a distribuição de corrente num dipolo com λ de comprimento. Esta distribuição (relativamente próxima da distribuição obtida na prática) é a soma de duas distribuições: uma é a ideal distribuição sinusoidal e a outra é uma arcada sinusoidal, idêntica à que existe ao longo dum dipolo de $\lambda/2$.

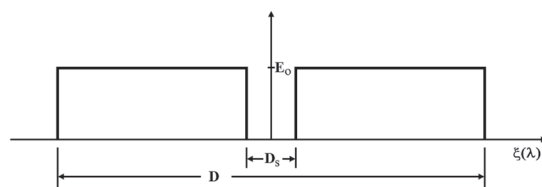


Com base nas propriedades da transformada de Fourier, determine a expressão do campo radiado a grande distância pelo dipolo de λ , com a distribuição de corrente a cheio.

2- Considere uma abertura unidimensional medindo 10 comprimentos de onda e com distribuição uniforme.

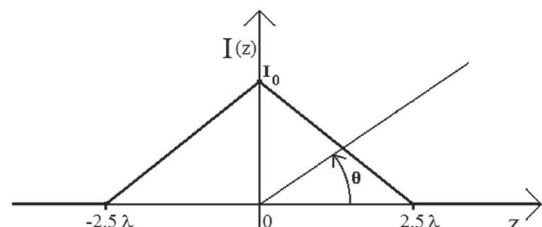
- Qual o desfaseamento, por comprimento de onda, que se deve introduzir ao longo da abertura para que a orientação do lóbulo principal do seu diagrama de radiação mude 30° ? Justifique os seus cálculos.
- Determine a LFMP com essa orientação. Compare essa largura com a existente antes da mudança de orientação, em termos quantitativos e de simetria.

3- Considere a distribuição unidimensional ilustrada na figura. Esta distribuição representa esquematicamente o efeito da obstrução causada por um obstáculo de largura D_s colocado em frente duma distribuição uniforme de largura D .



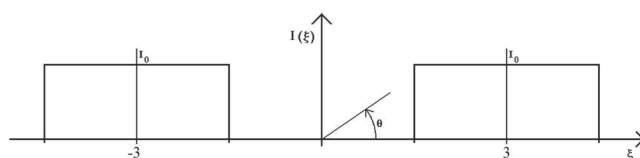
- Determine a expressão do campo radiado a grande distância.
- Compare, através dum esboço, o diagrama obtido nas condições da alínea a) com o que se teria obtido se não houvesse obstrução, isto é, se $D_s = 0$.

4- Considere a distribuição de corrente representada na figura.



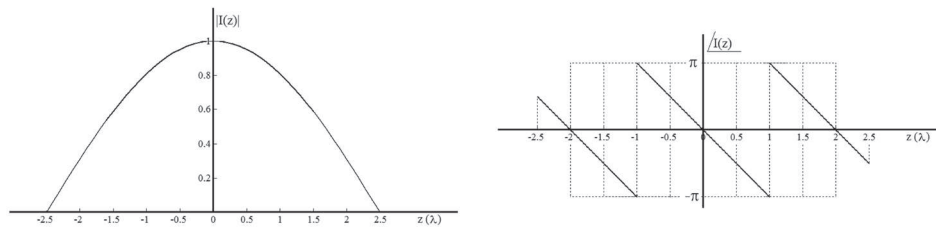
- Supondo que a distribuição tem fase uniforme, determine a expressão do campo radiado a grande distância com base no princípio de que a distribuição de corrente e o campo radiado formam um par de transformadas de Fourier.
- Determine a localização aproximada do primeiro lóbulo secundário e o seu nível relativo em dB.
- Determine o valor aproximado da LFMP.
- Esboce o diagrama de radiação num plano contendo o eixo dos zz , no intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$.
- Qual a modificação que deve sofrer a distribuição de corrente para que o lobo principal passe a ocorrer segundo a direção $\theta = 70^\circ$? Justifique.

5- Considere a seguinte distribuição contínua de corrente:



- Determine a expressão do campo radiado pela distribuição, a grande distância, com base nas transformadas de Fourier.
- Qual é a direção de máxima radiação?
- Determine a largura entre nulos do feixe principal.

6- Considere a distribuição de corrente indicada na figura seguinte em que a amplitude é uma arcada de cosseno.



a) Determine a expressão do campo radiado pela distribuição a grande distância, com base nas transformadas de Fourier.

b) Determine a direção de máxima radiação.

Sugestão: Determine o campo radiado por um dipolo de $\lambda/2$ e a partir daí aplique as propriedades da transformada de Fourier que achar convenientes.

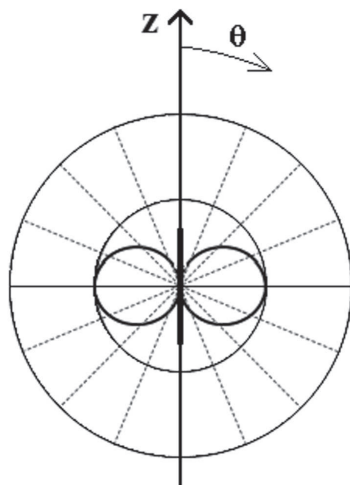
Capítulo 4

Agregados

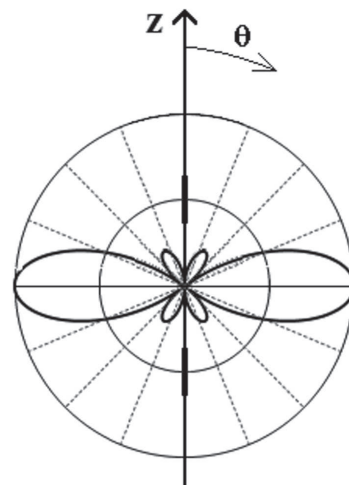
4.1 Introdução

Em muitas situações não é possível com uma única e simples antena, por exemplo um dipolo, produzir num dado local a densidade de potência desejada. Um meio de resolver este problema é usar um conjunto de antenas simples e idênticas, agrupadas e alimentadas de forma a dirigir a energia para o local pretendido e, deste modo, produzir nesse sítio a densidade de potência desejada. Um conjunto de antenas agrupadas com este fim chama-se agregado de antenas.

Para ilustrar este conceito consideremos um exemplo simples. Suponhamos que numa dada aplicação se estava a usar um dipolo de meia onda que tem por diagrama de radiação o indicado na Figura 4.1(a). Suponhamos que se verificou que num dado local situado na direção perpendicular ao eixo do dipolo o campo elétrico devia ter o dobro da amplitude. Se em vez dum dipolo se usar dois num arranjo colinear obtém-se o diagrama indicado na Figura 4.1(b) que mostra que o campo duplicou na direção pretendida.



(a) Diagrama de radiação produzido por um dipolo de meia onda.



(b) Diagrama de radiação produzido por um conjunto de dois dipolos de meia onda colineares.

Figura 4.1

O campo total produzido por este agregado obtém-se pela sobreposição dos campos radiados por cada dipolo. Consideremos o arranjo colinear representado na Figura 4.2.

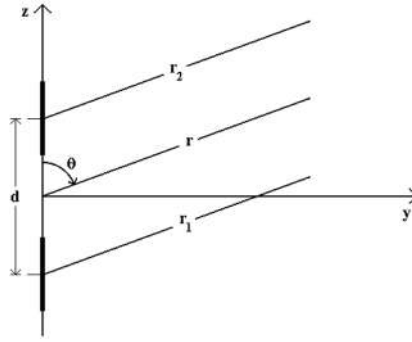


Figura 4.2 Agregado de dois dipolos de meia onda colineares.

De acordo com o estudo feito no capítulo 2, o campo radiado a grande distância pelo dipolo 1 é dado pela expressão (4-1) e o campo radiado a grande distância pelo dipolo 2 é dado pela expressão (4-2):

$$\mathbf{E}_{1\theta} \cong j\eta \frac{\mathbf{I}_1 e^{-j\beta r_1}}{2\pi r_1} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \quad (4-1)$$

$$\mathbf{E}_{2\theta} \cong j\eta \frac{\mathbf{I}_2 e^{-j\beta r_2}}{2\pi r_2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \quad (4-2)$$

Consideremos que $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I} e^{-j\frac{\alpha}{2}}$ e que $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I} e^{+j\frac{\alpha}{2}}$, isto é, os dipolos são alimentados por correntes de igual amplitude mas com uma diferença de fase α , estando a corrente $\mathbf{I}_2$ avançada de α relativamente a $\mathbf{I}_1$.

No campo distante podem-se fazer as seguintes aproximações: $r_1 \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta$ e $r_2 \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta$. Substituindo estas relações em (4-1) e (4-2) e, atendendo a que o campo total radiado pelo agregado é a soma dos campos $\mathbf{E}_{1\theta}$ e $\mathbf{E}_{2\theta}$, obtém-se (4-3):

$$\mathbf{E}_{T\theta} = \mathbf{E}_{1\theta} + \mathbf{E}_{2\theta} = j\eta \frac{\mathbf{I} e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \left[e^{j\left(\beta \frac{d}{2} \cos \theta + \frac{\alpha}{2}\right)} + e^{-j\left(\beta \frac{d}{2} \cos \theta + \frac{\alpha}{2}\right)} \right] \quad (4-3)$$

que se pode ainda escrever como:

$$\mathbf{E}_{T\theta} = \underbrace{j\eta \frac{\mathbf{I} e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]}_{\text{FE}} \underbrace{\left[2 \cos\left(\frac{\beta d \cos \theta + \alpha}{2}\right) \right]}_{\text{FA}} \quad (4-4)$$

A expressão (4-4) é o produto de dois fatores. O fator **FE** (fator de elemento) é a expressão do campo radiado por um único elemento (neste caso um dipolo de meia onda). O fator **FA** (fator de agregado) traduz o modo como os elementos estão colocados e alimentados (neste caso dois elementos separados pela distância d e alimentados com correntes de igual amplitude mas com uma diferença de fase α).

O caso representado na Figura 4.1 corresponde a dois dipolos alimentados em fase, isto é, $\alpha=0^\circ$.

Nesse caso o FA é dado por $2\cos\left(\frac{\beta d \cos\theta}{2}\right)$ que para $\theta=90^\circ$ assume o valor 2 e que, portanto, duplica o campo produzido por um único dipolo.

Como se pode ver pela equação (4-4) o diagrama de radiação dum agregado depende do elemento que se está a usar, através do FE e depende do número de elementos, do modo como estão colocados e do modo como estão alimentados, através do FA. O FA pode ser obtido usando como elementos fontes isotrópicas como veremos mais à frente.

Por exemplo, no caso de duas fontes isotrópicas em fase separados pela distância d , o FA é dado por $2\cos\left(\frac{\beta d \cos\theta}{2}\right)$.

Para se obter o diagrama final basta multiplicar o FA pelo diagrama do elemento.

Assim, pode-se estudar facilmente diversos agregados que só diferem entre si pelo elemento usado. Este conceito é conhecido por multiplicação de diagramas e está ilustrado na Figura 4.3 para o caso do exemplo apresentado na Figura 4.2, em que os dois dipolos estão alimentados em fase, isto é, $\alpha=0^\circ$ e separados por uma distância entre centros, $d=0.8\lambda$.

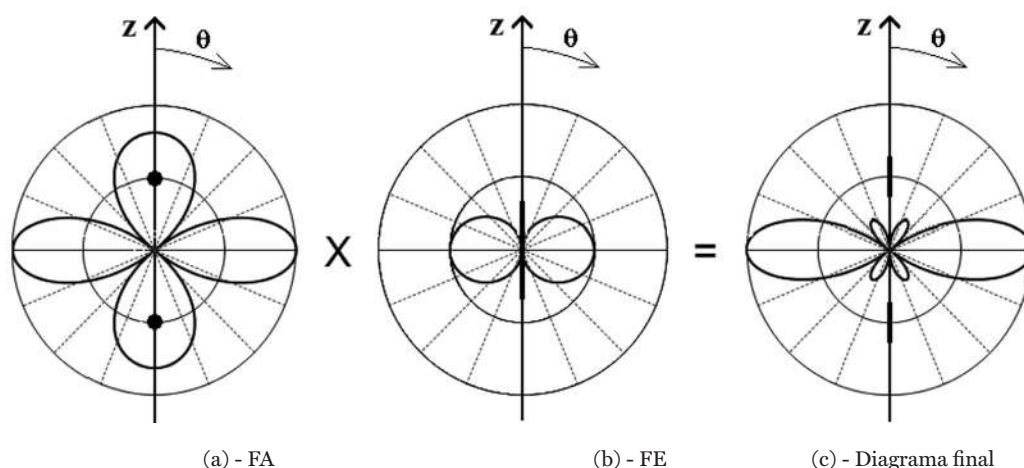


Figura 4.3 Ilustração do conceito de multiplicação de diagramas para o caso em que $\alpha=0^\circ$ e $d=0.8\lambda$.

Um agregado é geralmente composto por elementos idênticos colocados segundo um arranjo geométrico regular. Os agregados podem ter configurações geométricas diversas. Quando os elementos estão colocados ao longo dum eixo o agregado é linear. Se os elementos estão colocados num plano de acordo com uma quadrícula, o agregado é planar. Se os elementos estão colocados ao longo duma circunferência o agregado é circular. Para além destas configurações canónicas há agregados que são projetados para serem construídos sobre superfícies com uma forma específica, como por exemplo a fuselagem dum avião. Estes agregados são designados por agregados conformáveis designados na literatura anglo-saxónica por *conformal arrays*.

Variando a alimentação dos elementos, nomeadamente a fase, é possível dirigir o lobo principal para diversas direções do espaço com grande rapidez. Estes agregados com varrimento de feixe são conhecidos na literatura anglo-saxónica por *phased arrays*. A variação da alimentação dos elementos também pode produzir feixes múltiplos, o que permite emitir ou receber energia de mais do que uma direção ao mesmo tempo. Estas características são as principais vantagens dum agregado, no entanto isto acarreta a construção duma malha muito complexa para alimentar os diversos elementos implicando limitações na largura de banda. Outro problema dos agregados é o acoplamento mútuo entre elementos.

4.2 Agregado linear uniforme

Um agregado de elementos idênticos colocados equiespaçadamente ao longo dum eixo, alimentados com correntes de igual amplitude e com a mesma diferença de fase entre eles é um agregado linear e uniforme. Como a diferença de fase entre as sucessivas correntes é a mesma, há ao longo do agregado uma variação progressiva de fase.

O FA pode ser obtido usando como elementos fontes isotrópicas. Obtido o FA, quando se escolher o elemento que efetivamente vai ser usado, basta recorrer ao conceito de multiplicação de diagramas. Na Figura 4.4 está representado um agregado linear uniforme de N fontes isotrópicas, colocadas ao longo do eixo dos zz, separadas da distância d e tendo uma diferença fase entre elas de α .

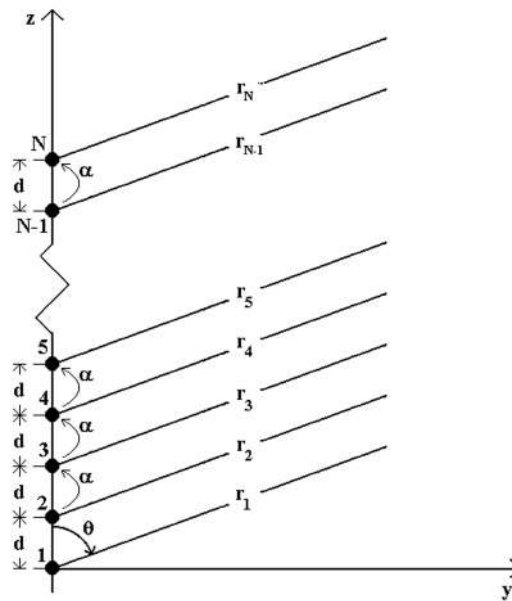


Figura 4.4 Agregado linear uniforme de N fontes isotrópicas separadas da distância d e tendo uma diferença fase entre elementos de α . Geometria válida para o campo distante.

Uma fonte isotrópica radia um campo dado pela expressão (4-5):

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (4-5)$$

em que $\mathbf{I}$ representa a excitação da fonte caracterizada por $\mathbf{I} = \mathbf{I}e^{j\phi}$. No caso do agregado uniforme as fontes terão as excitações indicadas em (4-6):

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}e^{j\phi_1}; \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}e^{j\phi_2}; \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}e^{j\phi_3}; \dots; \mathbf{I}_{N-1} = \mathbf{I}e^{j\phi_{N-1}}; \mathbf{I}_N = \mathbf{I}e^{j\phi_N} \quad (4-6)$$

$$\text{com: } (\phi_2 - \phi_1) = (\phi_3 - \phi_2) = (\phi_4 - \phi_3) \cdots = (\phi_N - \phi_{N-1}) = \alpha$$

Assim, teremos para as diversas fontes os seguintes campos:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I} e^{j\phi_1} \frac{e^{-j\beta r_1}}{4\pi r_1}; \mathbf{E}_2 = \mathbf{I} e^{j\phi_2} \frac{e^{-j\beta r_2}}{4\pi r_2}; \mathbf{E}_3 = \mathbf{I} e^{j\phi_3} \frac{e^{-j\beta r_3}}{4\pi r_3}; \dots; \mathbf{E}_N = \mathbf{I} e^{j\phi_N} \frac{e^{-j\beta r_N}}{4\pi r_N} \quad (4-7)$$

Da relação (4-6) pode-se concluir que o desfasamento progressivo de fase pode ser expresso pelas relações indicadas em (4-8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_2 = \phi_1 + \alpha \\ \phi_3 = \phi_2 + \alpha = \phi_1 + 2\alpha \\ \phi_4 = \phi_3 + \alpha = \phi_1 + 3\alpha \\ . \\ \phi_n = \phi_{n-1} + \alpha = \phi_1 + (n-1)\alpha \\ . \\ \phi_N = \phi_{N-1} + \alpha = \phi_1 + (N-1)\alpha \end{array} \right. \quad (4-8)$$

Para campo distante podemos usar as aproximações já estabelecidas e que neste caso são as escritas seguidamente em (4-9):

$$\left\{ \begin{array}{l} r_2 \approx r_1 - d \cos \theta \\ r_3 \approx r_2 - d \cos \theta = r_1 - 2d \cos \theta \\ r_4 \approx r_3 - d \cos \theta = r_1 - 3d \cos \theta \\ . \\ r_n \approx r_{n-1} - d \cos \theta = r_1 - (n-1)d \cos \theta \\ . \\ r_N \approx r_{N-1} - d \cos \theta = r_1 - (N-1)d \cos \theta \end{array} \right. \quad \text{no expoente} \quad (4-9)$$

e

$$r_1 \approx r_2 \approx r_3 \approx r_4 \dots \approx r_n \quad \text{no denominador}$$

O campo total é a soma dos campos radiados por todas as fontes, isto é, é dado pela relação (4-10):

$$\mathbf{E}_T = \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n \quad (4-10)$$

Substituindo as relações (4-8) e (4-9) em (4-10), obtém-se a expressão do campo $\mathbf{E}_T$ indicada em (4-11):

$$\mathbf{E}_T = I e^{j\phi_1} \frac{e^{-j\beta r_1}}{4\pi r_1} + I e^{j(\phi_1 + \alpha)} \frac{e^{-j\beta(r_1 - d \cos \theta)}}{4\pi r_1} + \dots + I e^{j[\phi_1 + (N-1)\alpha]} \frac{e^{-j\beta[r_1 - (N-1)d \cos \theta]}}{4\pi r_1} \quad (4-11)$$

A expressão (4-11) pode-se ainda escrever como indicado em (4-12):

$$\mathbf{E}_T = I e^{j\phi_1} \frac{e^{-j\beta r_1}}{4\pi r_1} \left[1 + e^{j\alpha} e^{j\beta d \cos \theta} + \dots + e^{j(n-1)\alpha} e^{j\beta(n-1)d \cos \theta} + \dots + e^{j(N-1)\alpha} e^{j\beta(N-1)d \cos \theta} \right] \quad (4-12)$$

ou ainda:

$$\mathbf{E}_T = I e^{j\phi_1} \frac{e^{-j\beta r_1}}{4\pi r_1} \underbrace{\left[1 + e^{j(\beta d \cos \theta + \alpha)} + \dots + e^{j(n-1)(\beta d \cos \theta + \alpha)} + \dots + e^{j(N-1)(\beta d \cos \theta + \alpha)} \right]}_{\text{FA}}$$

FE

Nesta última expressão identificam-se claramente o fator de elemento, que é o diagrama duma fonte isotrópica, e o fator de agregado que é função do número N de elementos, da distância d entre eles e do desfasamento α entre as suas excitações.

O fator de agregado pode ser escrito numa forma mais compacta como se faz em (4-13):

$$\mathbf{FA} = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)\Psi} \quad \text{com} \quad \Psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (4-13)$$

Das expressões (4-12) ou (4-13), conclui-se que o FA é a soma numa progressão geométrica de N termos e razão $e^{j\Psi}$, sendo o primeiro termo igual a 1. Então, o FA é dado pela expressão (4-14):

$$\mathbf{FA} = 1 \frac{1 - (e^{j\Psi})^N}{1 - e^{j\Psi}} \quad \text{com} \quad \Psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (4-14)$$

Esta expressão pode-se simplificar, tal como se indica em (4-15):

$$\mathbf{FA} = \frac{1 - e^{jN\Psi}}{1 - e^{j\Psi}} = \frac{1 - \frac{e^{jN\Psi}}{2}}{\frac{e^{j\Psi}}{2} - \frac{e^{jN\Psi}}{2}} = \frac{e^{-jN\frac{\Psi}{2}} - e^{jN\frac{\Psi}{2}}}{e^{-j\frac{\Psi}{2}} - e^{j\frac{\Psi}{2}}} \frac{e^{-j\frac{\Psi}{2}}}{e^{-jN\frac{\Psi}{2}}} = e^{j\frac{\Psi}{2}(N-1)} \frac{e^{jN\frac{\Psi}{2}} - e^{-jN\frac{\Psi}{2}}}{e^{j\frac{\Psi}{2}} - e^{-j\frac{\Psi}{2}}} \quad (4-15)$$

O FA pode-se ainda escrever numa forma mais compacta como em (4-16):

$$\mathbf{FA} = e^{j\frac{\Psi}{2}(N-1)} \frac{e^{jN\frac{\Psi}{2}} - e^{-jN\frac{\Psi}{2}}}{e^{j\frac{\Psi}{2}} - e^{-j\frac{\Psi}{2}}} = e^{j\frac{\Psi}{2}(N-1)} \frac{\text{sen}\left(N\frac{\Psi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Psi}{2}\right)} \quad (4-16)$$

O fator $e^{j\frac{\Psi}{2}(N-1)}$ não afeta a amplitude e, portanto, a forma do FA é igual a 1 se se escolher o centro do agregado para a referência das fases. De facto, nesse caso a expressão do FA passa a ter a forma indicada em (4-17):

$$\mathbf{FA} = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi} + e^{-j\left(\frac{N-3}{2}\right)\Psi} + \dots + e^{-j\Psi} + e^{j\Psi} + \dots + e^{j\left(\frac{N-3}{2}\right)\Psi} + e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi} \quad (4-17)$$

Esta expressão continua a ser a soma numa progressão geométrica de N termos e razão $e^{j\Psi}$, mas com o primeiro termo igual a $e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi}$, pelo que o FA é dado simplesmente pela expressão (4-18):

$$\mathbf{FA} = \frac{\text{sen}\left(N\frac{\Psi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Psi}{2}\right)} \quad \text{com} \quad \Psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (4-18)$$

Esta é a expressão que se usará para o FA dum agregado linear uniforme de N elementos separados da distância d e tendo uma diferença fase α entre eles.

Convém notar que até agora, por conveniência de cálculos, considerou-se sempre o agregado alinhado segundo o eixo dos zz. No entanto, por vezes é conveniente considerar agregados alinhados segundo outros eixos.

Nas expressões obtidas para o fator de agregado alinhado segundo o eixo dos zz, aparece explicitamente o ângulo θ , que não é mais do que o ângulo entre o eixo do agregado e a direcção de observação. Então, numa forma geral, dever-se-á substituir, nessas expressões o ângulo θ pelo ângulo γ , que representa o ângulo entre o eixo do agregado que se está a considerar e a direcção de observação.

Por exemplo, no caso dum agregado com o eixo orientado segundo o eixo dos xx , o ângulo entre o eixo do agregado e a direção de observação é γ_x , cujo cosseno é dado por $\cos \gamma_x = \hat{x} \cdot \hat{r} = \sin\theta \cos\phi$. Assim, o FA dum agregado linear uniforme de N elementos, alinhados segundo o eixo dos xx , separados da distância d_x e tendo uma diferença fase α_x entre eles, é dado por (4-19):

$$(FA)_x = \frac{\sin\left(N \frac{\Psi_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_x}{2}\right)} \quad \text{com} \quad \Psi_x = \beta d_x \cos \gamma_x + \alpha_x \quad (4-19)$$

Dum modo semelhante, no caso dum agregado com o eixo orientado segundo o eixo dos yy , o ângulo entre o eixo do agregado e a direção de observação é γ_y , cujo cosseno é dado por $\cos \gamma_y = \hat{y} \cdot \hat{r} = \sin\theta \sin\phi$, pelo que o FA dum agregado linear uniforme de N elementos, alinhados segundo o eixo dos yy , separados da distância d_y e tendo uma diferença fase α_y entre eles, é dado por (4-20):

$$(FA)_y = \frac{\sin\left(N \frac{\Psi_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_y}{2}\right)} \quad \text{com} \quad \Psi_y = \beta d_y \cos \gamma_y + \alpha_y \quad (4-20)$$

Considerando novamente a expressão (4-18), vê-se que o seu máximo ocorre para $\Psi=0$ e vale N , pelo que o FA normalizado é dado pela expressão (4-21). Esta função é periódica com período 2π .

$$(FA)_n = \frac{\sin\left(N \frac{\Psi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right)} \quad \text{com} \quad \Psi = \beta d \cos\theta + \alpha \quad (4-21)$$

Para se poder ver o tipo de andamento desta função, na Figura 4.5 estão representados os FA para quatro casos.

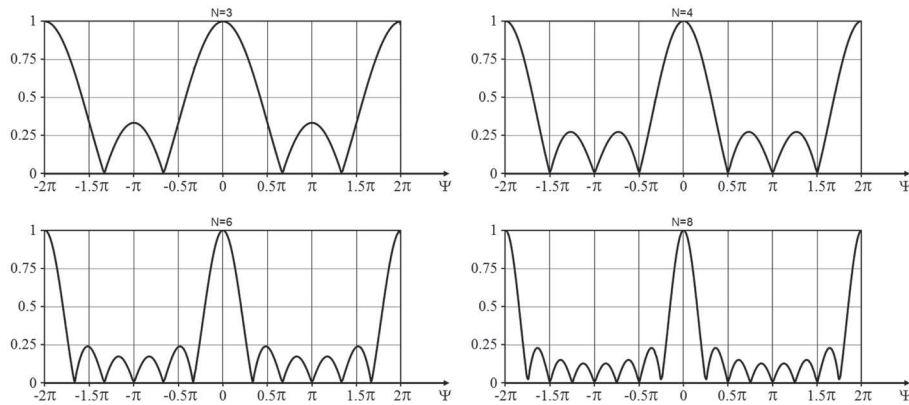


Figura 4.5 Amplitude do fator de agregado dum agregado linear uniforme para 4 valores de N .

Destes gráficos podem-se tirar algumas propriedades do FA, tais como:

1. O lobo principal fica mais estreito, isto é, o agregado torna-se mais diretivo quando o N aumenta.
2. O número de lobos aumenta quando N aumenta. Em cada período (0 a 2π) há $(N-2)$ lobos secundários para além do lobo principal.
3. O nível dos lobos secundários decresce quando N aumenta.

Para valores de Ψ próximos de 0 onde a função $(\mathbf{FA})_n$ é máxima, pode-se considerar que $\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \approx \frac{\Psi}{2}$.

Substituindo esta aproximação em (4-21), obtém-se a expressão aproximada $(\mathbf{FA})^\sim$ para o fator de agregado tal como se indica em (4-22):

$$(\mathbf{FA})_n \approx \frac{\sin\left(N\frac{\Psi}{2}\right)}{N\frac{\Psi}{2}} = (\mathbf{FA})^\sim_n \quad \text{para pequenos valores de } \Psi \quad (4-22)$$

Por a função $\frac{\sin(x)}{x}$ ser bem conhecida e estudada, pode ser vantajoso em certos casos usar a expressão aproximada $(\mathbf{FA})^\sim$ para o fator de agregado em vez da expressão exata $(\mathbf{FA})_n$.

No entanto é necessário ter cuidado pois estas expressões só são próximas para valores pequenos de Ψ tal como se pode ver pela Figura 4.6.

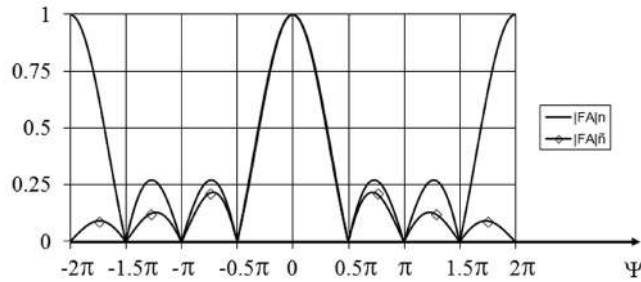


Figura 4.6 Comparação entre a expressão aproximada $(\mathbf{FA})^\sim$ e a expressão exata $(\mathbf{FA})_n$ do fator de agregado, para $N=4$.

4.2.1 Determinação das características do Fator de Agregado

Para caracterizar o **FA** é importante obter expressões para a posição dos máximos (isto é, do lobo principal e das suas eventuais réplicas), expressões para a posição dos nulos, para a posição dos máximos dos lobos secundários e ainda da largura a meia potência do lobo principal.

4.2.1.1 Determinação da posição dos máximos

Os máximos da função $|\mathbf{FA}|_n$ ocorrem quando $\frac{\Psi}{2} = \pm m\pi$. Isto implica as seguintes relações:

$$\Psi = \pm 2m\pi \quad \text{com } m=0,1,2,3,\dots \quad (4-23)$$

Ou seja:

$$\beta d \cos \theta_m + \alpha = \pm 2m\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_m + \alpha = \pm 2m\pi \quad \text{ou seja:} \quad (4-24)$$

$$\cos \theta_m = (\pm 2m\pi - \alpha) \frac{\lambda}{2\pi d} \quad \text{com } m=0,1,2,3,\dots$$

Donde se obtêm os ângulos θ_m que correspondem às posições dos máximos, tal como se indica em (4-25):

$$\theta_m = \pm \cos^{-1} \left[(\pm 2m\pi - \alpha) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \quad \text{com } m=0,1,2,3,\dots \quad (4-25)$$

Como se disse na introdução, para um dado agregado é possível dirigir o lobo principal para uma determinada direção variando a fase entre elementos. Por exemplo, a condição a que deve obedecer a fase para que o máximo ocorra numa direção θ_0 , pode-se obter da relação (4-24) impondo a condição (4-26):

$$\beta d \cos \theta_0 + \alpha = \pm 2m\pi \Rightarrow \alpha = -\beta d \cos \theta_0 \pm 2m\pi \Rightarrow \alpha = -\beta d \cos \theta_0 \quad (4-26)$$

Um caso particular importante é obter o valor de α para que o máximo da radiação ocorra na direção transversal ao eixo do agregado, isto é, para $\theta=90^\circ$. Fazendo $\theta_0=90^\circ$ em (4-26) obtém-se (4-27):

$$\alpha = -\beta d \cos 90^\circ = 0 \quad (4-27)$$

Um agregado deste tipo designa-se agregado transversal e, como se pode ver por (4-27), caracteriza-se por ter todos os seus elementos alimentados em fase.

Então, para um agregado transversal, os ângulos θ_m que correspondem às direções dos máximos são dadas por (4-28):

$$\theta_m = \pm \cos^{-1} \left(\pm m \frac{\lambda}{d} \right) \quad \text{com } m=0,1,2,3,\dots \quad (4-28)$$

Outro caso particular importante é obter o valor de α para que o máximo da radiação ocorra segundo o eixo do agregado. Um agregado deste tipo designa-se agregado longitudinal. Neste caso há duas possibilidades de orientar o feixe, na direção $\theta=0^\circ$ ou na direção $\theta=180^\circ$.

Fazendo $\theta_0=0^\circ$ em (4-26) obtém-se (4-29):

$$\alpha = -\beta d \cos 0^\circ = -\beta d \quad (4-29)$$

Substituindo esta relação em (4-25) obtêm-se os ângulos θ_m que correspondem às direções dos máximos e que são dadas por (4-30):

$$\theta_m = \pm \cos^{-1} \left[\left(\pm 2m\pi + \frac{2\pi}{\lambda} d \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \Rightarrow \theta_m = \pm \cos^{-1} \left[-\frac{m\lambda}{d} + 1 \right] \quad \text{com } m=0,1,2,3,\dots \quad (4-30)$$

Fazendo $\theta_0=180^\circ$ em (4-26) obtém-se:

$$\alpha = -\beta d \cos 180^\circ = +\beta d \quad (4-31)$$

Substituindo esta relação em (4-25) obtêm-se os ângulos θ_m que correspondem às direções dos máximos e que são dadas por (4-32):

$$\theta_m = \pm \cos^{-1} \left[\left(\pm 2m\pi - \frac{2\pi}{\lambda} d \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \Rightarrow \theta_m = \pm \cos^{-1} \left[\frac{m\lambda}{d} - 1 \right] \quad \text{com } m=0,1,2,3,\dots \quad (4-32)$$

Em certas condições um agregado pode ter lobos principais repetidos que na literatura anglo-saxónica são designados por *grating lobes*. Por exemplo, se $\alpha = \pm \pi$ obtém-se um agregado longitudinal com dois lobos principais repetidos, um para $\theta=0^\circ$ e outro para $\theta=180^\circ$. Se $\alpha = \pm 2\pi$ obtém-se um agregado com quatro lobos principais repetidos. Dois para $\theta=\pm 90^\circ$, um para $\theta=0^\circ$ e outro para $\theta=180^\circ$. Este agregado particular é simultaneamente transversal e longitudinal.

Dum modo geral, no entanto, pretende-se que um agregado só tenha um lobo principal, ou seja, um único máximo. Por isso é importante estudar quais as condições a que deve obedecer um agregado para não ter lobos repetidos. Essas condições obtêm-se a partir de (4-25), substituindo α pela condição (4-26), em que θ_0 é o ângulo para o qual se pretende que o único máximo esteja dirigido.

Da relação (4-25), tendo em conta que $-1 \leq \cos \theta_m \leq 1$, vê-se que para haver máximos repetidos deve-se verificar a condição expressa em (4-33):

$$-1 \leq \pm m \frac{\lambda}{d} + \cos \theta_0 \leq 1 \quad \text{com } m=1,2,3,\dots \quad (4-33)$$

Esta condição é equivalente a:

$$\left[\left(-1 \leq m \frac{\lambda}{d} + \cos \theta_0 \right) \wedge \left(m \frac{\lambda}{d} + \cos \theta_0 \leq 1 \right) \right] \vee \left[\left(-1 \leq -m \frac{\lambda}{d} + \cos \theta_0 \right) \wedge \left(-m \frac{\lambda}{d} + \cos \theta_0 \leq 1 \right) \right] \quad \text{com } m=1,2,3,\dots \quad (4-34)$$

que por sua vez é equivalente a:

$$\left(d \geq \frac{m\lambda}{-1 - \cos \theta_0} \wedge d \geq \frac{m\lambda}{1 - \cos \theta_0} \right) \vee \left(d \geq \frac{m\lambda}{1 + \cos \theta_0} \wedge d \geq \frac{m\lambda}{-1 + \cos \theta_0} \right) \quad \text{com } m=1,2,3,\dots \quad (4-35)$$

Para satisfazer esta última condição é necessário que:

$$\left(d \geq \frac{m\lambda}{1 - \cos \theta_0} \right) \vee \left(d \geq \frac{m\lambda}{1 + \cos \theta_0} \right) \quad \text{com } m=1,2,3,\dots \quad (4-36)$$

quando θ_0 varia de 0° a 90° , $\cos \theta_0 > 0 \Rightarrow \cos \theta_0 = |\cos \theta_0|$ que por sua vez implica $(1 - \cos \theta_0) < (1 + \cos \theta_0)$.

Esta relação implica que se deve escolher a condição $d \geq \frac{m\lambda}{1 + \cos \theta_0} = \frac{m\lambda}{1 + |\cos \theta_0|}$.

Quando θ_0 varia de 90° a 180° , $\cos \theta_0 < 0 \Rightarrow \cos \theta_0 = -|\cos \theta_0|$ que por sua vez implica $(1 - \cos \theta_0) > (1 + \cos \theta_0)$.

Esta relação implica que, neste caso, se deve escolher a condição $d \geq \frac{m\lambda}{1 - \cos \theta_0} = \frac{m\lambda}{1 + |\cos \theta_0|}$.

Em conclusão, para haver repetições do lobo principal deve-se verificar a condição $d \geq \frac{m\lambda}{1 + |\cos \theta_0|}$.

Por exemplo, se $\frac{\lambda}{1 + |\cos \theta_0|} \leq d \leq \frac{2\lambda}{1 + |\cos \theta_0|}$ ocorrerá apenas uma repetição do lobo principal.

Se $\frac{2\lambda}{1 + |\cos \theta_0|} \leq d \leq \frac{3\lambda}{1 + |\cos \theta_0|}$ haverá duas repetições do lobo principal e assim sucessivamente.

Do atrás exposto conclui-se, portanto que, se não se quiser nenhum lobo repetido, deve-se verificar a condição indicada em (4-37):

$$d < \frac{\lambda}{1 + |\cos \theta_0|} \quad (4-37)$$

Para um agregado transversal isso significa a condição (4-38):

$$d < \lambda \quad (4-38)$$

Para um agregado longitudinal isso significa a condição (4-39):

$$d < \frac{\lambda}{2} \quad (4-39)$$

4.2.1.2 Determinação da posição dos nulos

Os nulos da função $|\mathbf{FA}|_n$ ocorrem quando $N \frac{\Psi}{2} = \pm n \pi$, mas com $n \neq N, 2N, \dots qN$, com q inteiro.

Isto é, n não pode ser múltiplo de N , porque se fosse isso implicava também $\frac{\Psi}{2} = \pm q \pi$ que por sua vez implicava que $|\mathbf{FA}|_n$ seria máxima para este valor. A condição de nulos implica então as seguintes relações:

$$\Psi = \pm 2 \frac{n}{N} \pi \quad \text{com } n=1,2,3,\dots \quad \text{e } n \neq N, 2N, \dots qN, \text{ com } q \text{ inteiro} \quad (4-40)$$

Ou seja:

$$\beta d \cos \theta_n + \alpha = \pm 2 \frac{n}{N} \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_n + \alpha = \pm 2 \frac{n}{N} \pi \quad \text{ou seja:} \quad (4-41)$$

$$\cos \theta_n = \left(\pm 2 \frac{n}{N} \pi - \alpha \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \quad \text{com } n=1,2,3, \text{ e } n \neq N, 2N, \dots qN$$

donde se obtêm os ângulos θ_n que correspondem às posições dos nulos, tal como se indica em (4-42):

$$\theta_n = \pm \cos^{-1} \left[\left(\pm 2 \frac{n}{N} \pi - \alpha \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \quad \text{com } n=1,2,3, \text{ e } n \neq N, 2N, \dots qN \quad (4-42)$$

Então, para um agregado transversal, os ângulos θ_n que correspondem às direções dos nulos são dadas por (4-43):

$$\theta_n = \pm \cos^{-1} \left(\pm \frac{n\lambda}{Nd} \right) \quad \text{com } n=1,2,3, \text{ e } n \neq N, 2N, \dots qN \quad (4-43)$$

Para um agregado longitudinal com o feixe orientado na direção $\theta=0^\circ$, $\alpha = -\beta d$. Substituindo esta relação em (4-42) obtêm-se os ângulos θ_n que correspondem às direções dos nulos e que são dadas por:

$$\theta_n = \pm \cos^{-1} \left[\left(\pm 2 \frac{n}{N} \pi + \frac{2\pi}{\lambda} d \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \Rightarrow \theta_n = \pm \cos^{-1} \left[-\frac{n\lambda}{Nd} + 1 \right] \quad \text{com } n=1,2,3, \text{ e } n \neq N, 2N, \dots qN \quad (4-44)$$

Para um agregado longitudinal com o feixe orientado na direção $\theta=180^\circ$, $\alpha = \beta d$. Substituindo esta relação em (4-42) obtêm-se os ângulos θ_n que correspondem às direções dos nulos e que são dadas por:

$$\theta_n = \pm \cos^{-1} \left[\left(\pm 2 \frac{n}{N} \pi - \frac{2\pi}{\lambda} d \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \Rightarrow \theta_n = \pm \cos^{-1} \left[\frac{n\lambda}{Nd} - 1 \right] \quad \text{com } n=1,2,3, \text{ e } n \neq N, 2N, \dots qN \quad (4-45)$$

4.2.1.3 Direção dos lobos secundários

As direções θ_s dos lobos secundários ocorrem aproximadamente quando $\sin\left(N\frac{\Psi}{2}\right) = \pm 1$, isto é, quando:

$$\frac{N\Psi}{2} = \pm(2s+1)\frac{\pi}{2} \text{ com } s=1,2,3,\dots \Rightarrow \Psi = \beta d \cos \theta_s + \alpha = \pm(2s+1)\frac{\pi}{N}$$

ou seja:

$$\cos \theta_s = \left[\pm(2s+1)\frac{\pi}{N} - \alpha \right] \frac{\lambda}{2\pi d} \quad \text{com } s=1,2,3,\dots \quad (4-46)$$

donde se obtêm os ângulos θ_s que, aproximadamente correspondem às direções dos lobos secundários, tal como se indica em (4-47):

$$\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left[\left(\pm(2s+1)\frac{\pi}{N} - \alpha \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \quad \text{com } s=1,2,3,\dots \quad (4-47)$$

Então, para um agregado transversal caracterizado por ter um desfasamento entre os seus elementos dado por $\alpha=0^\circ$, os ângulos θ_s que correspondem aproximadamente às direções dos lobos secundários são dadas por (4-48):

$$\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left[\pm(2s+1) \frac{\lambda}{2Nd} \right] \quad \text{com } s=1,2,3,\dots \quad (4-48)$$

Para um agregado longitudinal com o feixe orientado na direção $\theta=0^\circ$, $\alpha = -\beta d$. Substituindo esta relação em (4-47) obtêm-se os ângulos θ_s que correspondem aproximadamente às direções dos lobos secundários e que são dadas por:

$$\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left\{ \left[\pm(2s+1) \frac{\pi}{N} + \frac{2\pi}{\lambda} d \right] \frac{\lambda}{2\pi d} \right\} \quad \text{com } s=1,2,3,\dots \quad (4-49)$$

isto é,

$$\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left[- (2s+1) \frac{\lambda}{2Nd} + 1 \right]$$

Para um agregado longitudinal com o feixe orientado na direção $\theta=180^\circ$, $\alpha = \beta d$. Substituindo esta relação em (4-47) obtêm-se os ângulos θ_s que correspondem aproximadamente às direções dos lobos secundários e que são dadas por:

$$\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left\{ \left[\pm(2s+1) \frac{\pi}{N} - \frac{2\pi}{\lambda} d \right] \frac{\lambda}{2\pi d} \right\} \quad \text{com } s=1,2,3,\dots \quad (4-50)$$

isto é,

$$\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left[(2s+1) \frac{\lambda}{2Nd} - 1 \right]$$

Nota: Quando há máximos repetidos, é necessário ter o cuidado de excluir os ângulos θ_s que se encontram dentro desses máximos repetidos.

4.2.1.4 Nível do primeiro lobo secundário

O primeiro lobo secundário do Fator de Agregado ocorre aproximadamente para $N \frac{\Psi}{2} \approx \pm \frac{3}{2} \pi$, isto é, para $\frac{\Psi}{2} \approx \pm \frac{3}{2} \frac{\pi}{N}$.

Então, o nível do primeiro lobo secundário pode-se obter a partir da função $(FA)_n = \frac{\text{sen}\left(N \frac{\Psi}{2}\right)}{N \text{sen}\left(\frac{\Psi}{2}\right)} = \frac{1}{N \text{sen}\left(\frac{3}{2} \frac{\pi}{N}\right)}$.

Na Tabela 4-1 estão in-dicados os níveis do primeiro lobo secundário para diversos valores de N.

N	Linear	dB
3	0.3333	-9.54
4	0.2706	-11.35
5	0.2472	-12.14
6	0.2357	-12.55
7	0.2291	-12.80
8	0.2250	-12.96
9	0.2222	-13.06
10	0.2203	-13.14
11	0.2188	-13.20
12	0.2178	-13.24
13	0.2169	-13.27
14	0.2163	-13.30
15	0.2157	-13.32
.	.	.
50	0.2125	-13.45

Tabela 4-1 Nível do primeiro lobo secundário para diversos valores de N.

Para agregados com vários elementos, tipicamente mais de 10, a função $(FA)_n = \frac{\text{sen}\left(N \frac{\Psi}{2}\right)}{N \frac{\Psi}{2}}$ é uma boa aproximação na região do primeiro lobo secundário.

Calculando o nível do primeiro lobo secundário por esta expressão obtém-se $(FA)_n = \frac{1}{\frac{3}{2} \pi} = 0.2122$ que em dB corresponde a $20\log(0.2122) = -13.46\text{dB}$.

Como se pode ver na Tabela 4-1 o nível do primeiro lobo secundário aproxima-se deste valor para agregados com muitos elementos.

4.2.1.5 Largura de feixe a meia potência (LFMP)

Outra característica importante do fator de agregado é a largura de feixe a meia potência do lobo principal. A LFMP é definida pela diferença entre os ângulos para os quais a densidade de potência radiada é metade da densidade de potência radiada segundo a direção de máximo. Em termos de campo elétrico metade da potência corresponde a um campo com um valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ do seu valor máximo.

O campo elétrico radiado é expresso pelo FA.

Como já se viu, na região do lobo principal a função FA é bem aproximada pela função $(FA)_h = \frac{\sin\left(N\frac{\Psi}{2}\right)}{N\frac{\Psi}{2}}$. Esta função assume o valor máximo 1 para $\Psi=0$ e assume o valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ para $N\frac{\Psi}{2} = \pm 1.391$.

Isto implica então que as direções de meia potência θ_h se podem obter a partir da relação (4-51):

$$\Psi = \pm \frac{2.782}{N} \quad (4-51)$$

Ou seja:

$$\beta d \cos \theta_h + \alpha = \pm \frac{2.782}{N} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_h + \alpha = \pm \frac{2.782}{N} \quad (4-52)$$

ou ainda:

$$\cos \theta_h = \left(\pm \frac{2.782}{N} - \alpha \right) \frac{\lambda}{2\pi d}$$

Donde se obtêm os ângulos θ_h que correspondem às direções de meia potência, tal como se indica em (4-53):

$$\theta_h = \pm \cos^{-1} \left[\left(\pm \frac{2.782}{N} - \alpha \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \quad (4-53)$$

Para um agregado transversal como $\alpha=0$ e $\theta_m = \pm 90^\circ$ isso implica que os ângulos θ_h que correspondem às direções de meia potência, são dados por (4-54):

$$\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(\pm \frac{2.782 \lambda}{2\pi d N} \right) \quad (4-54)$$

Como neste caso a função $|FA|$ é simétrica em torno do máximo a LFMP Θ_h dada em graus por (4-55):

$$\Theta_h = 2|90^\circ - |\theta_h|| \quad \text{com } \theta_h \text{ expresso em graus} \quad (4-55)$$

Exemplo 4.1

Consideremos um agregado transversal com 4 elementos separados de 0.5λ . Os ângulos θ_h que correspondem às direções de meia potência, são:

$\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(\pm \frac{2.782 \lambda}{2\pi 0.5\lambda 4} \right) = \pm 77.2^\circ$ e $\pm 102.8^\circ$, que dão origem a uma LFMP: $\Theta_h = 2|90^\circ - 77.2^\circ| = 2|90^\circ - 102.8^\circ| = 25.6^\circ$.

Para um agregado longitudinal com $\theta_m = 0^\circ$ isso implica $\alpha = -\beta d$ e, portanto, os ângulos θ_h , que correspondem às direções de meia potência, são dados por (4-56):

$$\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(1 - \frac{2.782 \lambda}{2\pi d N} \right) \quad (4-56)$$

Como também neste caso a função $|\mathbf{FA}|$ é simétrica em torno do máximo a LFMP Θ_h dada em graus por (4-57):

$$\Theta_h = 2|\theta_h| \quad \text{com } \theta_h \text{ expresso em graus} \quad (4-57)$$

Exemplo 4.2

Consideremos um agregado longitudinal com 10 elementos separados de 0.2λ e dimensionado para ter um máximo para $\theta_m = 0^\circ$. Os ângulos θ_h que correspondem às direções de meia potência, são:

$$\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(1 - \frac{2.782 \lambda}{2\pi 0.2\lambda 10} \right) = \pm 38.87^\circ, \text{ que dão origem a uma LFMP: } \Theta_h = 2 \times |38.87^\circ| = 77.73^\circ.$$

Para um agregado longitudinal com $\theta_m = 180^\circ$ isso implica $\alpha = \beta d$ e, portanto, os ângulos θ_h que correspondem às direções de meia potência, são dados por (4-58):

$$\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(-1 + \frac{2.782 \lambda}{2\pi d N} \right) \quad (4-58)$$

sendo a LFMP Θ_h dada em graus por (4-59), devido à simetria do $|\mathbf{FA}|$ em torno do máximo.

$$\Theta_h = 2|180^\circ - |\theta_h|| \quad \text{com } \theta_h \text{ expresso em graus} \quad (4-59)$$

Exemplo 4.3

Tomemos como exemplo um agregado longitudinal com 10 elementos separados de 0.2λ e dimensionado para ter um máximo para $\theta_m = 180^\circ$. Os ângulos θ_h que correspondem às direções de meia potência são:

$$\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(-1 + \frac{2.782 \lambda}{2\pi 0.2\lambda 10} \right) = \pm 141.10^\circ, \text{ que dão origem a uma LFMP: } \Theta_h = 2 \times |180^\circ - 141.13^\circ| = 77.73^\circ.$$

Nestes dois últimos exemplos a LFMP é igual, pois, como é lógico, dirigir a radiação para um lado do eixo é a mesma coisa que a dirigir para o outro lado dada a simetria da geometria.

4.2.1.6 Diretividade

A diretividade dum agregado depende do diagrama de radiação e, portanto, do fator de agregado.

Consideremos um agregado de fontes isotrópicas cujo fator de elemento é da forma $\mathbf{FE} = \frac{(\text{Const.})}{r} \mathbf{I}$. O campo total é então dado por $\mathbf{E}_T = \mathbf{FExFA}$. Por definição, a diretividade do agregado é dada por (4-60):

$$D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}} \quad (4-60)$$

sendo P_{rad} dada por (4-61):

$$P_{\text{rad}} = \oint \oint U \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U \sin \theta d\theta d\phi \quad (4-61)$$

em que:

$$U = r^2 \frac{1}{2\eta} |E_T|^2 = \frac{1}{2\eta} |\text{Const. } I|^2 \left| \frac{\sin(N\frac{\Psi}{2})}{\sin(\frac{\Psi}{2})} \right|^2 \quad \text{com } \Psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (4-62)$$

Sendo, portanto, $U_{\max}$ dado por (4-63):

$$U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |E_{T\max}|^2 = \frac{1}{2\eta} |\text{Const. } I|^2 N^2 \quad (4-63)$$

Substituindo (4-61), (4-62) e (4-63) em (4-60), obtém-se após, algumas simplificações, a expressão (4-64) para a diretividade do FA dum agregado uniforme:

$$D = \frac{2N^2}{\int_0^\pi \left| \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)\right]} \right|^2 \sin \theta d\theta} \quad (4-64)$$

Em certos casos particulares pode-se obter uma expressão analítica aproximada para a diretividade.

Caso dum agregado transversal ($\alpha=0$) com $d < \lambda/2$.

Neste caso o FA que está contido na função integranda da expressão (4-64) pode-se aproximar por:

$$FA \approx N \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(\beta d \cos \theta)\right]}{\left[\frac{N}{2}(\beta d \cos \theta)\right]}.$$

Fazendo a mudança de variável $Z = \frac{N}{2} \beta d \cos \theta$, resulta que $dZ = -\frac{N}{2} \beta d \sin \theta d\theta$, isto é, $\sin \theta d\theta = -\frac{2}{N\beta d} dZ$.

Usando estas expressões em (4-64), obtém-se uma expressão aproximada para a diretividade dum agregado transversal dada por (4-65):

$$D \approx \frac{2N^2}{-\frac{2N^2}{N\beta d} \int_{\frac{N\beta d}{2}}^{\frac{N\beta d}{2}} \left| \frac{\sin(Z)}{Z} \right|^2 dZ} = \frac{N\beta d}{\int_{-\frac{N\beta d}{2}}^{\frac{N\beta d}{2}} \left| \frac{\sin(Z)}{Z} \right|^2 dZ} \quad (4-65)$$

Para agregados com muitos elementos, $\frac{N\beta d}{2}$ é elevado e é aceitável fazer ainda a aproximação

$$\int_{-\frac{N\beta d}{2}}^{\frac{N\beta d}{2}} \left| \frac{\sin(Z)}{Z} \right|^2 dZ \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(Z)}{Z} \right|^2 dZ = \pi.$$

Daqui resulta finalmente a expressão aproximada para a diretividade dum agregado transversal dada por (4-66):

$$D \approx 2N \frac{d}{\lambda} \quad (4-66)$$

No gráfico da Figura 4.7 está representada a variação da diretividade dum agregado transversal com 20 elementos, em função da distância d entre elementos. No gráfico estão representadas a diretividade exata dada por (4-64) e a diretividade aproximada dada por (4-66).

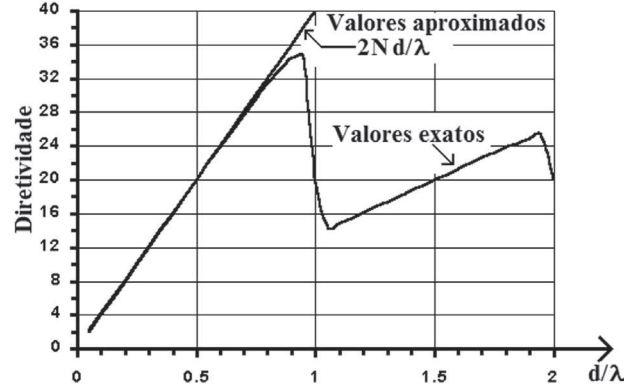


Figura 4.7 Diretividade do FA dum agregado transversal com 20 elementos, em função da distância d entre elementos.

Como se pode ver pela Figura 4.7 até distâncias $d \approx 0.8\lambda$, a diretividade aproximada coincide com a diretividade exata.

É também interessante verificar através da Figura 4.7 que o valor da diretividade coincide com N para valores de $d = n \frac{\lambda}{2}$. Na Figura 4.8 estão representadas as diretvidades, em função da distância d entre elementos, para vários agregados transversais.

Mais uma vez nesta figura se pode verificar que para todos os agregados, o valor da diretvidade coincide com N para valores de $d = n \frac{\lambda}{2}$. Também se pode ver que a máxima diretvidade se obtém para d entre 0.8 e 0.9λ .

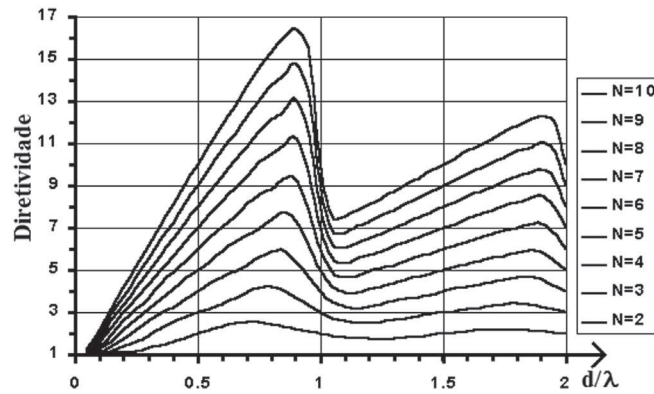


Figura 4.8 Diretividade, em função da distância d entre elementos, para vários agregados transversais.

Caso dum agregado longitudinal ($\alpha = -\beta d$) com $d < \lambda/4$.

Neste caso o FA que está contido na função integranda da expressão (4-64) pode-se aproximar por:

$$FA \sim N \frac{\sin \left[\frac{N}{2} \beta d (\cos \theta - 1) \right]}{\left[\frac{N}{2} \beta d (\cos \theta - 1) \right]}$$

Fazendo a mudança de variável $Z = \frac{N}{2}\beta d(\cos\theta - 1)$, resulta que $dZ = -\frac{N}{2}\beta d\sin\theta d\theta$, isto é, $\sin\theta d\theta = -\frac{2}{N\beta d}dZ$.

Usando estas expressões em (4-64), obtém-se uma expressão aproximada para a diretividade dum agregado longitudinal dada por (4-67):

$$D \approx \frac{2N^2}{-\frac{2N^2}{N\beta d} \int_0^{-N\beta d} \left| \frac{\sin(Z)}{Z} \right|^2 dZ} = \frac{N\beta d}{\int_0^{N\beta d} \left| \frac{\sin(Z)}{Z} \right|^2 dZ} \quad (4-67)$$

Para agregados com muitos elementos, $N\beta d$ é elevado e é aceitável fazer ainda a aproximação

$$\int_0^{N\beta d} \left| \frac{\sin(Z)}{Z} \right|^2 dZ \approx \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(Z)}{Z} \right|^2 dZ = \frac{\pi}{2}.$$

Daqui resulta finalmente a expressão aproximada para a diretividade dum agregado longitudinal dada por (4-68):

$$D \approx 4N \frac{d}{\lambda} \quad (4-68)$$

No gráfico da Figura 4.9 está representada a variação da diretividade dum agregado longitudinal com 20 elementos, em função da distância d entre elementos. No gráfico estão representadas a diretividade exata dada por (4-64) e a diretividade aproximada dada por (4-68).



Figura 4.9 Diretividade do FA dum agregado longitudinal com 20 elementos, em função da distância d entre elementos.

Como se pode ver pela Figura 4.9 até distâncias $d \approx 0.4\lambda$, a diretividade aproximada coincide com a diretividade exata.

É também interessante verificar através da Figura 4.9 que o valor da diretividade coincide com N para valores de $d = n \frac{\lambda}{4}$.

Na Figura 4.10 estão representadas as diretvidades, em função da distância d entre elementos, para vários agregados longitudinais.

Mais uma vez nesta figura se pode verificar que para todos os agregados, o valor da diretividade coincide com N para valores de $d = n \frac{\lambda}{4}$. Também se pode ver que a máxima diretividade se obtém para d entre 0.4 e 0.45λ .

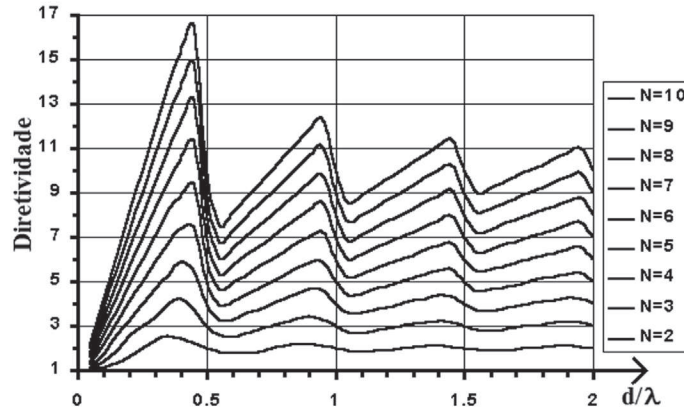


Figura 4.10 Diretividade, em função da distância d entre elementos, para vários agregados longitudinais.

Outro caso particular que merece ser referido é o agregado longitudinal do tipo Hansen-Woodyard.

Um agregado longitudinal com $\alpha = -\beta d$, apresenta um máximo para $\theta = 0^\circ$, no entanto esta configuração não é a que produz a máxima diretividade nessa direção. Com efeito, Hansen e Woodyard mostraram em 1938 que se pode obter maior diretividade usando um desfasamento progressivo dado por (4-69):

$$\alpha = -\left(\beta d + \frac{\pi}{N}\right) \quad (4-69)$$

Os agregados baseados nesta condição são designados por agregados do tipo Hansen-Woodyard.

Para evitar o aparecimento de lobos secundários com nível elevado, $|\alpha|$ deve ser menor que π , isto é, deve-se verificar a condição (4-70):

$$\alpha = \beta d + \frac{\pi}{N} < \pi \quad (4-70)$$

Desta condição facilmente se obtém a distância máxima entre elementos dada por (4-71):

$$d < \frac{\lambda}{2} \frac{(N-1)}{N} \quad (4-71)$$

A diretividade deste agregado, na direção $\theta = 0^\circ$, é dada por (4-72):

$$D = 4\pi \frac{U_{\theta=0^\circ}}{P_{\text{rad}}} \quad (4-72)$$

sendo P_{rad} dada por (4-73):

$$P_{\text{rad}} = \iiint U \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (4-73)$$

em que:

$$U = r^2 \frac{1}{2\eta} |E_T|^2 = \frac{1}{2\eta} |\text{Const. } I|^2 \left| \frac{\text{sen}(N \frac{\Psi}{2})}{\text{sen}(\frac{\Psi}{2})} \right|^2 \quad \text{com } \Psi = \beta d (\cos \theta - 1) - \frac{\pi}{N} \quad (4-74)$$

Sendo, portanto, $U_{\theta=0^\circ}$ dado por (4-75):

$$U_{\theta=0} = r^2 \frac{1}{2\eta} |E_T|_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2\eta} |\text{Const. } I|^2 \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \right|^2 \quad (4-75)$$

Substituindo (4-73), (4-74) e (4-75) em (4-72), obtém-se após, algumas simplificações, a expressão (4-76) para a diretividade do FA dum agregado Hansen-Woodyard:

$$D = \frac{2 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \right|^2}{\int_0^\pi \left| \frac{\sin\left[\frac{N}{2}\left(\beta d(\cos\theta - 1) - \frac{\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\beta d(\cos\theta - 1) - \frac{\pi}{N}\right)\right]} \right|^2 \sin\theta d\theta} \quad (4-76)$$

É possível obter a partir de (4-76) uma expressão aproximada para a diretividade dum agregado deste tipo dada por (4-77)[1]:

$$D \approx 1.789 \left(4N \frac{d}{\lambda} \right) \quad (4-77)$$

No gráfico da Figura 4.11 está representada a variação da diretividade dum agregado Hansen-Woodyard com 8 elementos, em função da distância d entre elementos. No gráfico estão representadas a diretividade exata dada por (4-76) e a diretividade aproximada dada por (4-77). Na mesma figura está também representada, para comparação, a variação da diretividade dum agregado longitudinal normal com o mesmo número de elementos. Como se pode ver da figura, para valores de d até cerca de 0.43λ a diretividade de agregado Hansen-Woodyard é superior à do agregado longitudinal normal. É de notar que o limite de d dado por (4-71) é 0.4375λ .

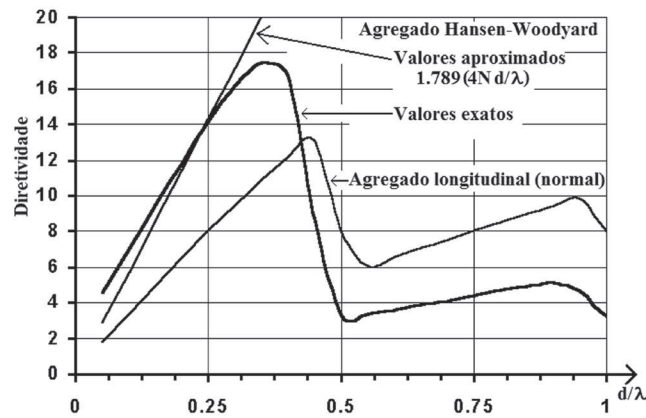


Figura 4.11 Comparação entre a diretividade do FA dum agregado Hansen-Woodyard e a diretividade dum agregado longitudinal normal, ambos com 8 elementos, em função da distância d entre elementos.

Para melhor ilustrar que um agregado Hansen-Woodyard é mais diretivo do que um agregado longitudinal normal, na Figura 4.12 estão representados os diagramas de radiação de dois agregados semelhantes, ambos com 8 elementos e uma distância entre elementos $d=0.35\lambda$.

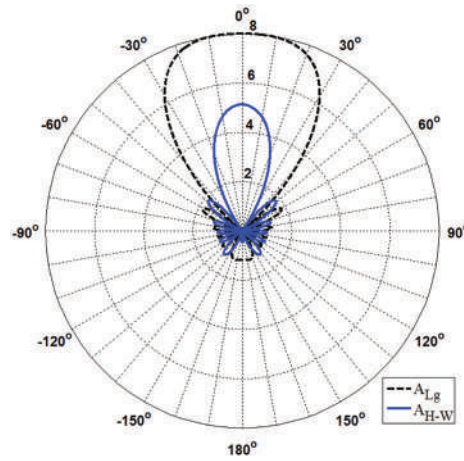


Figura 4.12 Comparação entre o diagrama de radiação dum agregado Hansen-Woodyard e o diagrama de radiação dum agregado longitudinal normal. Ambos têm 8 elementos alimentados com a mesma amplitude e separados duma distância $d=0.35\lambda$.

Desta figura vê-se claramente que o diagrama de radiação do agregado Hansen-Woodyard tem um lobo principal mais estreito, (com uma $LFMP \cong 2 \times 18^\circ$), do que o diagrama de radiação do agregado longitudinal normal, cujo lobo principal tem uma $LFMP \cong 2 \times 33^\circ$.

Também se vê da Figura 4.12 que, estando os elementos alimentados com a mesma amplitude, o campo radiado na direção $\theta=0^\circ$ e, por conseguinte, a densidade de potência produzida nessa direção, é menor para o agregado Hansen-Woodyard do que para o agregado longitudinal normal. No entanto, devido ao facto do agregado Hansen-Woodyard ser mais diretivo a potência radiada é menor.

Para comprovar isto, designemos por:

P_{rad}^{AL} a potência radiada pelo agregado longitudinal normal,

P_{rad}^{HW} a potência radiada pelo agregado Hansen-Woodyard,

D^{AL} a diretividade do agregado longitudinal normal, na direção $\theta=0^\circ$,

D^{HW} a diretividade do agregado Hansen-Woodyard, na direção $\theta=0^\circ$,

e K^{HW} como:

$$K^{HW} = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \right|$$

Comparando as expressões (4-64) e (4-76), obtém-se a relação (4-78):

$$P_{rad}^{HW} = \left(\frac{K^{HW}}{N} \right)^2 \left(\frac{D^{AL}}{D^{HW}} \right) P_{rad}^{AL} \quad (4-78)$$

Como $\frac{K^{HW}}{N} < 1$ e $\frac{D^{AL}}{D^{HW}} < 1$, então:

$$P_{rad}^{HW} < P_{rad}^{AL} \quad (4-79)$$

Para o caso do exemplo apresentado na Figura 4.12, usando os valores da diretividade indicados na Figura 4.11, obtém-se $P_{\text{rad}}^{\text{HW}} = 0.26P_{\text{rad}}^{\text{AL}}$.

Isto é, a potência radiada pelo agregado Hansen-Woodyard é apenas 26% da potência radiada pelo agregado longitudinal normal.

Se quisermos produzir, com o agregado Hansen-Woodyard, na direção $\theta=0^\circ$ a mesma densidade de potência que é produzida pelo agregado longitudinal normal, teremos que alimentar os elementos do agregado Hansen-Woodyard com uma corrente $\frac{N}{K^{\text{HW}}}$ vezes maior.

Se designarmos por $(P_{\text{rad}}^{\text{HW}})'$ a potência radiada pelo agregado Hansen-Woodyard com esta nova alimentação, teremos a relação (4-80):

$$(P_{\text{rad}}^{\text{HW}})' = \left(\frac{N}{K^{\text{HW}}} \right)^2 P_{\text{rad}}^{\text{HW}} \quad (4-80)$$

Substituindo (4-78) em (4-80), obtém-se (4-81):

$$(P_{\text{rad}}^{\text{HW}})' = \left(\frac{D^{\text{AL}}}{D^{\text{HW}}} \right) P_{\text{rad}}^{\text{AL}} \quad (4-81)$$

Como $\frac{D^{\text{AL}}}{D^{\text{HW}}} < 1$, então:

$$(P_{\text{rad}}^{\text{HW}})' < P_{\text{rad}}^{\text{AL}} \quad (4-82)$$

Para o caso do exemplo apresentado na Figura 4.12, usando os valores da diretividade indicados na Figura 4.11, obtém-se $(P_{\text{rad}}^{\text{HW}})' < 0.62P_{\text{rad}}^{\text{AL}}$.

Isto é, mesmo no caso da densidade de potência produzida por ambos os agregados na direção $\theta=0^\circ$ ser a mesma, a potência radiada pelo agregado Hansen-Woodyard é apenas 62% da potência radiada pelo agregado longitudinal normal. É esta característica que torna atrativo o uso deste tipo de agregado.

4.2.1.7 Ganho

Por definição, o ganho é dado por (4-83):

$$G = 4\pi \frac{U_{\text{max}}}{P_{\text{n}}} \quad (4-83)$$

O ganho dum agregado depende, portanto obviamente do diagrama de radiação total e também da potência total P_{in} fornecida ao agregado. A potência P_{in} é dada por (4-84):

$$P_{\text{n}} = \sum_{n=1}^N P_{\text{n}(n)} \quad (4-84)$$

em que $P_{\text{in}(n)}$ é a potência fornecida ao elemento n que é por sua vez dada por (4-85):

$$P_{\text{n}(n)} = \frac{1}{2} R_{\text{n}(n)} I_{\text{n}(n)}^2 \quad (4-85)$$

em que $R_{in(n)}$ representa a parte real da impedância de entrada do elemento n e $I_{in(n)}$ representa a corrente de entrada do elemento n .

Sendo um agregado uniforme, tem-se que $I_{in(n)} = I$, para qualquer n . Substituindo esta condição em (4-85), então (4-84) passa a ter a forma indicada em (4-86):

$$P_n = \frac{1}{2} I^2 \sum_{n=1}^N R_{in(n)} \quad (4-86)$$

Consideremos que o elemento é um dipolo, orientado segundo o eixo dos zz e com distribuição de corrente sinusoidal. Então o FE é da forma $FE = \frac{(Const.) F(\theta)}{r} \mathbf{I}$. O campo total radiado pelo agregado é então dado por, $E_T = FE \times FA$, sendo portanto U_{max} dado por (4-87):

$$U_{max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |E_T|_{max}^2 = \frac{1}{2\eta} |Const. F(\theta)_{max}|^2 |I|^2 N^2 \quad (4-87)$$

Substituindo (4-86) e (4-87) em (4-83), obtém-se, a expressão (4-88) para o ganho dum agregado uniforme.

$$G = \frac{1}{30} \frac{|Const. F(\theta)_{max}|^2 N^2}{\sum_{n=1}^N R_{in(n)}} \quad (4-88)$$

A impedância de entrada de cada dipolo e, portanto, $R_{in(n)}$ depende das dimensões do dipolo e da intensidade da corrente que por sua vez depende da influência mútua entre os diversos dipolos que formam o agregado. O modo de determinar a impedância será estudado no próximo capítulo.

4.2.2 Resumo das principais características dos agregados

Na Tabela 4-2 apresenta-se um resumo das principais características dos agregados transversais.

Direção dos máximos	$\theta_m = \pm \cos^{-1} \left(\pm m \frac{\lambda}{d} \right)$ com $m=0,1,2,3,\dots$
Direção dos nulos	$\theta_n = \pm \cos^{-1} \left(\pm \frac{n\lambda}{Nd} \right)$ com $n=1,2,3,$ e $n \neq N, 2N, \dots qN$
Direção dos lobos secundários	$\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left[\pm (2s+1) \frac{\lambda}{2Nd} \right]$ com $s=1,2,3,\dots$
Largura do lobo principal a 3dB (LFMP)	$\Theta_h = 2 90^\circ - \theta_h $ com θ_h expresso em graus e dado por: $\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(\pm \frac{2.782 \lambda}{2\pi d N} \right)$
Diretividade (aproximada)	$D \approx 2N \frac{d}{\lambda}$ para $N > 5$ e $d < \lambda/2$

Tabela 4-2 Resumo das principais características dos agregados transversais.

Na Tabela 4-3 apresenta-se um resumo das principais características dos agregados longitudinais.

Direção dos máximos	$\theta_m = \pm \cos^{-1} \left[-\frac{m\lambda}{d} + 1 \right] \quad \text{para } \theta_m = 0^\circ$ $\theta_m = \pm \cos^{-1} \left[\frac{m\lambda}{d} - 1 \right] \quad \text{para } \theta_m = 180^\circ$ com $m=0,1,2,3,\dots$
Direção dos nulos	$\theta_n = \pm \cos^{-1} \left[-\frac{n\lambda}{Nd} + 1 \right] \quad \text{para } \theta_n = 0^\circ$ $\theta_n = \pm \cos^{-1} \left[\frac{n\lambda}{Nd} - 1 \right] \quad \text{para } \theta_n = 180^\circ$ com $n=1,2,3, \dots$ e $n \neq N, 2N, \dots, qN$
Direção dos lobos secundários	$\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left[-\left(2s+1\right) \frac{\lambda}{2Nd} + 1 \right] \quad \text{para } \theta_s = 0^\circ$ $\theta_s \approx \pm \cos^{-1} \left[\left(2s+1\right) \frac{\lambda}{2Nd} - 1 \right] \quad \text{para } \theta_s = 180^\circ$ com $s=1,2,\dots$
Largura do lobo principal a 3dB (LFMP)	$\Theta_h = 2 \left \theta_m - \theta_h \right \quad \text{com } \theta_m = 0 \text{ ou } 180^\circ$ e θ_h expresso em graus e dado por: $\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(1 - \frac{2.782 \lambda}{2\pi d N} \right) \quad \text{para } \theta_m = 0^\circ$ $\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(-1 + \frac{2.782 \lambda}{2\pi d N} \right) \quad \text{para } \theta_m = 180^\circ$
Diretividade (aproximada)	$D \approx 4N \frac{d}{\lambda} \quad \text{para } N > 5 \text{ e } d < \lambda/4$

Tabela 4-3 Resumo das principais características dos agregados longitudinais.

4.2.3 Técnica gráfica de obtenção do diagrama polar a partir do gráfico de $|FA(\Psi)|$

O gráfico do diagrama de radiação pode ser feito diretamente a partir da expressão (4-18). Com os meios técnicos atualmente disponíveis é muito fácil fazer este gráfico quer em coordenadas retangulares quer em coordenadas polares. Por exemplo, pode-se recorrer a uma folha de cálculo e utilizar as suas facilidades gráficas. Apesar destas facilidades é por vezes importante obter rapidamente um esboço do diagrama de radiação em função do ângulo entre o eixo do agregado e a direção de observação. Considerando que o eixo do agregado é o eixo dos zz esse ângulo será θ .

Vamos de seguida explicar uma técnica de obter este esboço a partir das curvas do $|FA(\Psi)|$ como as que estão representadas na Figura 4.5.

A descrição desta técnica gráfica apoia-se na Figura 4.13 e é constituída pelos seguintes passos:

- Escolher a curva do $|FA(\Psi)|$ correspondente ao número N de elementos do agregado.
- Traçar por baixo dessa figura uma linha horizontal, paralela ao eixo dos Ψ 's. Esta linha vai representar o eixo do agregado.
- Marcar nesta linha um ponto à distância α do centro do gráfico $|FA(\Psi)|$, mantendo a escala.
- Desenhar, com centro neste ponto, uma circunferência de raio βd .

Como se pode ver pela Figura 4.13 com estes 4 passos iniciais realiza-se, de forma gráfica, a transformação $\Psi \rightarrow \theta$. Para obter o gráfico com os lobos e os mínimos, bastará transformar os valores de Ψ aos quais eles ocorrem nos correspondentes valores de θ , através desta transformação gráfica. Para isso devemos realizar ainda os seguintes passos:

- Traçar linhas verticais que passem pelos pontos mais significativos do gráfico $|FA(\Psi)|$, isto é, pelos máximos, pelos nulos e pelos máximos secundários, até intersectar a circunferência.
- Traçar linhas radiais desde o centro da circunferência até às interseções definidas no passo anterior.
- Marcar sobre cada uma destas radiais uma distância ao centro proporcional à amplitude do gráfico $|FA(\Psi)|$, que deu origem a essa radial.
- Unir os pontos definidos no passo anterior, obtendo-se assim um esboço do diagrama de radiação na forma polar.

Se se pretender mais definição pode-se repetir estes últimos 4 passos para outros pontos do gráfico $|FA(\Psi)|$.

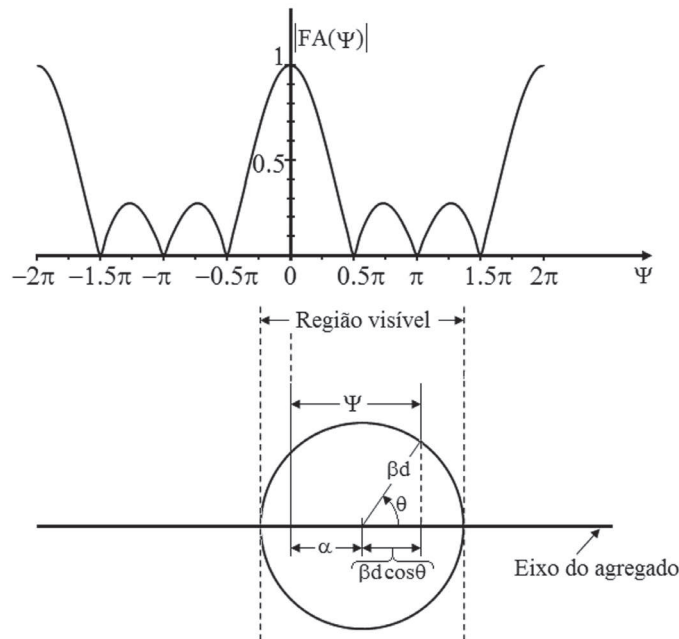


Figura 4.13 Técnica gráfica de obter o diagrama de radiação polar, em função do ângulo θ , a partir da curva do $|FA(\Psi)|$ correspondente.

Dado que consideramos até agora que o eixo do agregado é o eixo dos zz , o fator de agregado é apenas função de θ . Portanto a estrutura do diagrama de radiação é determinada pela faixa de valores indicada em (4-89):

$$0 < \theta < \pi \quad (4-89)$$

Esta faixa angular é designada por região visível. Esta região corresponde por sua vez a $-1 < \cos \theta < 1$, que por sua vez corresponde a $-\beta d < \beta d \cos \theta < \beta d$ ou ainda à relação (4-90):

$$\alpha - \beta d < \Psi < \alpha + \beta d \quad (4-90)$$

A região visível está indicada na Figura 4.13 e corresponde ao diâmetro da circunferência, isto é, a $2\beta d$. O espaçamento entre elementos determina a dimensão desta região e portanto qual a porção do gráfico $|FA(\Psi)|$ que nela aparece. Já se viu que o período da função $|FA(\Psi)|$ é 2π . Se se pretender que a região visível tenha exatamente a dimensão dum período, então d deve ser igual a $\lambda/2$. Para espaçamentos entre elementos inferiores a $\lambda/2$, a dimensão da região visível é menor que um período. Para espaçamentos entre elementos superiores a $\lambda/2$, a dimensão da região visível é maior que um período. Neste caso, pode acontecer, dependendo do desfaseamento entre elementos (isto é de α), que mais do que um lobo principal da função $|FA(\Psi)|$ apareça na região visível. Se tal acontecer o diagrama de radiação apresentará lobos principais repetidos (*grating lobes*).

Exemplo 4.4

Pretende-se desenhar o diagrama de radiação dum agregado longitudinal com $N=4$ elementos, separados da distância $d=0.4\lambda$ e projetado para ter o máximo para $\theta=0^\circ$, usando esta técnica gráfica.

Na Figura 4.14 está ilustrado o modo de obter o diagrama. Em virtude do agregado ser longitudinal com o máximo em $\theta_m = 0^\circ$, isso implica $\alpha = -\beta d = -0.8\pi$. Como se pode ver pela Figura 4.14 o centro da circunferência está exatamente alinhado com o valor $\Psi = -0.8\pi$. Do mesmo modo se vê que o raio da circunferência é igual a $\beta d = 0.8\pi$.

Os nulos são determinados usando linhas verticais e radiais a cheio e os máximos usando linhas verticais e radiais a tracejado.

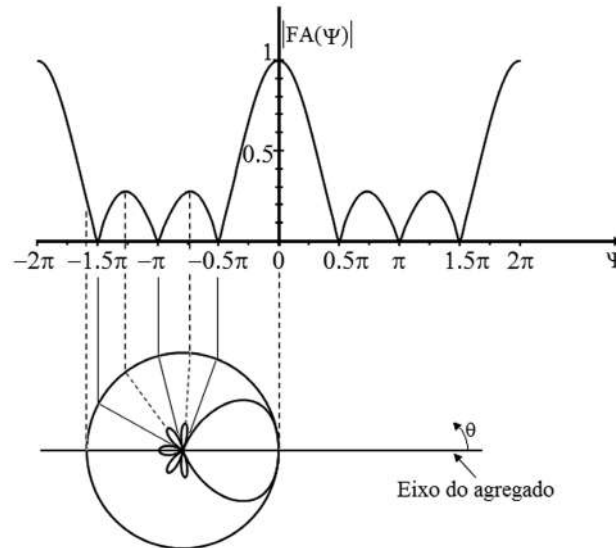


Figura 4.14 Técnica gráfica de obter o diagrama de radiação dum agregado longitudinal com $N=4$ elementos, separados da distância $d=0.4\lambda$, e projetado para ter o máximo para $\theta=0^\circ$.

Exemplo 4.5

Pretende-se desenhar o diagrama de radiação dum agregado transversal com $N=4$ elementos, separados da distância $d=0.4\lambda$. O modo de obter o diagrama está ilustrado, na Figura 4.15. Em virtude do agregado ser transversal

o máximo ocorre para $\theta_m = 90^\circ$, o que implica $\alpha = 0$. Como se pode ver pela Figura 4.15, o centro da circunferência está exatamente alinhado com o valor $\Psi = 0$. Do mesmo modo se vê que o raio da circunferência é igual a $\beta d = 0.8\pi$.

Os nulos são determinados usando linhas verticais e radiais a cheio e os máximos usando linhas verticais e radiais a tracejado.

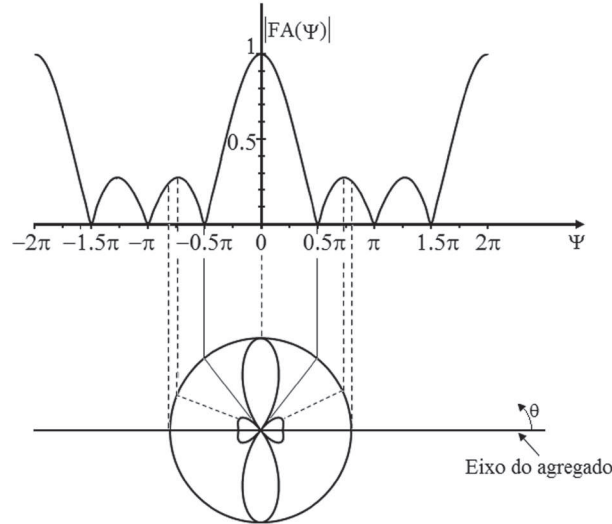


Figura 4.15 Técnica gráfica de obter o diagrama de radiação dum agregado transversal com $N=4$ elementos, separados da distância $d=0.4\lambda$.

Exemplo 4.6

Consideremos finalmente que se quer desenhar o diagrama de radiação dum agregado com $N=4$ elementos, separados da distância $d=0.4\lambda$ e projetado para ter o máximo para $\theta=120^\circ$.

O modo de obter o diagrama está ilustrado na Figura 4.16. Em virtude do agregado ter o máximo em $\theta_m = 120^\circ$, isso implica $\alpha = -\beta d \cos(120^\circ) = 0.4\pi$. Como se pode ver pela Figura 4.16, o centro da circunferência está exatamente alinhado com o valor $\Psi = 0.4\pi$. Do mesmo modo se vê que o raio da circunferência é igual a $\beta d = 0.8\pi$.

Os nulos são determinados usando linhas verticais e radiais a cheio e os máximos usando linhas verticais e radiais a tracejado.

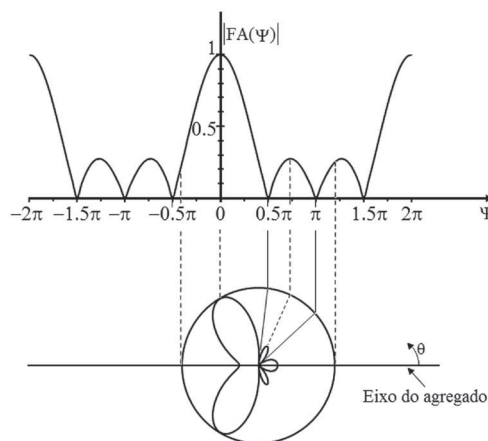
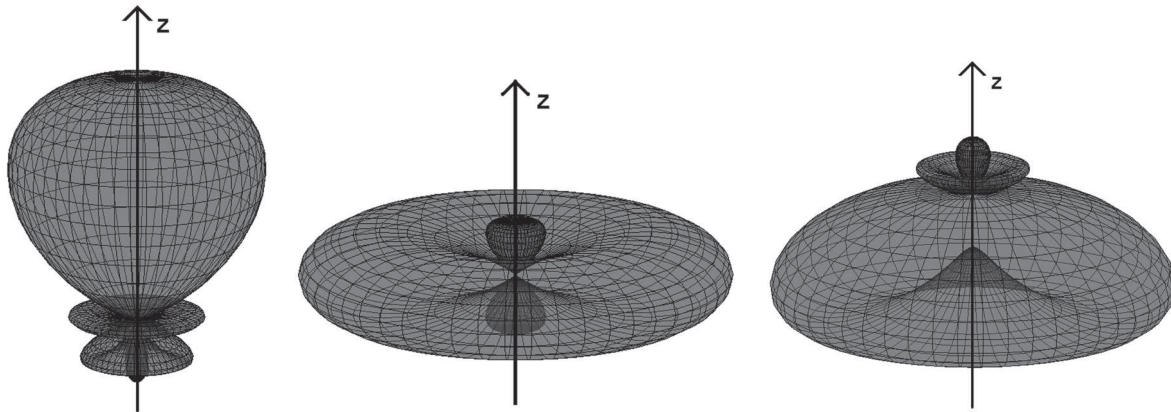


Figura 4.16 Técnica gráfica de obter o diagrama de radiação dum agregado com $N=4$ elementos, separados da distância $d=0.4\lambda$, e projetado para ter o máximo para $\theta=120^\circ$.

Como já foi mencionado atrás, temos considerado até agora que o eixo do agregado é o eixo dos zz , pelo que o fator de agregado é apenas função de θ . Isto significa que os diagramas de radiação em qualquer plano que

contenha o eixo do agregado são iguais e por consequência, o diagrama de radiação 3-D é de revolução em torno do eixo do agregado. Para tornar esta propriedade mais evidente, na Figura 4.17 estão representados os diagramas de radiação em formato 3-D correspondentes aos três últimos exemplos. Outra consequência desta simetria é que o diagrama de radiação em qualquer plano perpendicular ao eixo do agregado é isotrópico.

É importante notar que estas características se mantêm qualquer que seja o eixo do agregado. Pode-se, portanto, afirmar para qualquer agregado linear e uniforme que, o diagrama de radiação 3-D é de revolução em torno do eixo do agregado e que o diagrama de radiação em qualquer plano perpendicular ao eixo do agregado é isotrópico.



(a) - Agregado longitudinal com 4 elementos, separados de 0.4λ , e projetado para ter o máximo para $\theta=0^\circ$.

(b) - Agregado transversal com 4 elementos, separados de 0.4λ .

(c) - Agregado com 4 elementos, separados de 0.4λ , e projetado para ter o máximo para $\theta=120^\circ$.

Figura 4.17 Diagramas de radiação em formato 3-D, de três agregados.

Exemplo 4.7

Projete um agregado longitudinal alinhado segundo o eixo dos zz , com o menor número de elementos possível, que satisfaça as seguintes condições:

- Dê origem a um lobo principal segundo a direção $\theta=0^\circ$.
- Não dê origem à repetição do lobo principal.
- Tenha uma LFMP $< 50^\circ$.
- Produza um nulo na direção perpendicular ao eixo do agregado.

a) Determine a LFMP.

b) Esboce o diagrama de radiação num plano que contenha o eixo do agregado.

c) Esboce o diagrama de radiação num plano perpendicular ao eixo do agregado.

Resolução:

Para um agregado longitudinal com o feixe orientado na direção $\theta=0^\circ$ os ângulos θ_n que correspondem às direções dos nulos são dadas por (4-44).

Para que haja um nulo na direção perpendicular ao eixo do agregado isso implica que $-\frac{n\lambda}{Nd} + 1 = 0$, isto é, $\frac{n\lambda}{Nd} = 1$ (1).

Para que não haja repetição do lobo principal, de acordo com (4-39) $d < \frac{\lambda}{2}$. Para este agregado a LFMP é $2|\theta_h|$ com θ_h expresso em graus dada por (4-56).

Como se pretende uma LFMP < 50° então $1 - \frac{2.782 \lambda}{2\pi d N} > \cos(25^\circ)$, substituindo aqui a condição (1), obtém-se $1 - \frac{2.782}{2\pi d n} > 0.9063$, com $n=1,2,3$, e $n \neq N, 2N, \dots qN$.

Desta relação conclui-se que $n > 4.7$, portanto maior que 5. Recorrendo à relação (1), $\frac{d}{\lambda} = \frac{n}{N}$, como $\frac{d}{\lambda} < 0.5$ e $n > 5$ isso implica $N > 10$.

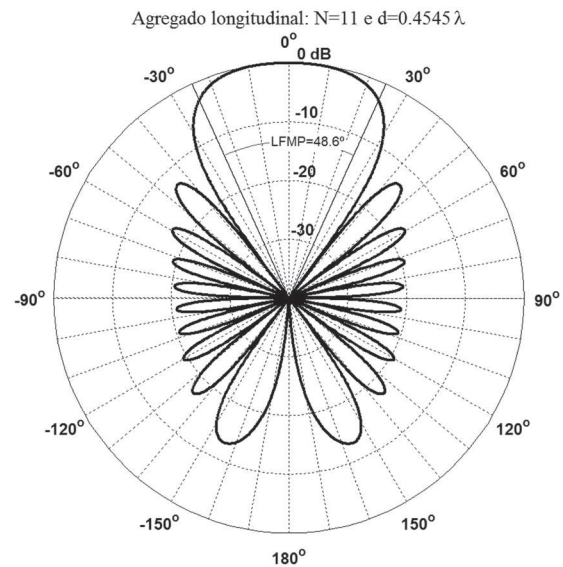
Como se quer o menor número de elementos possível então devemos escolher $N=11$ e por consequência $\frac{d}{\lambda} = \frac{5}{11} = 0.4545$.

A LFMP pode ser calculada por (4-56), obtendo-se $\theta_h = \pm \cos^{-1} \left(1 - \frac{2.782}{2\pi \times 0.4545 \times 11} \right) \pm 24.295^\circ$ e, portanto, LFMP = 48.59° inferior a 50° como pretendido.

O diagrama de radiação num plano que contenha o eixo do agregado foi determinado através dum programa em Matlab, e está representado na figura ao lado.

O diagrama de radiação num plano perpendicular ao eixo do agregado é isotrópico e como há um nulo na direção perpendicular ao eixo do agregado isso significa que o diagrama é nulo. Graficamente reduz-se a um ponto.

Este diagrama foi desenhado por um *script* Matlab que o autor desenvolveu, que permite fazer o diagrama dum agregado linear uniforme. Este *script* tem o nome de *DiagramaDumAgregadoLinearUniforme.m*.



4.3 Agregado planar uniforme

Um conjunto de elementos idênticos colocados num plano constitui um agregado planar. Consideremos que esse plano é definido por dois eixos fundamentais ortogonais entre si. Se, na direção de cada um destes eixos, os elementos estiverem equiespaçados, alimentados com correntes de igual amplitude, e com a mesma diferença de fase entre eles então, o agregado é planar e uniforme. Como a diferença de fase entre as sucessivas correntes é a mesma, há ao longo de cada um desses eixos uma variação progressiva de fase.

Os elementos destes agregados estão assim dispostos de acordo com uma malha regular de N_x por N_y pontos.

Como exemplo consideremos o agregado planar colocado no plano x-y representado na Figura 4.18.

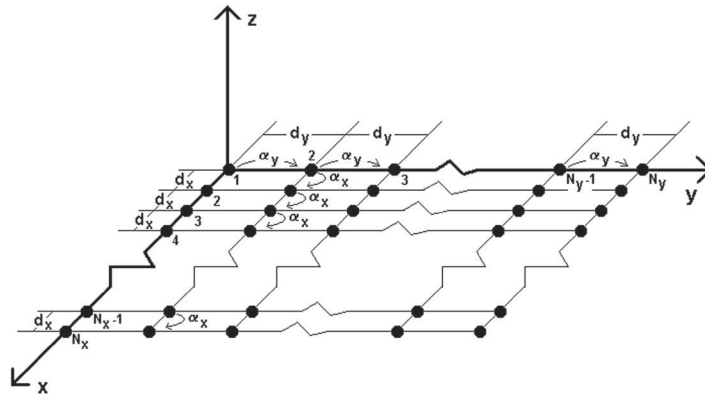
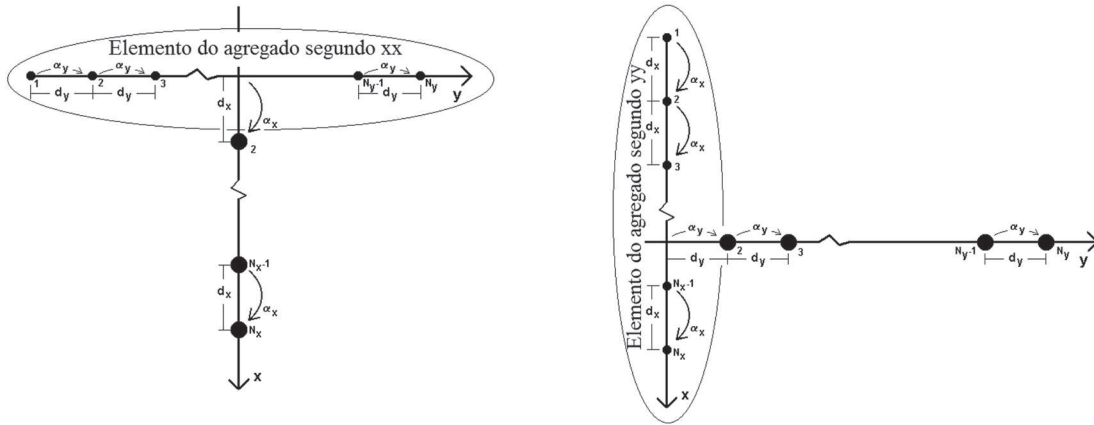


Figura 4.18 Agregado planar colocado no plano x-y.

Este agregado planar pode ser visto como um agregado de N_x elementos alinhados segundo o eixo dos xx em que o elemento é um agregado de N_y elementos alinhados segundo o eixo dos yy, tal como se indica na Figura 4.19 (a), ou como um agregado de N_y elementos alinhados segundo o eixo dos yy em que o elemento é um agregado de N_x elementos alinhados segundo o eixo dos xx, tal como se indica na Figura 4.19 (b).



(a) - Visto como um agregado de N_x elementos alinhados segundo o eixo dos xx em que o elemento é um agregado de N_y elementos alinhados segundo o eixo dos yy.

(b) - Visto como um agregado de N_y elementos alinhados segundo o eixo dos yy em que o elemento é um agregado de N_x elementos alinhados segundo o eixo dos xx.

Figura 4.19 Interpretação dum agregado planar.

De acordo com a interpretação da Figura 4.19 (a) o FA_T é dado por $FEx(FA)_x$, em que o FE é dado por (4-91):

$$FE = (FA)_y = \frac{\sin\left(N_y \frac{\Psi_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_y}{2}\right)} \quad \text{com} \quad \Psi_y = \beta d_y \cos \gamma_y + \alpha_y \quad (4-91)$$

e o $(FA)_x$ é dado por (4-92):

$$(FA)_x = \frac{\sin\left(N_x \frac{\Psi_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_x}{2}\right)} \quad \text{com} \quad \Psi_x = \beta d_x \cos \gamma_x + \alpha_x \quad (4-92)$$

Donde o FA_T é portanto dado por (4-93).

$$FA_T(\theta, \phi) = \frac{\sin\left(N_y \frac{\Psi_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_y}{2}\right)} \frac{\sin\left(N_x \frac{\Psi_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi_x}{2}\right)} \quad (4-93)$$

$$\text{com: } \Psi_x = \beta d_x \sin\theta \cos\phi + \alpha_x \quad \text{e} \quad \Psi_y = \beta d_y \sin\theta \sin\phi + \alpha_y$$

É evidente que seguindo a interpretação da Figura 4.19 (b) chegaríamos ao mesmo resultado.

Em muitas aplicações é importante haver a possibilidade de variar a direção do máximo, isto é, ser possível apontar o lobo principal segundo diversas direções. Um agregado com esta possibilidade é um agregado de varrimento do feixe, ou na literatura anglo-saxónica a *scanned array*. É claro que isto pode ser feito por orientação mecânica de toda a estrutura. No entanto, um modo muito mais rápido e versátil de se fazer isto é por variação da fase entre elementos. Um agregado com esta possibilidade é um agregado de variação de fase, ou na literatura anglo-saxónica a *phased array*.

Já sabemos que o máximo do $(FA)_x$ ocorre quando $\Psi_x = \beta d_x \sin\theta \cos\phi + \alpha_x = 0$ e que o máximo do $(FA)_y$ ocorre quando $\Psi_y = \beta d_y \sin\theta \sin\phi + \alpha_y = 0$. As fases α_x e α_y são independentes pelo que é possível ajustar estas fases de modo que o máximo de FA_x não seja o mesmo que o máximo de FA_y . No entanto, normalmente pretende-se que estes máximos coincidam de modo que o agregado tenha um único feixe. Se se pretender que esse feixe esteja dirigido segundo a direção (θ_0, ϕ_0) então dever-se-á verificar as condições expressas em (4-94):

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\beta d_x \sin\theta_0 \cos\phi_0 \\ \alpha_y &= -\beta d_y \sin\theta_0 \sin\phi_0 \end{aligned} \quad (4-94)$$

Para ilustrar o tipo de diagramas de radiação que se podem obter com agregados planares, na Figura 4.20 estão ilustrados dois exemplos de agregados planares situados no plano x-y.

Exemplo 4.8

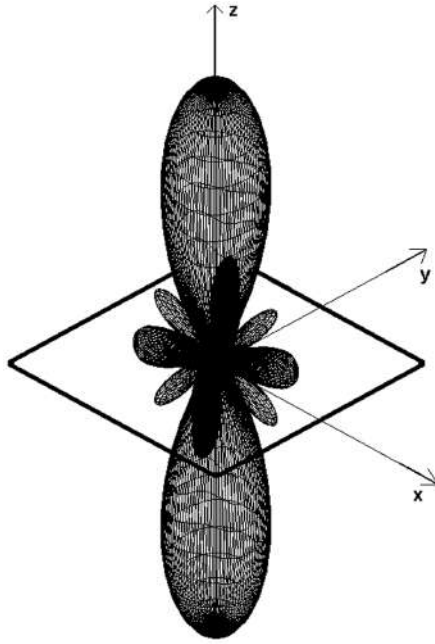
Consideremos um agregado com 5 elementos segundo o eixo dos xx, separados de 0.5λ e 5 elementos segundo o eixo dos yy, também separados de 0.5λ . Todos os elementos são alimentados em fase o que significa um máximo segundo $\theta=0^\circ$ e outro para $\theta=180^\circ$.

Na Figura 4.20 (a) está representado o respetivo diagrama de radiação em 3D.

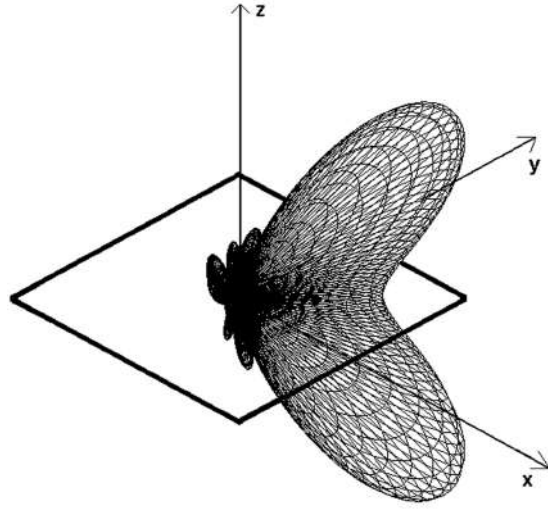
Exemplo 4.9

Consideremos um agregado com 5 elementos segundo o eixo dos xx, separados de 0.5λ e 8 elementos segundo o eixo dos yy, separados de 0.25λ . Os elementos são alimentados de forma a produzir um máximo segundo a direção $(\theta=45^\circ, \phi=45^\circ)$. Com esta alimentação aparece também um máximo segundo a direção $(\theta=135^\circ, \phi=45^\circ)$.

Na Figura 4.20 (b) está representado o respetivo diagrama de radiação em 3D.



(a) - Exemplo 4.8



(b) - Exemplo 4.11

Figura 4.20 Diagramas de radiação obtidos com agregados planares situados no plano x-y.

4.4 Agregado tridimensional

Um agregado de agregados planares constitui um agregado tridimensional. Consideremos que o espaço onde se situa o agregado é definido por três eixos fundamentais ortogonais entre si. Se, na direção de cada um destes eixos, os elementos estiverem equiespaçados, alimentados com correntes de igual amplitude, e com a mesma diferença de fase entre eles então, o agregado é uniforme. Como a diferença de fase entre as sucessivas correntes é a mesma, há ao longo de cada um desses eixos uma variação progressiva de fase.

Como exemplo consideremos o agregado tridimensional representado na Figura 4.21. Neste caso segundo o eixo dos zz só há dois elementos porque em geral nos exemplos práticos só existem dois elementos segundo um dos eixos.

Este agregado pode ser visto como um agregado de N_z elementos alinhados segundo o eixo dos zz em que o elemento é um agregado planar colocado no plano x-y, que por sua vez é constituído por N_x elementos alinhados segundo o eixo dos xx e N_y elementos alinhados segundo o eixo dos yy.

O FA_T é, portanto, dado pelo produto de três fatores de agregado, FA_x , FA_y e FA_z , tal como se indica em (4-95):

$$FA_T(\theta, \phi) = \frac{\text{sen}\left(N_x \frac{\Psi_x}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Psi_x}{2}\right)} \frac{\text{sen}\left(N_y \frac{\Psi_y}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Psi_y}{2}\right)} \frac{\text{sen}\left(N_z \frac{\Psi_z}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Psi_z}{2}\right)} \quad \text{com:} \quad (4-95)$$

$$\Psi_x = \beta d_x \text{sen}\theta \cos\phi + \alpha_x; \Psi_y = \beta d_y \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \alpha_y \text{ e } \Psi_z = \beta d_z \cos\theta + \alpha_z$$

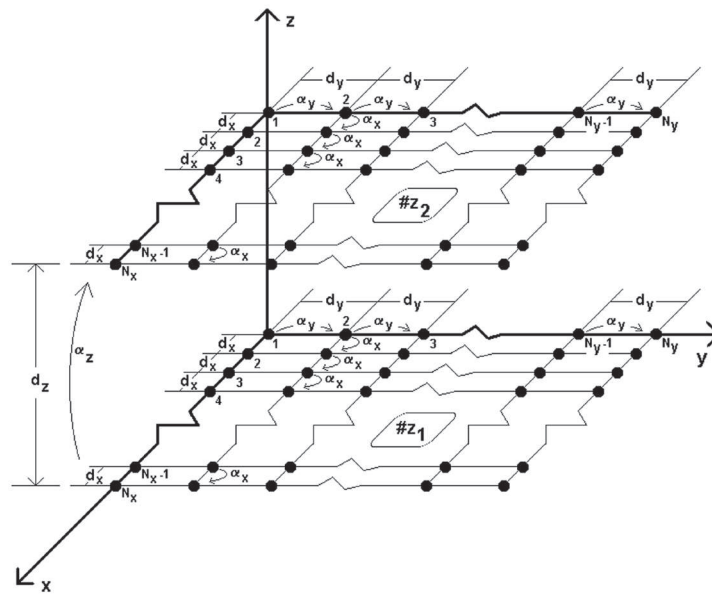


Figura 4.21 Agregado tridimensional com dois elementos segundo o eixo dos zz.

Exemplo 4.10

Considere-se a antena representada na Figura 4.22 (a). Esta antena é constituída por um agregado de dipolos situados num plano paralelo ao plano x-z e por um plano refletor considerado um condutor perfeito. Os dipolos estão dispostos de modo a formar um agregado planar uniforme no plano x-z.

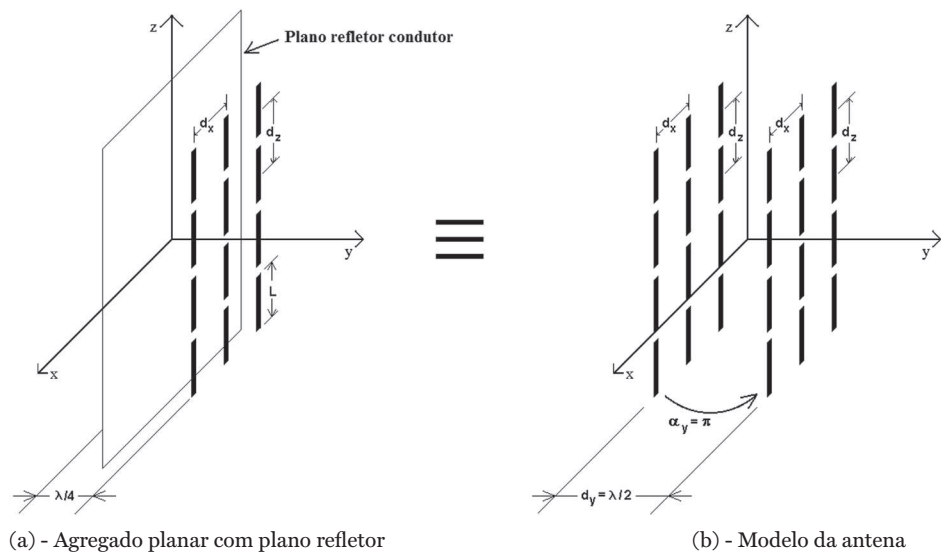


Figura 4.22 Exemplo dum agregado tridimensional produzido pela colocação dum agregado planar em frente dum plano refletor.

Considerando que o plano refletor tem dimensões superiores a um comprimento de onda, ele pode ser considerado suficientemente grande para se poder aplicar a teoria das imagens. Já vimos que o caso dum dipolo colocado paralelamente a um plano condutor pode ser modelado por um dipolo imagem situado simetricamente

em relação ao plano e com uma corrente de igual amplitude, mas em oposição de fase. Isto significa que a antena representada na Figura 4.22 (a) pode ser modelada pelo agregado tridimensional representado na Figura 4.22 (b), constituído por um agregado, de dois agregados planares, segundo o eixo dos yy, com um desfasamento $\alpha_y = \pm\pi$.

A função do refletor é dirigir a energia segundo o eixo dos yy, isto é, segundo a direção ($\theta=90^\circ; \phi=90^\circ$). Deste modo, deve-se verificar a relação (4-96):

$$\Psi_y = \beta d_y \sin\theta_0 \sin\phi_0 + \alpha_z \Big|_{\theta_0=90^\circ; \phi_0=90^\circ} = 0 \quad \text{ou,} \quad (4-96)$$

$$\Psi_y = \frac{2\pi}{\lambda} d_y - \pi = 0 \Rightarrow d_y = \frac{\lambda}{2}$$

Se d_y deve ser igual a $\frac{\lambda}{2}$, então a distância do plano dos dipolos ao refletor deve ser metade, isto é, $\frac{\lambda}{4}$ tal como é indicado na Figura 4.22 (a).

O agregado segundo o eixo dos yy está, portanto, definido pelos seguintes parâmetros: $N_y=2$, $d_y=0.5\lambda$ e $\alpha_y=\pi$.

O FA total obtém-se da expressão (4-95). Consideremos que para este exemplo se tem: $N_x=3$, $d_x=0.5\lambda$ e $\alpha_x=0$; $N_z=4$, $d_z=0.7\lambda$ e $\alpha_z=0$. Então o FA total é dado por (4-97):

$$FA_T(\theta, \phi) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\sin\theta\cos\phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)} \frac{\sin[\pi(\sin\theta\sin\phi+1)]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\sin\theta\sin\phi+1)\right]} \frac{\sin(4 \times 0.7\pi\cos\theta)}{\sin(0.7\pi\cos\theta)} \quad (4-97)$$

Considerando que o dipolo tem um comprimento $L=0.5\lambda$, então o FE é dado por (4-98):

$$\mathbf{E}_\theta(r, \theta, \phi) \cong j\eta \frac{\mathbf{I}_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] \quad (4-98)$$

donde o campo total radiado pela antena é dado por (4-99):

$$\mathbf{E}_{\theta T}(r, \theta, \phi) = j\eta \frac{\mathbf{I}_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\sin\theta\cos\phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)} \times \quad \text{para } 0 \leq \phi \leq \pi \quad (4-99)$$

$$\frac{\sin[\pi(\sin\theta\sin\phi+1)]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\sin\theta\sin\phi+1)\right]} \frac{\sin(4 \times 0.7\pi\cos\theta)}{\sin(0.7\pi\cos\theta)}$$

e $\mathbf{E}_{\theta T}(r, \theta, \phi) = 0$ para $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ devido ao plano refletor

Como o campo $\mathbf{E}$ neste caso só tem componente θ , o plano $\mathbf{E}$, definido pela direção de máxima radiação e pelo vetor $\vec{\mathbf{E}}$, é o plano y-z, isto é, o plano $\phi = 90^\circ$. Por sua vez o plano H é plano x-y, isto é, o plano $\theta = 90^\circ$. No plano E o campo total radiado pela antena é dado então por (4-100):

$$\mathbf{E}_{\theta T}(r, \theta) = j\eta \frac{\mathbf{I}_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] 3 \frac{\sin[\pi(\sin\theta+1)]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\sin\theta+1)\right]} \frac{\sin(4 \times 0.7\pi\cos\theta)}{\sin(0.7\pi\cos\theta)} \quad (4-100)$$

para $0 \leq \phi \leq \pi$

e $\mathbf{E}_{\theta T}(r, \theta, \phi) = 0$ para $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ devido ao plano refletor

No plano H o campo total radiado pela antena é dado então por (4-101):

$$\mathbf{E}_{\theta T}(r, \phi) = j\eta \frac{\mathbf{I}_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi \cos \phi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cos \phi\right)} \frac{\text{sen}\left[\pi(\text{sen} \phi + 1)\right]}{\text{sen}\left[\frac{\pi}{2}(\text{sen} \phi + 1)\right]} 4 \quad \text{para } 0 \leq \phi \leq \pi \quad (4-101)$$

e $\mathbf{E}_{\theta T}(r, \theta, \phi) = 0$ para $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ devido ao plano refletor.

O traçado gráfico destes diagramas pode ser feito recorrendo por exemplo à construção gráfica descrita anteriormente para obter os diversos FA e fazendo depois a multiplicação de todos eles e do FE, isto é, fazendo graficamente a multiplicação indicada em (4-102):

$$|\mathbf{E}_{\theta T}| = |\mathbf{FE}| (FA)_x (FA)_y (FA)_z \quad (4-102)$$

No entanto, para se ver melhor os detalhes, é mais conveniente usar unidades logarítmicas, pelo que a expressão (4-102) se transforma numa soma, tal como se indica em (4-103):

$$|\mathbf{E}_{\theta T}|_{\text{(dB)}} = 20 \log_{10}(|\mathbf{FE}|) + 20 \log_{10}[(FA)_x] + 20 \log_{10}[(FA)_y] + 20 \log_{10}[(FA)_z] \quad (4-103)$$

Na Figura 4.23 está ilustrada a representação gráfica equivalente a esta expressão para o plano E (plano y-z).

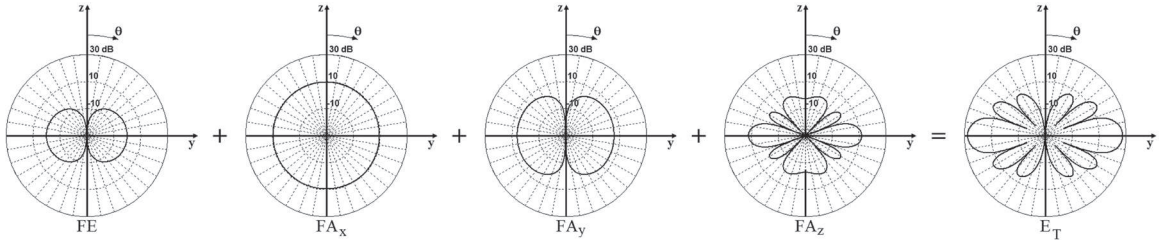


Figura 4.23 Obtenção do diagrama de radiação, em dB, no plano E, por soma dos diagramas parciais.

Na Figura 4.24 está ilustrada a representação gráfica equivalente a esta expressão para o plano H (plano x-y).

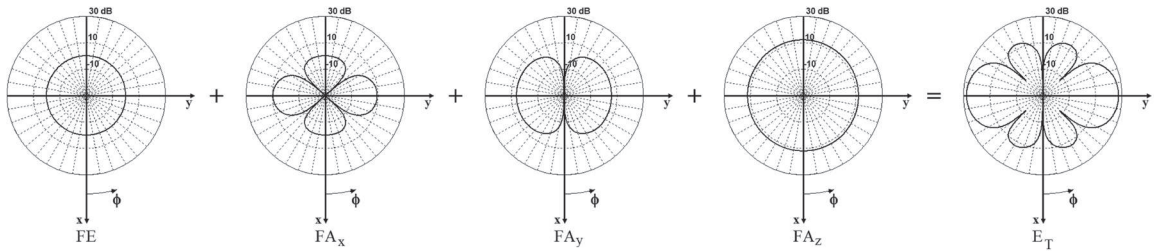


Figura 4.24 Obtenção do diagrama de radiação, em dB, no plano H, por soma dos diagramas parciais.

Nota: Nestas figuras usou-se uma escala cujo mínimo é -30dB, isto é, todos os valores inferiores são representados por este valor. No entanto convém notar que nas direções dos nulos se tem na realidade $-\infty$ dB. Sendo assim, ao somar os diversos valores nessas direções o resultado é sempre $-\infty$ dB, mas que nestes gráficos é representado por -30dB.

Verifica-se destas figuras que o FE e todos os FA assumem o seus valores máximos na direção do eixo dos yy, provocando um reforço da radiação nessa direção como se pretendia. Nestas figuras o FE foi normalizado a 0dB. O valor máximo segundo a direção do eixo dos yy é de 27.6dB, que corresponde a:

$$(FE)_{dB} + 20\log_{10}[(FA)_{xMAX}] + 20\log_{10}[(FA)_{yMAX}] + 20\log_{10}[(FA)_{zMAX}]$$

$$(FE)_{dB} + 20\log_{10}(3) + 20\log_{10}(2) + 20\log_{10}(4) = 0 + 9.6 + 6 + 12$$

As Figura 4.23 e Figura 4.24 ilustram o modo de obter o diagrama de radiação, a partir dos gráficos do FE e dos FA referentes ao modelo representado na Figura 4.22 (b). No entanto este diagrama só é válido para $0 \leq \phi \leq \pi$. Para $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ o campo é nulo devido ao plano refletor. Assim, os diagramas nos planos E e H da antenna da Figura 4.22 (a) são os representados na Figura 4.25:

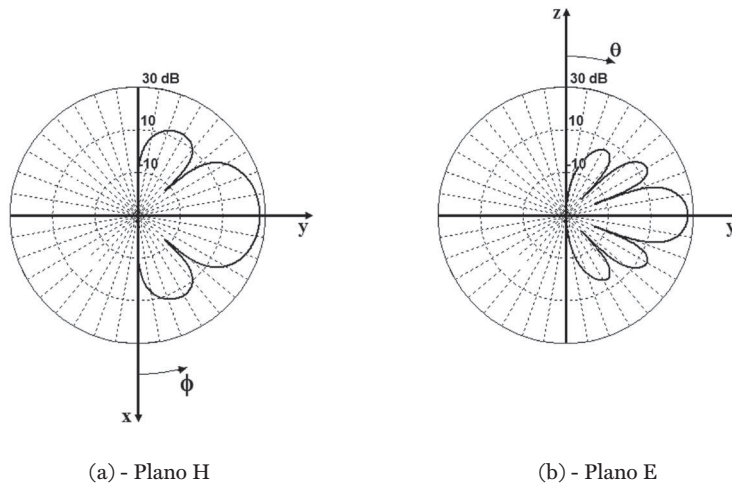


Figura 4.25 Diagramas nos planos E e H da antenna da Figura 4.22(a).

É evidente desta figura que as LFMP não são iguais nos dois planos. Com efeito a LFMP no plano H é 36° enquanto que a LFMP no plano E é 18° . Finalmente na Figura 4.26 está ilustrada uma representação 3D do diagrama de radiação da antenna.

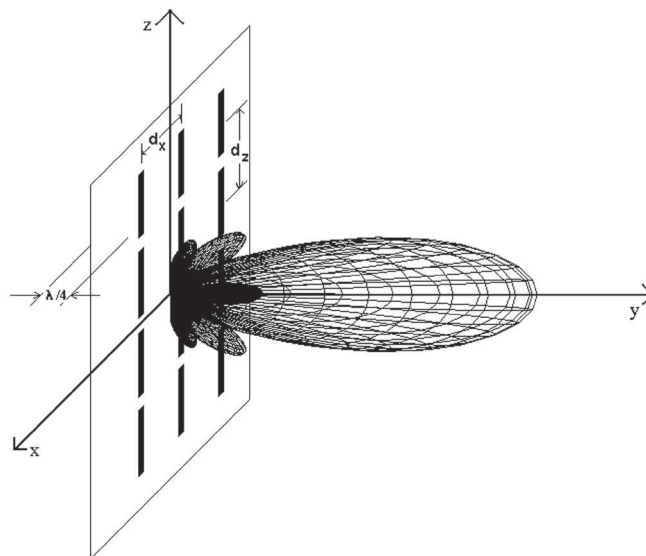


Figura 4.26 Representação 3D do diagrama de radiação da antenna da Figura 4.22(a).

É conveniente notar que neste exemplo se considerou que não há interferência mútua entre os dipolos. Na realidade há acoplamento mútuo entre elementos que pode modificar um pouco estes diagramas. O acoplamento mútuo entre antenas será tratado noutro capítulo.

4.5 Agregado linear não uniforme

Um agregado de elementos colocados não equiespaçadamente ao longo dum eixo, alimentados com correntes de amplitude e fase diferentes, é um agregado linear não uniforme.

O FA pode ser obtido usando como elementos fontes isotrópicas. Obtido o FA, quando se escolher o elemento que efetivamente vai ser usado, basta recorrer ao conceito de multiplicação de diagramas. Na Figura 4.27 está representado um agregado linear não uniforme de N fontes isotrópicas, colocadas ao longo do eixo dos zz.

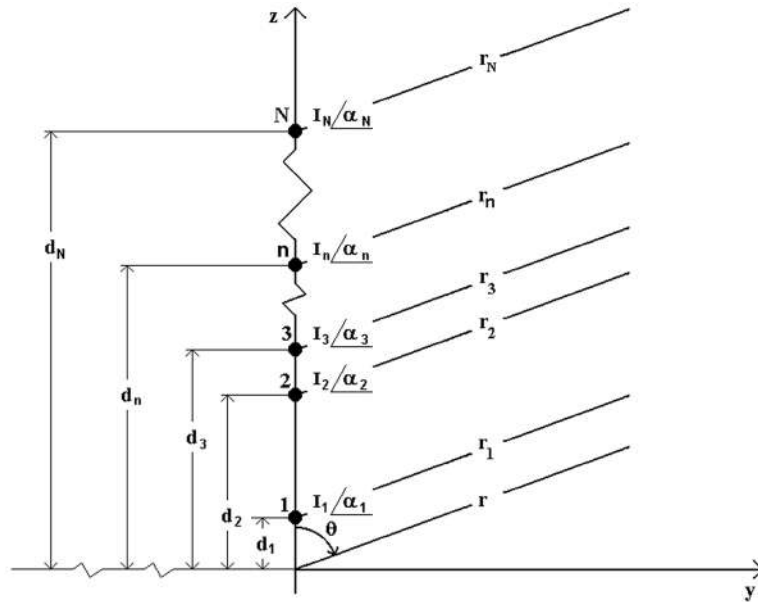


Figura 4.27 Agregado linear não uniforme de N fontes isotrópicas, colocadas ao longo do eixo dos zz.

Uma fonte isotrópica radia um campo dado pela expressão (4-104):

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (4-104)$$

em que $\mathbf{I}$ representa a excitação da fonte caracterizada por $\mathbf{I} = I e^{j\alpha}$. Assim, teremos para as diversas fontes os seguintes campos:

$$\mathbf{E}_1 = I_1 e^{j\alpha_1} \frac{e^{-j\beta r_1}}{4\pi r_1}; \mathbf{E}_2 = I_2 e^{j\alpha_2} \frac{e^{-j\beta r_2}}{4\pi r_2}; \mathbf{E}_3 = I_3 e^{j\alpha_3} \frac{e^{-j\beta r_3}}{4\pi r_3}; \dots; \mathbf{E}_N = I_N e^{j\alpha_N} \frac{e^{-j\beta r_N}}{4\pi r_N} \quad (4-105)$$

Para campo distante podemos usar as aproximações já estabelecidas e que neste caso são as escritas seguidamente em (4-106):

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \approx r - d_1 \cos \theta \\ r_2 \approx r - d_2 \cos \theta \\ r_3 \approx r - d_3 \cos \theta \\ \vdots \\ r_n \approx r - d_n \cos \theta \\ \vdots \\ r_N \approx r - d_N \cos \theta \end{array} \right. \quad \text{no expoente} \quad (4-106)$$

e

$$r_1 \approx r_2 \approx r_3 \approx r_4 \dots \approx r_n \quad \text{no denominador}$$

O campo total é a soma dos campos radiados por todas as fontes, isto é, é dado pela relação (4-107).

$$\mathbf{E}_T = \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n \quad (4-107)$$

Substituindo as relações (4-106) em (4-107), obtém-se a expressão do campo E_T indicada em (4-108):

$$\mathbf{E}_T = \underbrace{\frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}}_{\text{FE}} \underbrace{\left[I_1 e^{j(\beta d_1 \cos \theta + \alpha_1)} + \dots + I_n e^{j(\beta d_n \cos \theta + \alpha_n)} + \dots + I_N e^{j(\beta d_N \cos \theta + \alpha_N)} \right]}_{\text{FA}} \quad (4-108)$$

Nesta expressão identificam-se claramente o fator de elemento, que é o diagrama duma fonte isotrópica e, o fator de agregado que é função do número N de elementos, das suas localizações e das suas excitações.

O fator de agregado pode ser escrito duma forma mais compacta como se faz em (4-109):

$$\text{FA} = \sum_{n=1}^N I_n e^{j\Psi_n} \quad \text{com} \quad \Psi_n = \beta d_n \cos \theta + \alpha_n \quad (4-109)$$

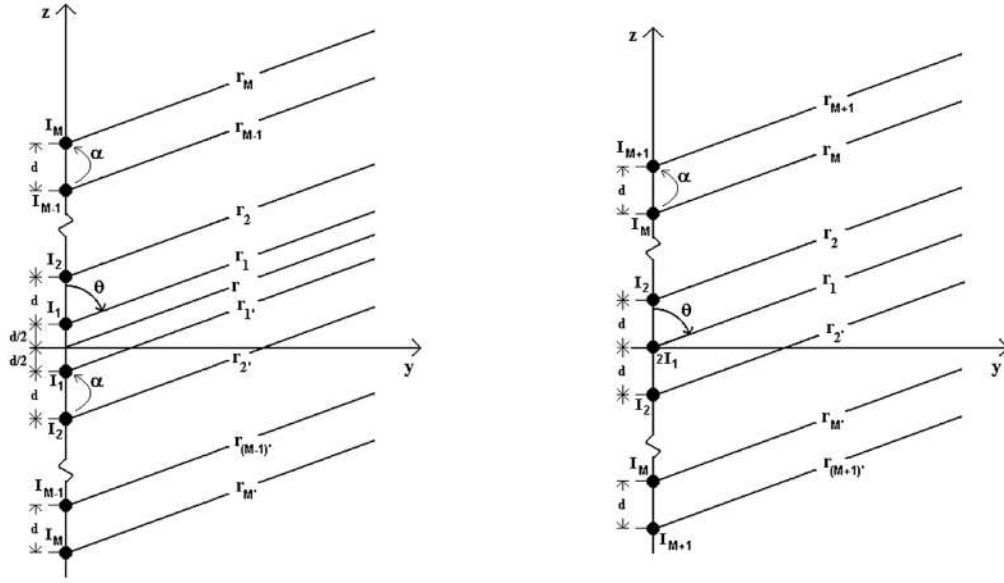
Embora se possa conceber um agregado genérico como o representado na Figura 4.27, normalmente consideram-se casos particulares mais adequados a uma implementação prática. Os casos mais comuns são os agregados com elementos equiespaçados e amplitudes diferentes, mas simétricas relativamente ao centro do agregado, e os agregados com elementos alimentados com amplitudes iguais, mas com espaçamentos diferentes entre si, mas com simetria relativamente ao centro do agregado.

4.5.1 Agregado com amplitudes não uniformes

Quando se estudou o agregado uniforme viu-se que o seu diagrama tem lobos secundários cujo nível é de aproximadamente -13dB relativamente ao lobo principal. Para algumas aplicações este nível é demasiado alto pelo que se torna necessário recorrer a outro tipo de agregados.

Uma configuração comum é o uso de agregados com elementos equiespaçados mas com amplitudes não uniformes que decrescem simetricamente do centro para os extremos.

Na Figura 4.28 estão representados dois agregados deste tipo. Na Figura 4.28 (a) está o caso do número de elementos ser par e na Figura 4.28 (b) está o caso do número de elementos ser impar. Neste último caso, ao elemento central atribuiu-se uma amplitude designada por $2I_1$, para simplificar a expressão do FA.



(a) - N Par

(b) - N Ímpar

Figura 4.28 Agregados com elementos equiespaçados e amplitudes diferentes, mas simétricas relativamente ao centro.

Consideremos primeiro o caso de N ser par, isto é, $N=2M$. Usando as aproximações de campo distante já estabelecidas e tomando como referência de fase o centro do agregado, facilmente se obtém para o FA a expressão (4-110):

$$\begin{aligned}
 (\text{FA})^{(2M)} &= I_1 e^{j\frac{1}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)} + I_1 e^{-j\frac{1}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)} + I_2 e^{j\frac{3}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)} + I_2 e^{-j\frac{3}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)} + \dots \\
 &\dots + I_n e^{j\frac{2n-1}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)} + I_n e^{-j\frac{2n-1}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)} + \dots + I_M e^{j\frac{2M-1}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)} + I_M e^{-j\frac{2M-1}{2}(\beta d \cos \theta + \alpha)}
 \end{aligned} \quad (4-110)$$

Esta expressão pode tomar a forma indicada em (4-111):

$$(\text{FA})^{(2M)} = 2I_1 \cos \left[\frac{\Psi}{2} \right] + 2I_2 \cos \left[3 \frac{\Psi}{2} \right] + \dots + 2I_M \cos \left[(2M-1) \frac{\Psi}{2} \right] \quad (4-111)$$

com $\Psi = \beta d \cos \theta + \alpha$

ou ainda a forma mais sintética indicada em (4-112):

$$(\text{FA})^{(2M)} = 2 \sum_{n=1}^{n=M} I_n \cos \left[(2n-1) \frac{\Psi}{2} \right] \quad \text{com } \Psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (4-112)$$

Considerando agora o caso de N ser ímpar, isto é, $N=2M+1$, tomando como referência de fase o centro do agregado, facilmente também se obtém para o FA a expressão (4-113):

$$\begin{aligned}
 (\text{FA})^{(2M+1)} &= 2I_1 + I_2 e^{j(\beta d \cos \theta + \alpha)} + I_2 e^{-j(\beta d \cos \theta + \alpha)} + \dots \\
 &\dots + I_n e^{j(n-1)(\beta d \cos \theta + \alpha)} + I_n e^{-j(n-1)(\beta d \cos \theta + \alpha)} + \dots + I_M e^{j(M-1)(\beta d \cos \theta + \alpha)} + I_M e^{-j(M-1)(\beta d \cos \theta + \alpha)}
 \end{aligned} \quad (4-113)$$

Esta expressão pode tomar a forma indicada em (4-114):

$$(\mathbf{FA})^{(2M+1)} = 2I_1 + 2I_2 \cos[\Psi] + \dots + 2I_n \cos[(n-1)\Psi] + \dots + 2I_M \cos[(M-1)\Psi] \quad (4-114)$$

com $\Psi = \beta d \cos \theta + \alpha$

ou ainda a forma mais sintética indicada em (4-115):

$$(\mathbf{FA})^{(2M+1)} = 2 \sum_{n=1}^{n=M+1} I_n \cos \left[2(n-1) \frac{\Psi}{2} \right] \quad \text{com } \Psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (4-115)$$

Em ambas as expressões dos FA aparece um fator 2 que pode ser removido normalizando as expressões. As expressões do FA são somas de cossenos com amplitudes diferentes, que são as alimentações dos elementos. Como se disse acima, para se obter diagramas de radiação com lobos secundários de nível baixo, deve-se alimentar os elementos com amplitudes que decresçam simetricamente do centro para os extremos. Embora se possa conseguir este efeito de diversos modos, vamos destacar de seguida dois métodos que são bastante referidos na literatura.

4.5.1.1 Agregado binomial

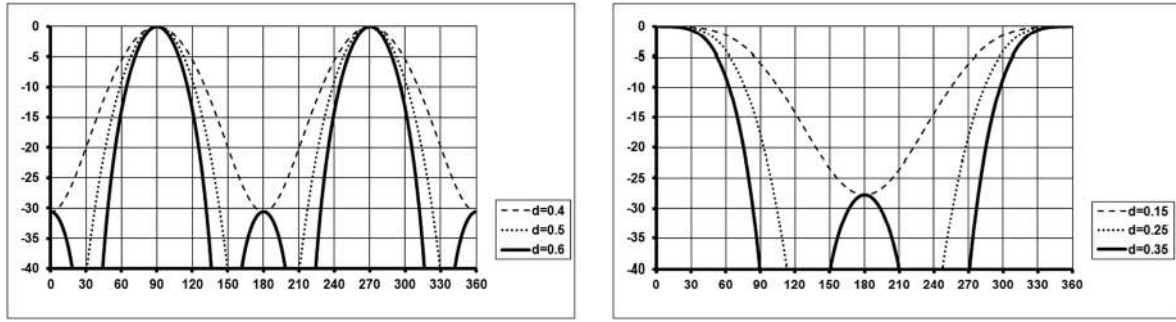
Como forma de se obter elementos com amplitudes que decresçam simetricamente do centro para os extremos, John Stone[2], propôs que se usassem amplitudes proporcionais aos coeficientes do binómio de Newton que se podem obter pelo triângulo de Pascal representado na Tabela 4-4. Um agregado projetado desta forma é designado agregado binomial.

Algumas destas distribuições podem produzir diagramas de radiação sem lobos secundários, embora por outro lado tenham um lobo principal que pode ser por vezes demasiado largo.

n	Coeficientes																		
1										1									
2									1		1								
3								1		2		1							
4							1		3		3		1						
5						1		4		6		4		1					
6					1		5		10		10		5		1				
7				1		6		15		20		15		6		1			
8			1		7		21		35		35		21		7		1		
9		1		8		28		56		70		56		28		8		1	
10	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Tabela 4-4 Triângulo de Pascal para a obtenção dos coeficientes do binómio de Newton.

Como exemplos de agregados deste tipo, na Figura 4.29 (a) estão representados os Fatores de Agregado de 3 agregados binomiais transversais, todos com 4 elementos, mas diferindo nas distâncias entre elementos e na Figura 4.29 (b) estão representados os Fatores de Agregado de 3 agregados binomiais longitudinais com o máximo de radiação segundo 0°, todos com 7 elementos, mas diferindo nas distâncias entre elementos.



(a) - Agregados transversais com N=4

(b) - Agregados longitudinais com N=7 e $\theta_m=0^\circ$

Figura 4.29 Fatores de Agregado de agregados binomiais.

Como se pode ver destes gráficos, alguns agregados dão origem a diagramas de radiação sem lobos secundários, como são os casos dos agregados transversais com $d=0.4\lambda$ e $d=0.5\lambda$, e os agregados longitudinais com $d=0.15\lambda$ e $d=0.25\lambda$. Em contrapartida são os que têm o lobo principal mais largo.

Os agregados binomiais, embora possam ser atrativos em certos casos, exigem que os elementos sejam alimentados com correntes que diferem muito entre si. Isto é tanto mais acentuado quanto maior for o número de elementos. Por exemplo, para um agregado com 10 elementos os dois elementos centrais têm que ter uma alimentação 126 vezes superior à dos elementos extremos. Isto coloca grandes problemas na malha de alimentação dos elementos e provoca também um forte acoplamento entre elementos. Este inconveniente faz com que agregados deste tipo com muitos elementos não sejam usados na prática.

4.5.1.2 Agregado Dolph-Tschebyscheff

Como se viu no estudo dos agregados binomiais, quando o nível dos lobos secundários decrescia aumentava a largura do lobo principal. É evidente que o desejável é ter simultaneamente um lobo principal estreito e um baixo nível de lobos secundários. É, portanto, importante encontrar um bom compromisso entre a largura do lobo principal e o nível dos lobos secundários.

Do estudo feito até agora neste capítulo, já se pode prever que um bom compromisso entre a largura do lobo principal e o nível dos lobos secundários será obtido se, a região visível tiver o maior número possível de lobos secundários todos com o mesmo nível. Sabendo que os polinómios de Tschebyscheff têm variações iguais de amplitude unitária, na faixa $-1 < x < 1$, Dolph[1],[2] propôs que se usassem agregados com amplitudes indexadas a polinómios de Tschebyscheff. Os agregados projetados de acordo com este princípio são designados de Dolph-Tschebyscheff.

Os polinómios de Tschebyscheff são definidos por (4-116):

$$T_n(x) = \begin{cases} (-1)^n \cosh(n \cosh^{-1}|x|) & x < -1 \\ \cos(n \cos^{-1} x) & -1 < x < 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1} x) & x > 1 \end{cases} \quad (4-116)$$

Também podem ser explicitamente definidos como em (4-117):

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1
\end{aligned}
\tag{4-117}$$

podendo os de ordem superior ser obtidos recursivamente através da relação (4-118):

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{4-118}$$

Na Figura 4.30 estão representados os polinômios Tschebyscheff $T_0(x)$ a $T_5(x)$.

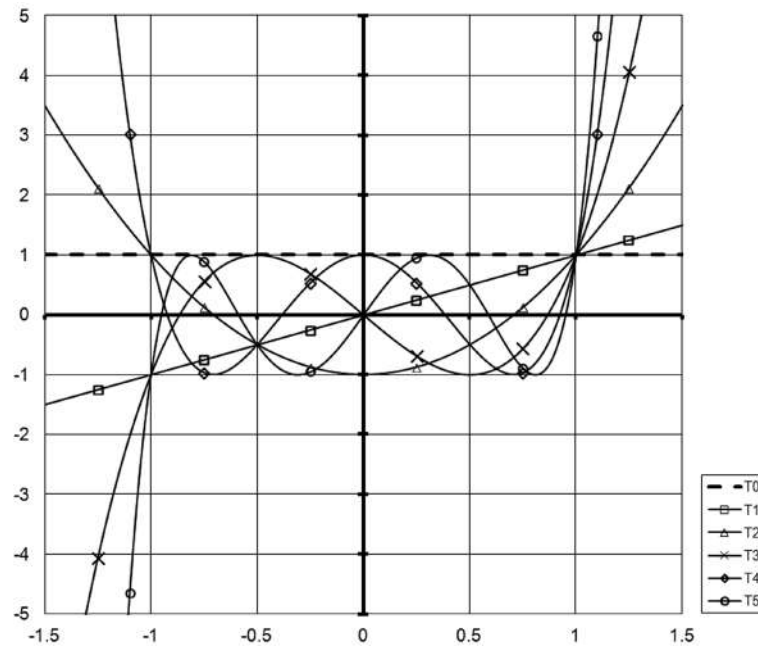


Figura 4.30 Polinômios Tschebyscheff $T_0(x)$ a $T_5(x)$.

Desta figura podem-se tirar algumas propriedades importantes destes polinômios:

- Os polinômios de ordem par são pares, isto é, $T_n(-x) = T_n(x)$.
- Os polinômios de ordem ímpar são ímpares, isto é, $T_n(-x) = -T_n(x)$.
- Todos os polinômios passam pelo ponto (1,1).
- Na faixa $-1 \leq x \leq 1$, os polinômios assumem valores compreendidos entre -1 e 1.
- Todos os zeros destes polinômios estão contidos na faixa $-1 \leq x \leq 1$.

A propriedade destes polinômios terem oscilações de amplitude constante na faixa $-1 \leq x \leq 1$, é o que os torna atrativos para darem origem a FA com lobos secundários de igual amplitude.

Os Fatores de Agregado dados por (4-112) e (4-115), são somatórios de termos do tipo $\cos(mu)$ em que $u = \frac{\Psi}{2}$ e $m=2n-1$ para os agregados com N par e $m=2(n-1)$ para os agregados com N ímpar.

Usando fórmulas trigonométricas apropriadas é possível expandir estes cossenos em potências de $\cos(u)$. Concretamente pode-se obter as relações indicadas em (4-119):

$m = 0$	$\cos(u) = 1$	
$m = 1$	$\cos(u) = \cos u$	
$m = 2$	$\cos(2u) = 2 \cos^2 u - 1$	
$m = 3$	$\cos(3u) = 4 \cos^3 u - 3 \cos u$	(4-119)
$m = 4$	$\cos(4u) = 8 \cos^4 u - 8 \cos^2 u + 1$	
.		
.		

Como se pode ver por comparação com (4-117), estas expressões são polinómios de Tschebyscheff. Como os Fatores de Agregado dados por (4-112) e (4-115), são somatórios de termos do tipo $\cos(mu)$, então eles são também uma soma de polinómios do tipo indicado em (4-119). Para agregados com $N=2M$ fontes, isto é, N par, o termo de maior ordem desse somatório será $2M-1$. Para agregados com $N=2M+1$ fontes, isto é, N ímpar, o termo de maior ordem desse somatório será $2[(M+1)-1]$. Em qualquer caso, o FA dum agregado com N fontes pode ser expresso por um polinómio de ordem $N-1$.

Concretizemos o projeto dum agregado Dolph-Tschebyscheff, transversal. O objetivo é projetar um agregado com N fontes separadas de d , que dê origem a um FA com lobos secundários que estejam R dB abaixo do lobo principal.

Suponhamos que queremos um agregado com 6 fontes, então o FA é descrito por um polinómio de grau 5. Se equacionarmos este polinómio ao polinómio de Tschebyscheff de grau 5, representado na Figura 4.31, obteremos o diagrama de radiação desejado.

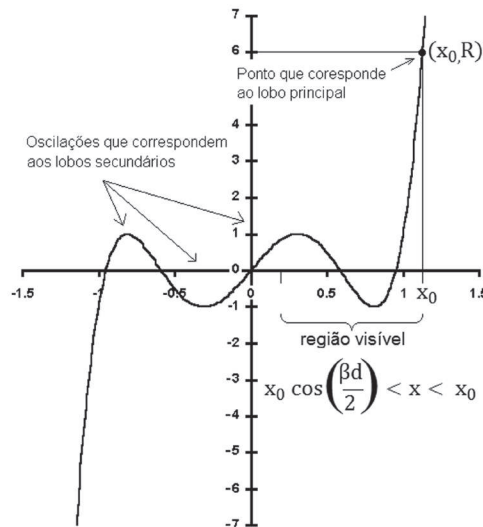


Figura 4.31 Polinómio de Tschebyscheff de grau 5 que corresponde ao diagrama de radiação dum agregado de 6 fontes.

Se se pretende que os lobos secundários estejam R dB abaixo do lobo principal, isso significa que a razão entre o lobo principal e os lobos secundários é $R = 10^{\frac{RdB}{20}}$.

O ponto (x_0, R) do gráfico da Figura 4.31 corresponde ao lobo principal e as oscilações na faixa $-1 < x < 1$, correspondem aos lobos secundários.

Como a amplitude destas oscilações é 1, temos que: $R = \frac{\text{Nível do lobo principal}}{\text{Nível dos lobos secundários}}$.

O valor de R está relacionado com x_0 através da relação (4-120), onde N é o número de fontes do agregado.

$$R = \cosh \left[(N-1) \cosh^{-1} (x_0) \right] \quad (4-120)$$

Conhecido o valor de R, pode-se, portanto, obter a partir de (4-120) o valor de x_0 , tal como se indica em (4-121):

$$x_0 = \cosh \left[\frac{1}{(N-1)} \cosh^{-1} (R) \right] \quad (4-121)$$

Já vimos anteriormente que o FA dum agregado transversal tem uma região visível dada pela relação $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, com o máximo a ocorrer para $\theta=90^\circ$. Como há simetria relativamente a $\theta=90^\circ$, consideremos apenas a faixa indicada em (4-122):

$$0 \leq \theta \leq 90^\circ \leftrightarrow \text{Máximo} \Rightarrow 1 \geq \cos \theta \geq 0 \leftrightarrow \text{Máximo} \quad (4-122)$$

Em termos da variável Ψ esta região pode-se exprimir como indicado em (4-123):

$$\frac{\beta d}{2} \geq \frac{\Psi}{2} \geq 0 \leftrightarrow \text{Máximo} \quad (4-123)$$

a qual por sua vez se pode escrever como se indica em (4-124):

$$\cos \left(\frac{\beta d}{2} \right) \leq \cos \left(\frac{\Psi}{2} \right) \leq 1 \leftrightarrow \text{Máximo} \quad (4-124)$$

No entanto, em termos da variável x do gráfico da Figura 4.31, como o máximo corresponde a x_0 , deveremos exprimir essa região como se indica em (4-125), fazendo a mudança de variável indicada em (4-126).

$$x_0 \cos \left(\frac{\beta d}{2} \right) \leq \underbrace{x_0 \cos \left(\frac{\Psi}{2} \right)}_x \leq x_0 \leftrightarrow \text{Máximo} \quad (4-125)$$

$$x = x_0 \cos \left(\frac{\Psi}{2} \right) = x_0 \cos(u) \quad (4-126)$$

Isto é, a região visível na variável x é expressa pela relação (4-127):

$$x_0 \cos \left(\frac{\beta d}{2} \right) \leq x \leq x_0 \leftrightarrow \text{Máximo} \quad (4-127)$$

Se $d = \frac{\lambda}{2}$ esta região é $0 \leq x \leq x_0$. Se $d = \lambda$ esta região é $-x_0 \leq x \leq x_0$, aparecendo um lobo principal repetido em $-x_0$, como seria de esperar pois $d = \lambda$.

Com base nas considerações anteriores pode-se estabelecer um procedimento para o projeto dum agregado Dolph-Tschebyscheff com N fontes separadas de d , que dê origem a um FA com lobos secundários que estejam RdB abaixo do lobo principal. Este procedimento pode ser sistematizado da seguinte forma:

1. De acordo com o valor de N, escolher o FA indicado em (4-112) ou em (4-115).
2. Expandir os cossenos do tipo $\cos(mu)$ em potências de $\cos(u)$ usando as relações (4-119).
3. Calcular o valor x_0 , usando a relação (4-121).
4. Substituir, na expansão obtida no ponto 2, $\cos(u)$ por $\frac{x}{x_0}$, de acordo com (4-126).
5. Equacionar a expressão obtida no ponto 4 com o polinómio de Tschebyscheff de ordem N-1 e a partir daqui determinar os coeficientes I_n do FA escolhido.
6. Escrever o FA usando os coeficientes determinados no ponto 5.

Exemplo 4.11

Projetar um agregado Dolph-Tschebyscheff com 4 fontes separadas de d , que dê origem a um FA com lobos secundários que estejam 20dB abaixo do lobo principal.

De acordo com o ponto 1, como N é par temos que escolher o FA dado por (4-112) com $M=2$, isto é:

$$(FA)^{(4)} = \sum_{n=1}^{n=2} I_n \cos[(2n-1)u] \quad \text{com} \quad u = \frac{\Psi}{2} \quad \text{e} \quad \Psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (4-128)$$

Expandindo (4-128) como indicado no ponto 2, obtém-se (4-129):

$$\begin{aligned} (FA)^{(4)} &= I_1 \cos u + I_2 \cos 3u = I_1 \cos u + I_2 (4 \cos^3 u - 3 \cos u) = \\ &= 4I_2 \cos^3 u + (I_1 - 3I_2) \cos u \end{aligned} \quad (4-129)$$

Como $R_{dB}=20$ dB, isso significa que $R=10$. De acordo com o ponto 3, com este valor pode-se calcular x_0 usando (4-121), obtendo-se:

$$x_0 = \cosh \left[\frac{1}{(4-1)} \cosh^{-1}(10) \right] = 1.54 \quad (4-130)$$

Substituindo, na expansão (4-129) $\cos(u)$ por $\frac{x}{x_0}$, obtém-se (4-131):

$$(FA)^{(4)} = 4I_2 \cos^3 u + (I_1 - 3I_2) \cos u = 4I_2 \left(\frac{x}{1.54} \right)^3 + (I_1 - 3I_2) \frac{x}{1.54} \quad (4-131)$$

De acordo com o ponto 5 equacionando a expressão (4-131) com o polinômio de Tschebyscheff de ordem 3, obtém-se (4-132):

$$4I_2 \left(\frac{x}{1.54} \right)^3 + (I_1 - 3I_2) \frac{x}{1.54} = T_3(x) = 4x^3 - 3x \quad (4-132)$$

Desta expressão obtém-se os coeficientes I_n que são os indicados em (4-133):

$$\begin{cases} \frac{4I_2}{1.54^3} = 4 \\ \frac{I_1 - 3I_2}{1.54} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = 1.54^3 \\ I_1 = -3 \times 1.54 + 3I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = 1 \\ I_1 = 1.735 \end{cases} \begin{cases} \text{Valores normalizados} \\ \text{em relação ao elemento} \\ \text{extremo} \end{cases} \quad (4-133)$$

Com estes coeficientes pode-se finalmente obter a expressão do FA a qual, já em função dos parâmetros do agregado, está indicada em (4-134):

$$(FA)^{(4)} = 1.735 \cos \left[\frac{1}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right] + \cos \left[\frac{3}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right] \quad (4-134)$$

Na Figura 4.32 estão representados os diagramas de radiação deste agregado, na configuração transversal, para 3 valores de d .

Como se pode ver desta figura, todos os diagramas têm lobos secundários 20dB abaixo do lobo principal como tinha sido pretendido. Quando d aumenta a região visível expressa por (4-127) aumenta, e, portanto, aparecem mais lobos secundários, no entanto a largura do lobo principal diminui.

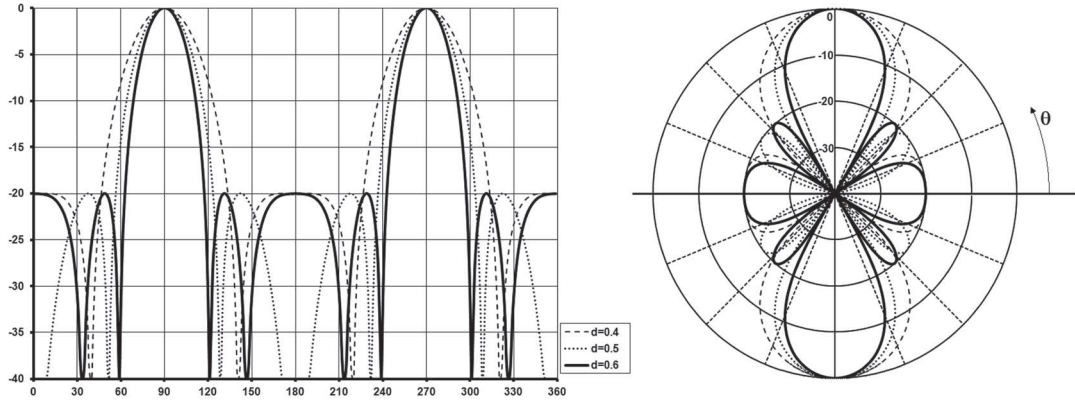


Figura 4.32 Diagramas de radiação dum agregado transversal Dolph-Tschebyscheff com 4 fontes, projetado para ter lobos secundários 20dB abaixo do lobo principal.

Exemplo 4.12

Projetar um agregado Dolph-Tschebyscheff com 7 fontes separadas de d , que dê origem a um FA com lobos secundários que estejam 30dB abaixo do lobo principal.

De acordo com o ponto 1, como N é ímpar temos que escolher o FA dado por (4-115) com $M=3$, isto é:

$$(FA)^{(7)} = \sum_{n=1}^{n=4} I_n \cos \left[2(n-1) \frac{\Psi}{2} \right] \quad \text{com} \quad u = \frac{\Psi}{2} \quad \text{e} \quad \Psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (4-135)$$

Expandindo (4-135) como indicado no ponto 2, obtém-se (4-136):

$$\begin{aligned} (FA)^{(7)} &= I_1 + I_2 \cos 2u + I_3 \cos 4u + I_4 \cos 6u = \\ &= I_1 + I_2 (2 \cos^2 u - 1) + I_3 (8 \cos^4 u - 8 \cos^2 u + 1) + \\ &\quad + I_4 (32 \cos^6 u - 48 \cos^4 u + 18 \cos^2 u - 1) = \\ &= 32 I_4 \cos^6 u + (8 I_3 - 48 I_4) \cos^4 u + (2 I_2 - 8 I_3 + 18 I_4) \cos^2 u + (I_1 - I_2 + I_3 - I_4) \end{aligned} \quad (4-136)$$

Como $R_{dB}=30\text{dB}$, isso significa que $R=31.62$. De acordo com o ponto 3, com este valor pode-se calcular x_0 , usando (4-121), obtendo-se:

$$x_0 = \cosh \left[\frac{1}{(7-1)} \cosh^{-1} (31.62) \right] = 1.248 \quad (4-137)$$

Substituindo, na expansão (4-136) $\cos(u)$ por $\frac{x}{x_0}$, obtém-se (4-138):

$$\begin{aligned} (FA)^{(7)} &= 32 I_4 \left(\frac{x}{1.248} \right)^6 + (8 I_3 - 48 I_4) \left(\frac{x}{1.248} \right)^4 + (2 I_2 - 8 I_3 + 18 I_4) \left(\frac{x}{1.248} \right)^2 + \\ &\quad + (I_1 - I_2 + I_3 - I_4) \end{aligned} \quad (4-138)$$

De acordo com o ponto 5 equacionando a expressão (4-138) com o polinómio de Tschebyscheff de ordem 6, obtém-se (4-139):

$$\begin{aligned} 32 I_4 \left(\frac{x}{1.248} \right)^6 + (8 I_3 - 48 I_4) \left(\frac{x}{1.248} \right)^4 + (2 I_2 - 8 I_3 + 18 I_4) \left(\frac{x}{1.248} \right)^2 + \\ + (I_1 - I_2 + I_3 - I_4) = T_6(x) = 32 x^6 - 48 x^4 + 18 x^2 - 1 \end{aligned} \quad (4-139)$$

Desta expressão obtém-se os coeficientes I_n que são os indicados em (4-140):

$$\begin{cases} \frac{32 I_4}{1.248^6} = 32 \\ \frac{8 I_3 - 48 I_4}{1.248^4} = -48 \\ \frac{2 I_2 - 8 I_3 + 18 I_4}{1.248^2} = 18 \\ I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_4 = 3.778 \\ I_3 = 8.1144 \\ I_2 = 12.4731 \\ I_1 = 7.13676 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_4 = 1 \\ I_3 = 2.15 \\ I_2 = 3.3 \\ I_1 = 1.89 \end{cases} \begin{cases} \text{Valores normalizados} \\ \text{em relação ao elemento} \\ \text{extremo} \end{cases} \quad (4-140)$$

Convém notar que, por se tratar dum agregado com um número ímpar de elementos, a amplitude do elemento central do agregado é $2xI_3$, de acordo com a Figura 4.28 (b).

Com estes coeficientes pode-se finalmente obter a expressão do FA a qual, já em função dos parâmetros do agregado, está indicada em (4-141):

$$\begin{aligned} (FA)^{(7)} &= I_1 + I_2 \cos 2u + I_3 \cos 4u + I_4 \cos 6u = \\ &= 1.89 + 3.3 \cos [\beta d \cos \theta + \alpha] + 2.15 \cos [2(\beta d \cos \theta + \alpha)] + \cos [3(\beta d \cos \theta + \alpha)] \end{aligned} \quad (4-141)$$

Na Figura 4.33 estão representados os diagramas de radiação deste agregado, na configuração longitudinal, para 3 valores de d . Como se pode ver desta figura, todos os diagramas têm lobos secundários 30dB abaixo do lobo principal como tinha sido pretendido. Quando d aumenta a região visível aumenta, e, portanto, aparecem mais lobos secundários, no entanto a largura do lobo principal diminui.

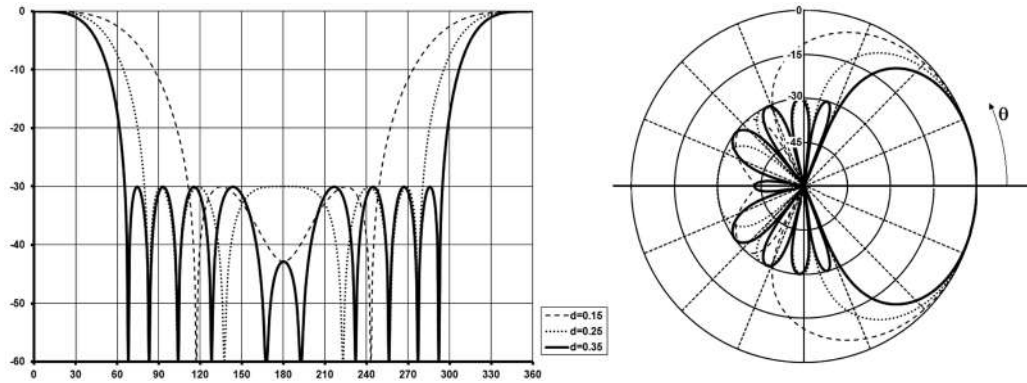


Figura 4.33 Diagramas de radiação dum agregado longitudinal Dolph-Tschebyscheff com 7 fontes, projetado para ter lobos secundários 30dB abaixo do lobo principal.

O procedimento anterior para determinar os coeficientes I_n não é prático de usar para agregados com muitos elementos e além disso não é fácil de se converter num algoritmo programável. Várias técnicas para determinar os coeficientes I_n foram entretanto desenvolvidas por alguns investigadores, sendo de realçar o método deduzido por Barbieri [4] que também é referenciado em [1]. Este método é adequado para o desenvolvimento dum algoritmo numérico. Com base neste método, o autor desenvolveu um *script* Matlab que permite fazer o projeto rápido dum agregado Tschebyscheff. Este *script* designado *ProjetoAgregadoTschebyscheff.m* calcula os coeficientes I_n e apresenta os gráficos do diagrama de radiação. Os dados de entrada são o número de elementos, o espaçamento entre eles, a direção de máxima radiação e a razão em dB entre o lobo principal e os lobos secundários.

O projeto dum agregado Dolph-Tschebyscheff é o que conduz ao nível mais baixo de lobos secundários, para uma dada largura de feixe. Já vimos que o aumento do espaçamento entre elementos faz diminuir a largura do feixe e aumentar o número de lobos secundários. Se não houver limitações no que diz respeito ao comprimento do agregado, deve-se procurar o espaçamento que produza a menor largura de feixe. Isso equivale a meter na região visível o maior número possível de lobos secundários sem que nenhum deles atinja um nível superior ao especificado.

Expressões para a obtenção do espaçamento ótimo entre elementos, para agregados Dolph-Tschebyscheff, que minimiza a largura do lobo principal, foram deduzidas em [3] e estão indicadas em (4-142) e (4-143):

$$d_{\text{opt}} = \lambda \left[1 - \frac{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\pi} \right] \quad \text{para agregados transversais} \quad (4-142)$$

$$d_{\text{opt}} = \frac{\lambda}{2} \left[1 - \frac{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\pi} \right] \quad \text{para agregados longitudinais} \quad (4-143)$$

com γ dado por (4-144):

$$\gamma = \cosh \left[\frac{1}{N-1} \ln(R + \sqrt{R^2 - 1}) \right] \quad (4-144)$$

Os mesmos autores mostraram que a diretividade é igual para agregados transversais e longitudinais com espaçamento ótimo. A largura do feixe dum agregado longitudinal é bastante mais larga do que a do feixe dum agregado transversal. No entanto, o feixe dum agregado longitudinal tem a forma duma ‘pêra’ e é dirigido apenas para um dos lados do eixo, enquanto o feixe dum agregado transversal tem a forma dum disco que se desenvolve transversalmente em redor do eixo do agregado. Os dois efeitos compensam-se obtendo-se o mesmo ângulo sólido de feixe e, portanto, a mesma diretividade.

Para o exemplo anterior, obtém-se um espaçamento ótimo $d_{\text{opt}} = 0.796\lambda$ se o agregado for transversal e $d_{\text{opt}} = 0.398\lambda$ se o agregado for longitudinal. Calculando numericamente as diretividades para os dois casos obtém-se $D = 9.34$, comprovando-se assim a afirmação acima feita.

4.5.1.3 Comparação entre os agregados uniforme, binomial e Dolph-Tschebyscheff

Para efeitos de comparação entre os agregados uniforme, binomial e Dolph-Tschebyscheff, na Figura 4.34 estão representados os diagramas de radiação de 3 agregados com o mesmo número de elementos e com o mesmo espaçamento entre eles, mas com essas diferentes distribuições de amplitude.

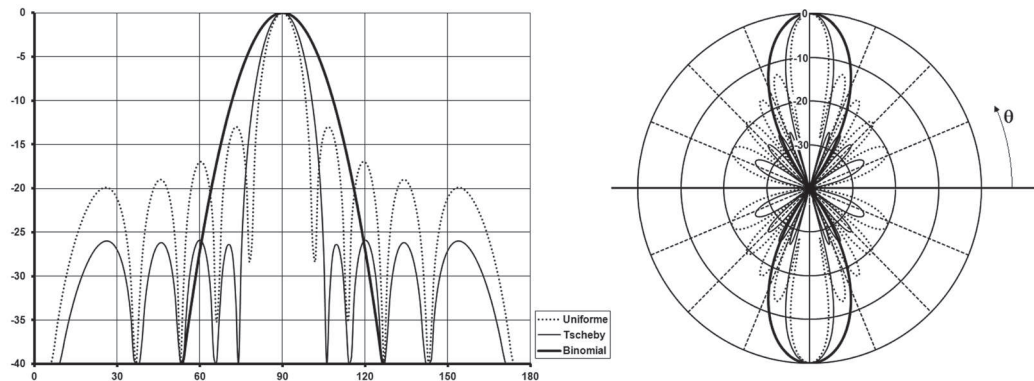


Figura 4.34 Comparação entre os diagramas de radiação de 3 agregados com o mesmo número de elementos e com o mesmo espaçamento entre eles, mas com distribuições diferentes: uniforme, binomial e Dolph-Tschebyscheff. $N=10$, $d=0.5\lambda$.

Da Figura 4.34 podem-se obter as respetivas LFMP e o nível dos lobos secundários. Foram também calculadas numericamente as diretividades destes agregados. Estas características estão resumidas na Tabela 4-5.

Tipo/Característica	LFMP (Graus)	Nível dos lobos secundários (dB)	Diretividade
Uniforme	10	-13	7
Binomial	20	Não tem lobos secundários	5.4
Tschebyscheff	12	-26 (de acordo com o projetado)	8.9

Tabela 4-5 Comparação entre algumas características dos diagramas de radiação da Figura 4.34.

Desta comparação podemos concluir resumidamente o seguinte:

- Em termos de LFMP a menor largura consegue-se com a distribuição uniforme, seguida da distribuição Tschebyscheff e da binomial.
- No que diz respeito ao nível dos lobos secundários o mais baixo nível consegue-se com a distribuição binomial (que por vezes nem sequer tem lobos secundários) seguida das distribuições Tschebyscheff e uniforme.
- Para uma dada LFMP, a distribuição Tschebyscheff é a que produz menor nível de lobos secundários.
- Quanto ao sistema de alimentação a distribuição binomial é a de maior dificuldade de realização devido à grande variação entre as amplitudes dos diferentes elementos, sobretudo para agregados com muitas fontes. As outras distribuições são relativamente fáceis de implementar, sendo obviamente a uniforme a mais fácil de todas.

Duma forma esquemática podem-se ordenar estas distribuições de acordo com a Tabela 4-6.

Tipo/Característica	Menor LFMP	Mais baixo nível dos lobos secundários	Mais baixo nível dos lobos secundários, para uma dada LF
Uniforme	1°	3°	3°
Binomial	3°	1°	2°
Tschebyscheff	2°	2°	1°

Tabela 4-6 Resumo comparativo entre agregados uniforme, binomial e Dolph-Tschebyscheff.

4.5.2 Agregado com espaçamento não uniforme entre elementos

Vimos nas secções anteriores que os agregados com elementos alimentados com amplitudes não uniformes podem produzir diagramas de radiação com muito boas características. No entanto estes agregados necessitam dum sistema de alimentação bem calibrado, para produzir nos elementos as desejadas alimentações.

Como em geral é mais fácil projetar um alimentador que produza amplitudes iguais, pode-se tentar projetar um agregado com elementos alimentados dum modo uniforme, mas com espaçamentos diferentes entre si, otimizados de modo a produzir um diagrama de radiação apropriado. Na Figura 4.35 está representado um agregado transversal deste tipo para o caso dum número par de elementos colocados simetricamente relativamente ao centro do agregado.

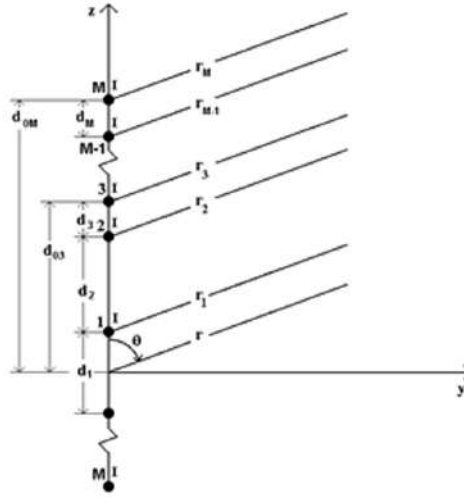


Figura 4.35 Agregado com $N=2M$ elementos alimentados dum modo uniforme, mas com espaçamentos diferentes entre si. Elementos colocados simetricamente relativamente ao centro do agregado.

O fator de agregado deste agregado pode-se obter facilmente a partir da expressão geral (4-109). No entanto, atendendo a que há simetria, que as amplitudes I_n são iguais, (podendo ser normalizadas a 1), que as fases são nulas e, tendo em conta que a distância d_{0m} do elemento m ao centro é dada por (4-145),

$$d_{0m} = \sum_{i=1}^m d_i - \frac{d_1}{2} \quad (4-145)$$

então o FA pode ser dado pela expressão (4-146):

$$FA = 2 \sum_{n=1}^M \cos(\beta d_{0n} \cos \theta) \quad (4-146)$$

O conjunto de espaçamentos necessários para dar origem a um FA com determinadas características pode ser obtido por um processo de otimização.

Haupt[5] exemplifica a otimização dum agregado deste tipo com 48 elementos usando algoritmos genéticos. Os algoritmos genéticos são um método numérico global de otimização. Neste método cada parâmetro a otimizar é codificado numa sequência binária chamado gene e o conjunto destes genes formam um cromossoma que engloba o conjunto dos parâmetros a otimizar. A cada cromossoma corresponde, portanto, uma configuração do problema a otimizar.

No método de otimização por algoritmos genéticos começa-se por gerar, numa forma aleatória, um conjunto de cromossomas (normalmente em número par) aos quais correspondem outras tantas configurações do problema a otimizar. Analisando cada uma destas configurações, é possível estabelecer uma ordenação do seu mérito tendo como referência o desempenho que se deseja para o problema em consideração. Ordenando os respetivos cromossomas por ordem decrescente do mérito das correspondentes configurações, obtém-se uma lista em que os primeiros são os melhores cromossomas do conjunto inicial. A partir daqui inicia-se um processo de seleção natural através de cruzamentos, e mutações até se atingir o cromossoma que corresponde à solução ótima para o problema em causa.

Duma forma resumida o processo de otimização está explicado na Figura 4.36.

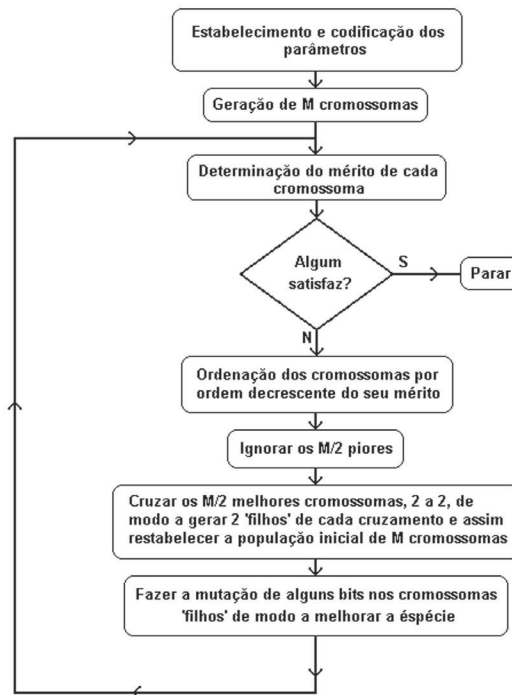


Figura 4.36 Diagrama de sequência do método de otimização por algoritmos genéticos.

Usando este método, Haupt[5] otimizou um agregado transversal com 48 elementos, com o objetivo de obter o menor nível possível de lobos secundários com a condição dos espaçamentos entre elementos estarem compreendidos entre $\lambda/4$ e λ . O resultado que obteve corresponde aos seguintes valores de d_m .

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_m	0.25	0.25	0.25	0.375	0.25	0.375	0.375	0.25	0.375	0.25	0.5	0.25
m	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
d_m	0.5	0.375	0.375	0.375	0.5	0.5	0.625	0.5	0.75	1.0	0.75	0.875

Usando estes valores em (4-145) e depois a expressão (4-146), obtém-se o diagrama de radiação representado na Figura 4.37. Na mesma figura e para comparação, está representado o diagrama de radiação dum agregado uniforme com 48 elementos espaçados de 0.5λ .

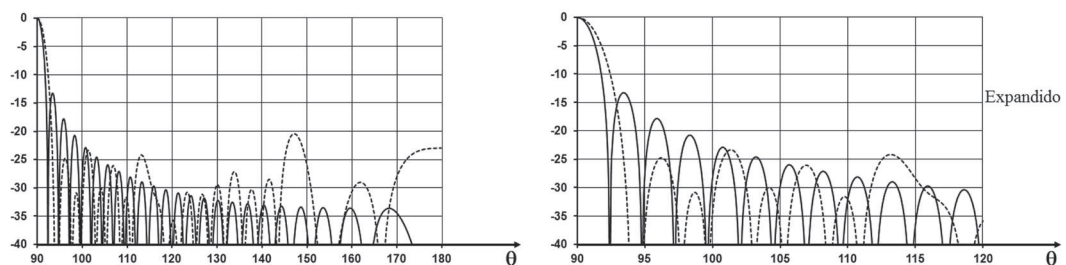


Figura 4.37 Comparação entre diagramas de radiação do FA dum agregado cm 48 elementos.

— Agregado uniforme com $d=0.5\lambda$; - - - Agregado não uniforme, com os d_m da tabela anterior.

Como se pode ver da Figura 4.37, com este arranjo consegue-se efetivamente reduzir o nível dos primeiros lobos secundários. Embora haja regiões angulares em que os lobos secundários têm um nível superior ao do

agregado uniforme, esse nível é inferior a 20dB o que é aceitável para muitas aplicações. Para além disso, o elemento usado no agregado tem normalmente alguma diretividade que contribui para reduzir o nível dos lobos secundários do diagrama de radiação final. Para ilustrar este caso na Figura 4.38 estão representados os diagramas de radiação finais, usando os agregados anteriores e um elemento com um diagrama de radiação da forma $\text{sen}(\theta)$, semelhante, por exemplo ao dum dipolo curto.

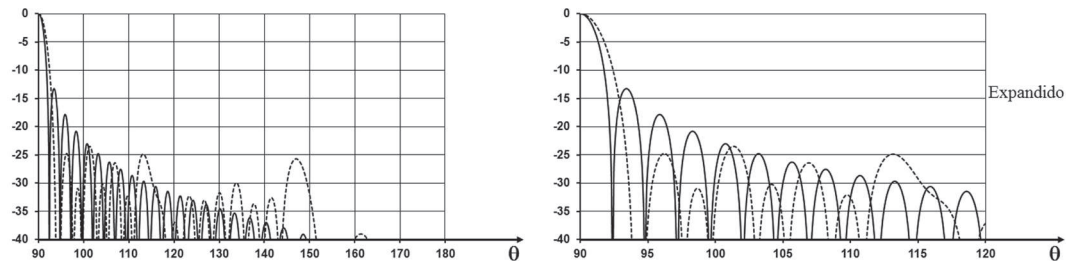


Figura 4.38 Diagramas de radiação totais, usando um $\text{FE}=\text{sen}(\theta)$ nos agregados anteriores.
— Agregado uniforme com $d=0.5\lambda$; - - - Agregado não uniforme, com os d_m da tabela anterior.

Como se pode ver da Figura 4.38, usando este tipo de elemento consegue-se reduzir um pouco mais o nível dos lobos secundários mais afastados do lobo principal, que não ultrapassam agora os 25dB.

Havendo redução dos lobos secundários é de esperar um aumento da largura do lobo principal, tal como se vê na Figura 4.37. Isso significa uma redução da diretividade deste agregado. De facto, a diretividade calculada numericamente é $D=37.4$ equivalente a 15.7dBi, enquanto que a diretividade do agregado uniforme com $d=0.5\lambda$ é, como já vimos anteriormente, $D=48$ equivalente a 16.8dBi.

Referências

- [1] C. A. Balanis, *Antenna Theory-Analysis and Design*, Harper & Row, Publishers, New York, 1982.
- [2] J. D. Kraus, *Antennas*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1988.
- [3] A. Safaai-Jazi, "A New Formulation of the Design of Chebyshev Arrays", *IEEE Trans. Ant. & Prop.*, Vol. 42, pp. 439-443, March 1995.
- [4] D. Barbieri, "A Method for Calculating the Current Distribution of Tschebyscheff Arrays", *Proceedings of the I.R.E.*, May 1947, pp. 489-492.
- [5] R. L. Haupt, "An Introduction to Genetic Algorithms for Electromagnetics", *IEEE Ant. & Prop. Magazine*, Vol. 37, pp. 7-15, April 1995.

Exercícios

1. Pretende-se construir um agregado linear e uniforme constituído por N fontes separadas de d e que tenha as seguintes características:

- (i) um máximo segundo o eixo do agregado ($\gamma=0^\circ$);
- (ii) um nulo na direção $\gamma=65^\circ$;
- (iii) ausência de lobos principais repetidos e,
- (iv) uma razão frente/trás maior do que 10dB.

- a) Determine o menor N e o respetivo d que satisfazem estas condições.
- b) Determine nas condições da alínea a) a razão frente/trás.
- c) Esboce o diagrama de radiação num plano que contenha o eixo do agregado

2. Considere um agregado transversal e uniforme de 2 dipolos de meia onda, colocados paralelamente lado a lado, separados uma distância d . Considere que os dipolos não têm perdas e que a razão comprimento/diâmetro dos dipolos é: $l/d = 60$.

- a) Determine a distância d que maximiza o ganho do agregado.
- b) Calcule o ganho do agregado em dBd.
- c) Esboce o diagrama de radiação no plano H (plano perpendicular aos dipolos).

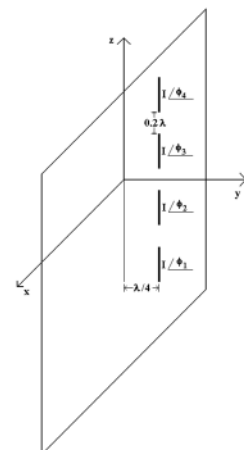
Nota: Se não conseguiu determinar a distância d , use $d=0.5\lambda$.

3. A figura seguinte representa uma antena numa estação base para rádio móvel destinada a funcionar com polarização vertical, à frequência de 950 MHz. Trata-se dum agregado colinear uniforme de 4 dipolos, com um comprimento $l=\lambda/2$ e um diâmetro $d=l/60$, colocado em frente dum plano refletor à distância de $\lambda/4$.

- a) Determine o desfasamento entre as correntes nos dipolos de modo que o feixe principal aponte 10° para baixo do plano horizontal (x-y). (Tilt de -10°).

Nota: Para esta alínea não considere o efeito do plano refletor.

- b) Calcule as fases das correntes nos 4 dipolos, de acordo com o resultado da alínea anterior.
- c) Escreva a expressão do campo elétrico radiado a grande distância em função de r, θ, ϕ .
- d) Esboce o diagrama de radiação no plano E.



4. Projete um agregado longitudinal que obedeça aos seguintes requisitos:

- (1) O máximo segundo a direção $\gamma = 0^\circ$
- (2) Um nulo segundo a direção $\gamma = 135^\circ$.
- (3) Uma L.F.M.P. compreendida entre 60° e 80° .
- (4) A separação entre elementos menor que 0.5λ .
- (5) O número de elementos deve ser o menor possível.

Nota: $\sin(x)/x$ é igual a $1/\sqrt{2}$ para $x=1.391$.

5. Pretende-se projetar uma antena formada por dois dipolos de $\lambda/2$ paralelos, alimentados com correntes iguais, colocados em frente dum plano refletor, à distância de $\lambda/4$. Esta antena destina-se a ser usada para cobrir um setor de 120° . Para cumprir este objetivo, pretende-se que a diretividade nos extremos deste setor seja 6dB abaixo do valor máximo.

- a) Determine a distância entre os dipolos.
b) Calcule o ganho do agregado, considerando os dipolos sem perdas.

6. Considere um agregado uniforme e transversal de 5 elementos.

a) Determine a distância d entre elementos de modo a satisfazer as seguintes condições:

- Não haver repetição do lobo principal.
- A LFMP ser a menor possível.
- Haver um nulo na direção do eixo do agregado.

b) Determine a LFMP.

c) Esboce o diagrama de radiação num plano que contenha o eixo do agregado.

d) Esboce o diagrama de radiação num plano perpendicular ao eixo do agregado.

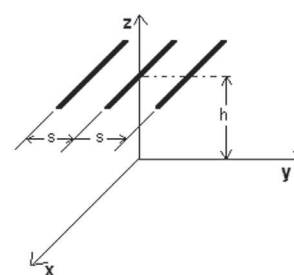
7. Considere o agregado uniforme de 3 dipolos de meia onda representado na figura seguinte.

a) Determine o espaçamento entre dipolos e a diferença de fase entre as respectivas correntes, de modo que haja um máximo na direção ($\theta=60^\circ; \phi=90^\circ$) e um nulo na direção $\theta=0^\circ$.

b) Suponha agora que o plano xy é um condutor perfeito. Determine a menor altura h que conduz a um reforço na direção de máximo.

c) Escreva a expressão do campo radiado a grande distância, nas condições da alínea b), em função de r, θ, ϕ .

d) Esboce o diagrama de radiação no plano $\phi=90^\circ$.



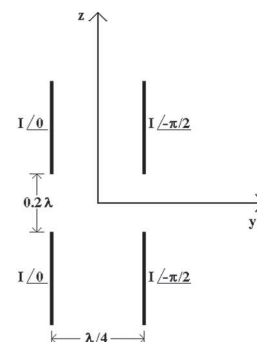
8. A figura seguinte representa uma antena duma estação de radiodifusão.

Os dipolos têm um comprimento $l=\lambda/2$ e um diâmetro $d=l/60$.

a) Escreva a expressão do campo elétrico radiado a grande distância em função de r, θ, ϕ .

b) Esboce o diagrama de radiação no plano E.

c) Calcule o ganho do agregado supondo que a resistência de perdas de cada dipolo é 2Ω .



9. a)- Projete um agregado longitudinal cujo fator de agregado obedeça aos seguintes requisitos:

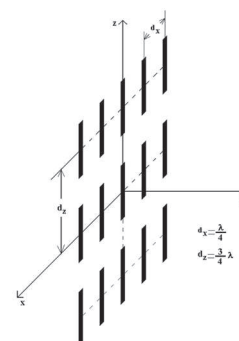
- (1)- Tenha um máximo segundo a direção $\gamma=0^\circ$.
- (2)- Tenha um nulo segundo a direção $\gamma=90^\circ$.
- (3)- Tenha uma L.F.E.N. menor ou igual a 60° .
- (4)- Não tenha máximos repetidos.
- (5)- Tenha o menor número de elementos possível.

b) Esboce o diagrama do fator de agregado num plano que contenha o eixo do agregado.

10. Considere o agregado de dipolos de $\lambda/2$ esboçado na figura seguinte. As correntes dos dipolos são todas iguais em amplitude.

a) Escreva a expressão do campo radiado a grande distância.

b) Determine o desfaseamento entre as correntes dos dipolos para que o máximo ocorra aproximadamente na direção $\theta=70^\circ$ e $\phi=20^\circ$.



c) Desprezando as impedâncias mútuas, e considerando que as correntes dos dipolos estão todas em fase, calcule a diretividade do agregado.

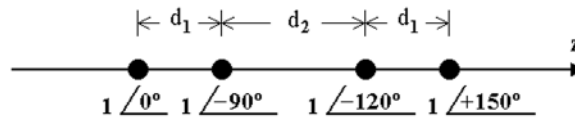
d) Nas condições da alínea c), esboce o diagrama de radiação do agregado no plano $\theta=90^\circ$.

11. Considere um agregado binomial de 3 elementos, alimentados em fase e espaçados de 0.6λ .

a) Determine a L.F.E.N.

b) Suponha agora que os elementos eram todos alimentados com correntes da mesma amplitude, isto é, que o agregado se tornava uniforme. Determine a L.F.E.N. e compare com o valor da alínea a). Que conclusão pode tirar desta comparação?

12. Considere o agregado de 4 fontes isotrópicas representado na figura seguinte.



Escreva a expressão do campo elétrico radiado a grande distância em função de r, θ .

Nota: Considere que o campo radiado por uma fonte isotrópica é dado por: $\mathbf{I} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}$.

13. Para se aumentar a diretividade dum agregado longitudinal podem-se usar as condições de Hansen-Woodyard expressas por: $\beta = \pm (kd + \frac{\pi}{N})$ e $d < \frac{\lambda}{2} (1 - \frac{1}{N})$.

a) Com base nestas expressões, projete um agregado Hansen-Woodyard com 5 elementos.

b) Supondo que os elementos estão colocados ao longo do eixo dos yy e que são dipolos de $\lambda/2$ orientados segundo o eixo dos zz, escreva a expressão do campo radiado a grande distância, em função de r, θ, ϕ .

c) Esboce o diagrama de radiação no plano $\theta=90^\circ$.

14. Considere um agregado de 4 dipolos colocados ao longo do eixo dos yy. Os dipolos têm um comprimento de $\lambda/2$ e estão orientados paralelamente entre si e segundo o eixo dos zz. As distâncias entre o primeiro e o segundo e entre o terceiro e o quarto são $\lambda/4$. A distância entre o segundo e terceiro é $\lambda/5$. As correntes dos dipolos, têm a mesma amplitude mas fases diferentes e, são as seguintes: $I_1=I \angle 0^\circ$; $I_2=I \angle -90^\circ$; $I_3=I \angle -162^\circ$; $I_4=I \angle -252^\circ$.

a) Escreva a expressão do campo radiado a grande distância, em função de r, θ, ϕ .

b) Esboce o diagrama de radiação no plano $\theta=90^\circ$.

Sugestão: Use o método de multiplicação de diagramas.

15. Considere um agregado uniforme de 2 fontes isotrópicas alimentadas em fase, colocadas no eixo dos zz e separadas da distância d.

Deduza a expressão da diretividade do agregado em função de d.

16. Considere um agregado transversal e uniforme de N dipolos de meia onda, colocados paralelamente lado a lado, separados duma distância d, inferior a 0.85λ .

a) Determine N e d de modo que o diagrama de radiação no plano perpendicular aos dipolos, isto é no plano H, tenha um nulo numa direção que faça 45° com o eixo do agregado e uma LFMP entre 10° e 20° .

Nota: $\text{sen}(x)/x$ é igual a $1/\sqrt{2}$ para $x=1.391$.

b) Esboce o diagrama de radiação no plano H.

c) Calcule o ganho do agregado, admitindo que não há perdas.

Nota: Se não fez a alínea a) considere $N=4$ e $d=0.8\lambda$.

17. Considere um agregado uniforme formado por dois dipolos alimentados em fase com comprimentos iguais a 0.5λ , de diâmetro muito fino, sem perdas e colocados paralelamente lado a lado à distância de 0.5λ . O agregado emite em polarização vertical à frequência de 300MHz tendo o seu eixo orientado segundo a direção N-S numa região razoavelmente plana. O efeito do solo não é considerado.

A 50km do agregado e na direção de Este, isto é, na direção de máxima radiação, mediu-se um campo elétrico de 1mV/m (eficazes).

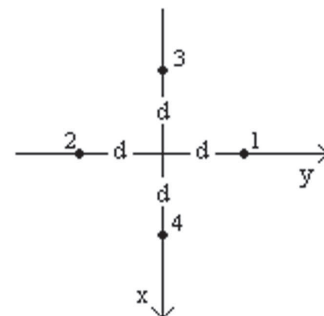
- Qual é o valor do campo elétrico a 75km, na direção NE?
- Qual é a potência que o agregado está a radiar?
- Qual deve ser o ganho duma antena recetora que colocada no ponto referido na alínea a), entregue à carga uma potência de -80dBm?

18. Pretende-se projetar uma antena constituída por um agregado uniforme de 5 dipolos, com comprimento de 0.5λ e com as correntes em fase. A antena deve ter polarização horizontal e um diagrama de radiação mais diretivo no plano H do que no plano E.

- Faça um esboço do agregado, evidenciando a colocação dos dipolos relativamente ao solo.
- Determine o espaçamento entre os dipolos de modo que a largura entre nulos do feixe principal, no plano H, seja aproximadamente 47° .
- Esboce os diagramas de radiação nos planos E e H.

19. Considere o agregado de 4 monopolos representado na figura, na qual os monopolos são vistos de cima e a folha do papel representa o plano de terra que se supõe ser um condutor perfeito. Os monopolos têm 12.5m de altura e um diâmetro equivalente de 40cm. A antena funciona a 6MHz. As correntes dos monopolos têm todas a mesma amplitude, estando as correntes dos monopolos 1 e 2 em fase e as dos monopolos 3 e 4 em fase entre si, mas em oposição de fase com as dos monopolos 1 e 2.

Determine a expressão do campo E a grande distância no plano horizontal, isto é, sobre o plano condutor.



20. Considere um agregado uniforme de 4 dipolos de $\lambda/2$ alimentados em fase, colocados paralelamente lado a lado, separados entre si de $\lambda/4$ e funcionando à frequência de 300MHz.

- Supondo que as impedâncias de entrada dos dipolos são: $Z_1=Z_4=78-j10\Omega$ e $Z_2=Z_3=141-j45\Omega$, calcule a área efetiva da antena.
- Esboce o diagrama de radiação no plano que contem os dipolos.

21. Projete um agregado Dolph-Tschebyscheff transversal com 5 fontes separadas de $\lambda/2$, que dê origem a um FA com lobos secundários que estejam 30dB abaixo do lobo principal.

22. Projete um agregado Dolph-Tschebyscheff com 10 fontes separadas de $\lambda/4$, que dê origem a um FA com lobos secundários que estejam 25dB abaixo do lobo principal e que produza um máximo de radiação na direção $\gamma=70^\circ$.

Capítulo 5

Antenas de condutores cilíndricos

5.1 Introdução

No capítulo 2 estudamos dipolos filiformes assumindo que eles tinham um diâmetro infinitamente fino e uma distribuição de corrente sinusoidal. Contudo, quando o diâmetro já não se pode considerar infinitamente fino, isto é, quando o dipolo é cilíndrico, a distribuição de corrente já não pode ser considerada sinusoidal e tem que ser determinada. Para a determinar é necessário resolver uma equação integral do tipo indicado (5-1),

$$\int \mathbf{I}(z') \mathbf{G}(z, z') dz' = \mathbf{E}(z) \quad (5-1)$$

Nesta equação a corrente $\mathbf{I}(z')$ aparece como incógnita dentro do integral. Antes do advento dos computadores as soluções deste tipo de equações eram obtidas essencialmente por métodos iterativos. A partir do momento que foi possível usar computadores estas soluções começaram a ser obtidas por métodos numéricos fundamentalmente pelo método dos momentos[1].

O método dos momentos (MoM) é um procedimento para obter a solução duma equação integral como a (5-1), pela sua aproximação a um sistema de equações algébricas lineares. Hoje em dia já existe disponível diverso *software*, baseado no MoM para determinar a corrente $\mathbf{I}(z')$ num dipolo cilíndrico. Em geral, baseiam-se em dois códigos desenvolvidos na década de 1980, o *Numerical Electromagnetic Code* (NEC) e o *Mini-Numerical Electromagnetic Code* (MININEC). Embora o nome MININEC possa sugerir que se trata duma versão reduzida do NEC, tal não é verdade pois os códigos baseiam-se em formulações diferentes da equação integral[2].

Estão disponíveis diversos pacotes de *software* baseados no NEC. Sugere-se o pacote gratuito 4NEC2 para ambiente da Microsoft Windows que inclui uma ferramenta de otimização e que pode ser obtido através do link¹.

5.2 Equações integrais

Duas das equações integrais mais usadas para determinar a distribuição de corrente num dipolo cilíndrico são a equação de Hallén, deduzida por Erik Hallén em 1938 e a equação de Pocklington, derivada por H. C. Pocklington em 1897. A equação de Hallén é limitada ao uso duma excitação do tipo *delta-gap voltage source*, isto é, à aplicação duma tensão localizada no dipolo, tal como se indica na Figura 5.1.

¹ <http://www.qsl.net/4nec2/>

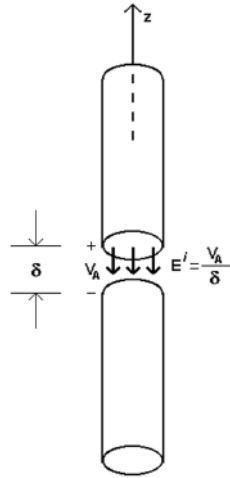


Figura 5.1 Modelo da alimentação tipo *delta-gap voltage source*. A aplicação da tensão V_A impõe um campo $E' = V_A / \delta$.

A equação de Pocklington é mais geral, podendo ser usada com outras excitações. Além disso a equação de Hallén implica um sistema de $N+1$ equações em que N é o número de segmentos em que o dipolo é dividido, ao passo que a equação de Pocklington implica apenas um sistema de N equações.

5.2.1 A equação de Hallén

Consideremos o dipolo cilíndrico representado na Figura 5.2 com raio a e comprimento l e alimentado com uma fonte de tensão V_A do tipo *delta-gap voltage source*.

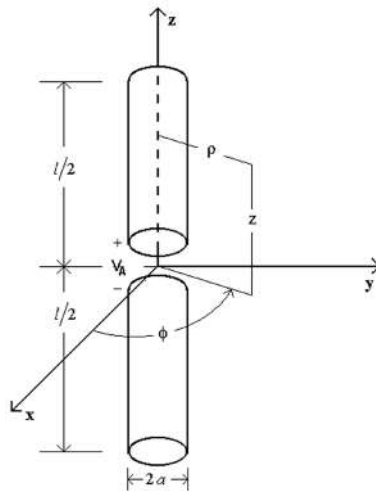


Figura 5.2 Geometria dum dipolo cilíndrico.

Assumindo que $l \gg a$ e que a é pequeno comparado com o comprimento de onda, os efeitos das faces do cilindro podem ser desprezados. Considerando também que o fio é perfeitamente condutor ($\sigma = \infty$), as condições

fronteira impõem que as componentes tangenciais do campo $\vec{E}$ sejam nulas na superfície do cilindro e que a corrente seja nula nos extremos do cilindro.

Como a densidade de corrente está orientada segundo z , então $\vec{J} = \hat{z} J_z$. O campo $\vec{E}$ produzido por esta densidade de corrente é dado pela equação (5-2):

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) \quad (5-2)$$

Como $\vec{A}$ só tem componente segundo z , isso implica que $\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \hat{z}$ e, portanto, o campo $\vec{E}$ também só tem componente segundo z dada pela relação (5-3):

$$E_z = -j\omega A_z - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \quad (5-3)$$

Como na superfície do cilindro E_z é nula, a equação (5-3) pode-se escrever da forma indicada em (5-4):

$$\omega A_z + \frac{1}{\omega\mu\epsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0 \text{ ou } A_z + \frac{1}{\omega^2\mu\epsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0 \equiv \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \beta^2 A_z = 0 \quad (5-4)$$

Dada a simetria do problema $J_z(z') = J_z(-z')$, o que implica por sua vez que $A_z(z') = A_z(-z')$. A solução de (5-4) é então da forma indicada em (5-5):

$$A_z(z) = -j\sqrt{\mu\epsilon} [C_1 \cos(\beta z) + C_2 \text{sen}(\beta|z|)] \quad (5-5)$$

Por outro lado, vimos no capítulo 2 que o vetor potencial A_z pode ser descrito em função da densidade de corrente da forma indicada em (5-6):

$$A_z(z) = \mu \iiint_{V'} J_z(\rho', \phi', z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dv' \quad (5-6)$$

No entanto, como o cilindro é feito de material perfeitamente condutor, a corrente flui apenas na superfície exterior. Isto significa que a densidade de corrente passa a ser uma densidade superficial $K(\phi, z')$ [A/m], tal como se indica na Figura 5.3.

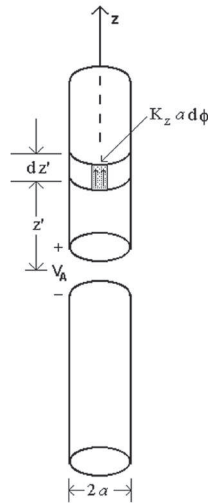


Figura 5.3 Densidade superficial de corrente na superfície dum dipolo cilíndrico.

Isso implica que o integral de volume se reduz a um integral de superfície, pelo que (5-6) toma a forma indicada em (5-7):

$$\mathbf{A}_z(z) = \mu \iint_S \mathbf{K}_z(\phi', z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dS' = \mu \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{K}_z(\phi', z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} a d\phi' dz' \quad (5-7)$$

Considerando que a densidade de corrente superficial está uniformemente distribuída, ela não depende de ϕ' , pelo que a equação (5-7) se reduz à (5-8):

$$\mathbf{A}_z(z) = \mu \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{K}_z(z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} a d\phi' dz' = \mu \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2\pi a \mathbf{K}_z(z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz' \quad (5-8)$$

A equação (5-8) significa que, se a densidade de corrente superficial $\mathbf{K}(\phi', z')$ estiver uniformemente distribuída, ela pode ser reduzida a uma corrente filamental $\mathbf{I}_z(z') = 2\pi a \mathbf{K}_z(z')$, tal como se representa na Figura 5.4.

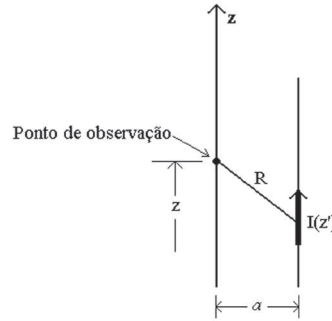


Figura 5.4 Modelo equivalente usando uma corrente filamental $\mathbf{I}(z') = 2\pi a \mathbf{K}(z')$.

Neste modelo toda a corrente que percorria o cilindro foi substituída por uma corrente que flui ao longo dum fio infinitamente fino, paralelo ao eixo dos zz e situado em espaço livre à distância a desse eixo. O cilindro condutor deixou de estar presente.

Igualando (5-5) a (5-8) obtém-se a equação (5-9) conhecida por equação integral de Hallén, válida para um fio cilíndrico e perfeitamente condutor.

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz' = -j \frac{1}{\eta} [C_1 \cos(\beta z) + C_2 \sin(\beta |z|)] \quad (5-9)$$

Pode-se mostrar[3] que a constante C_2 é igual a $V_A/2$. A constante C_1 é determinada pela condição que impõe que a corrente seja nula nos extremos do fio.

5.2.2 A equação de Pocklington

Já vimos que a componente A_z do vetor potencial magnético $\vec{\mathbf{A}}$ e a componente E_z do campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}$ estão relacionadas pela equação (5-3). Por outro lado, também vimos que A_z pode ser dado pela equação (5-10) que deriva da equação (5-8).

$$\mathbf{A}_z(z) = \mu \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}_z(z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz' \quad (5-10)$$

Substituindo (5-10) em (5-3) obtém-se a equação (5-11):

$$\mathbf{E}_z = -j\omega\mu \left(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}_z(z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz' \right) - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\mu \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}_z(z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz' \right) \quad (5-11)$$

que se pode escrever como em (5-12):

$$\mathbf{E}_z = - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j\omega\mu \mathbf{I}_z(z') \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz' - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j \frac{1}{\omega\epsilon} \mathbf{I}_z(z') \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \right) dz' \quad (5-12)$$

Associando os integrais e pondo em evidência o termo $-j \frac{1}{\omega\epsilon}$, a equação (5-12) pode escrever-se na forma indicada em (5-13):

$$\mathbf{E}_z = - \frac{j}{\omega\epsilon} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}_z(z') \left[\omega^2 \mu\epsilon \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \right) \right] dz' \quad (5-13)$$

Na equação anterior o campo $\mathbf{E}_z$ deve ser na realidade designado por $\mathbf{E}_z^r$, por ser o campo radiado no espaço livre por $\mathbf{I}(z')$. A corrente $\mathbf{I}(z')$ por sua vez aparece porque existe um campo $\mathbf{E}_z^i$, imposto ou pela tensão aplicada aos terminais do dipolo ou por uma onda incidente. À superfície do cilindro condutor e no seu interior, a soma das componentes tangenciais dos dois campos tem que ser nula pelo que $\mathbf{E}_z^i = -\mathbf{E}_z^r$. Sendo assim, pode-se escrever a equação (5-14):

$$- \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}_z(z') \left[\omega^2 \mu\epsilon \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \right) \right] dz' = \mathbf{E}_z^i(z) \quad (5-14)$$

Esta é a equação que foi deduzida por H. C. Pocklington sendo por isso conhecida por equação integral de Pocklington. Esta equação é da forma da equação geral (5-1).

Esta equação pode-se ainda escrever duma forma mais compacta como em (5-15):

$$- \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}_z(z') G(z, z') dz' = \mathbf{E}_z^i(z) \quad \text{com:} \quad (5-15)$$

$$\mathbf{G}(z, z') = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \right) + \beta^2 \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \right] \quad \text{e} \quad R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$$

5.3 Solução da equação integral. Introdução ao Método dos Momentos.

Na equação (5-15) o que é desconhecido e se pretende determinar é a corrente $I(z')$ que aparece como incógnita dentro do integral. Nesta secção vai-se obter uma solução desta equação por um método numérico que é um caso particular do método dos momentos.

Começemos por aproximar a corrente $I(z')$ desconhecida por uma expansão em funções de base g_n , conhecidas, como se indica em (5-16):

$$I_z(z') = \sum_{n=1}^N I_n g_n(z') \quad (5-16)$$

Nesta expansão, I_n são coeficientes complexos a determinar. Obtidos estes coeficientes, determina-se imediatamente a corrente $I(z')$ através da relação (5-16). Para simplificar, vamos assumir que as funções de base g_n são impulsos ortogonais definidos pela condição (5-17):

$$g_n(z') = \begin{cases} 1 & \text{para } z' \text{ dentro de } \Delta z'_n \\ 0 & \text{fora de } \Delta z'_n \end{cases} \quad (5-17)$$

Escolher este tipo de funções base significa dividir o filamento, onde flui a corrente $I(z')$, em N segmentos de comprimento $\Delta z'$, cada um com uma corrente constante e desconhecida I_n . $I(z')$ é, portanto, aproximada por uma função em escada, tal como de ilustra na Figura 5.5.

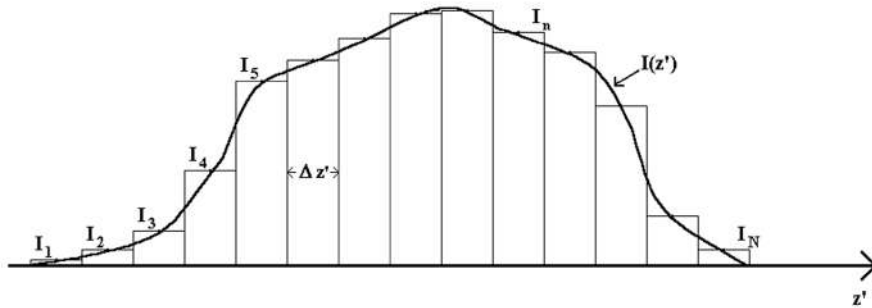


Figura 5.5 Aproximação da corrente $I(z')$ por uma distribuição em forma de escada, usando funções de base do tipo impulso.

Substituindo (5-16) em (5-15) obtém-se (5-18):

$$-\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sum_{n=1}^N I_n g_n(z') G(z, z') dz' \approx E_z^i(z) \quad (5-18)$$

Tendo em conta (5-17), (5-18) pode-se escrever da forma indicada em (5-19):

$$-\sum_{n=1}^N I_n \int_{\Delta z'_n} G(z, z') dz' \approx E_z^i(z) \quad (5-19)$$

Nas equações anteriores, a coordenada z' está associada aos elementos de corrente. O subíndice n designa elementos de corrente, pelo que, z'_n é a coordenada do elemento de corrente n . A coordenada z está associada aos

pontos de observação. Escolhendo o subíndice m para designar pontos de observação, então z_m será a coordenada do ponto de observação m .

De acordo com esta notação, para o ponto de observação m , a equação (5-19) toma a forma indicada em (5-20):

$$-\sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n \int_{\Delta z_n} \mathbf{G}(z_m, z') dz' \approx \mathbf{E}_z^i(z_m) \quad (5-20)$$

Para simplificar façamos a seguinte equivalência:

$$\mathbf{F}_{mn} = - \int_{\Delta z_n} \mathbf{G}(z_m, z') dz' \quad (5-21)$$

Tendo em conta (5-21), a equação (5-15) pode-se escrever, para o ponto de observação m , aproximadamente como (5-22):

$$-\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}_z(z') \mathbf{G}(z_m, z') dz' \approx \mathbf{I}_1 \mathbf{F}_{m1} + \mathbf{I}_2 \mathbf{F}_{m2} + \dots + \mathbf{I}_n \mathbf{F}_{mn} + \dots + \mathbf{I}_N \mathbf{F}_{mN} \approx \mathbf{E}_z^i(z_m) \quad (5-22)$$

A equação (5-22) significa que, no ponto de observação m , a soma dos campos radiados por todos os N segmentos de corrente é igualada ao campo $\mathbf{E}_z^i(z_m)$, imposto nesse ponto ou pela tensão aplicada aos terminais do dipolo ou por uma onda incidente sobre ele.

Esta única equação por si só não chega para determinar as N incógnitas $\mathbf{I}_n$. São precisas N equações. Isto consegue-se, forçando a igualdade expressa por (5-22) em N pontos de observação diferentes. Como ao fazer isto se está a impor a igualdade entre os campos apenas pontualmente, isto é, apenas se está a satisfazer a condição fronteira em pontos estrategicamente colocados, este método é designado por método da colocação ou de adaptação pontual, na literatura anglo-saxónica conhecido por *point-matching*.

Por simplicidade, normalmente os pontos de observação são escolhidos de modo a coincidirem com o centro dos N segmentos em que o fio foi dividido, como se ilustra na Figura 5.6.

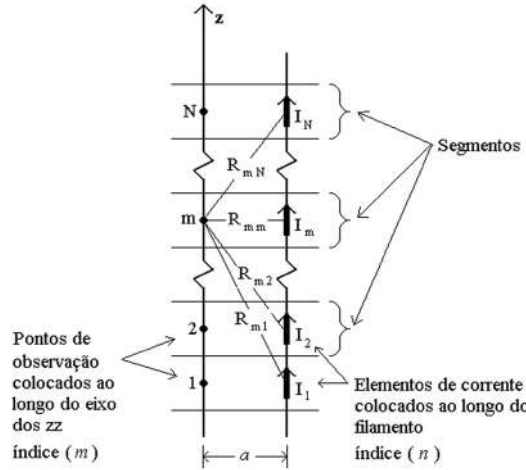


Figura 5.6 Segmentação do dipolo cilíndrico e localização relativa dos pontos de observação e dos elementos de corrente.

Aplicando então este método, obtém-se um sistema de N equações e N incógnitas, da forma indicada em (5-23):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_1 \mathbf{F}_{11} + \mathbf{I}_2 \mathbf{F}_{12} + \dots + \mathbf{I}_n \mathbf{F}_{1n} + \dots + \mathbf{I}_N \mathbf{F}_{1N} = \mathbf{E}_z^i(z_1) \\ \mathbf{I}_1 \mathbf{F}_{21} + \mathbf{I}_2 \mathbf{F}_{22} + \dots + \mathbf{I}_n \mathbf{F}_{2n} + \dots + \mathbf{I}_N \mathbf{F}_{2N} = \mathbf{E}_z^i(z_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathbf{I}_1 \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{I}_2 \mathbf{F}_{N2} + \dots + \mathbf{I}_n \mathbf{F}_{Nn} + \dots + \mathbf{I}_N \mathbf{F}_{NN} = \mathbf{E}_z^i(z_N) \end{array} \right. \quad (5-23)$$

Esta equação pode ser escrita na forma matricial como:

$$[\mathbf{F}_{mn}] [\mathbf{I}_n] = [\mathbf{E}_m] \quad \text{em que:} \quad (5-24)$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_z^i(z_m) \quad \text{e}$$

$$\mathbf{F}_{mn} = - \int_{\Delta z_n} \mathbf{G}(z_m, z') dz' = - \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon} \int_{\Delta z_n} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-j\beta R_{mn}}}{R_{mn}} \right) + \beta^2 \frac{e^{-j\beta R_{mn}}}{R_{mn}} \right] dz' \quad \text{com}$$

$$R_{mn} = \sqrt{(z_m - z'_n)^2 + a^2}$$

A partir de (5-24) pode-se escrever:

$$[\mathbf{I}_n] = [\mathbf{F}_m]^{-1} [\mathbf{E}_m] \quad (5-25)$$

Embora os coeficientes $\mathbf{I}_n$ possam ser determinados por (5-25), normalmente eles são obtidos resolvendo diretamente o sistema de equações (5-23) por algoritmos usuais.

Pelo que se estabeleceu anteriormente, parece ser evidente que a solução será tanto mais exata quanto maior for o número N de segmentos em que se divide o fio. A prática, contudo, aconselha a não se usar um número demasiado grande pois isso acarreta acumulação de erros de cálculo numérico que acabam por produzir uma solução pouco correta. Para além disso, usar muitos segmentos traduz-se num tempo de computação muito elevado. Uma boa solução de compromisso entre precisão e tempo de cálculo é usar cerca de 20 segmentos por comprimento de onda.

Exemplo 5.1

Consideremos um dipolo com um comprimento de 0.05λ e um raio de 0.00012λ . Trata-se dum dipolo curto ($l=\lambda/20$) e fino ($l/d=208$). Pretende-se com este exemplo determinar a distribuição de corrente e a impedância de entrada aplicando o método descrito na secção anterior, isto é, o MoM usando o processo de colocação que está resumido na equação (5-24), com $N=5$.

Para a obtenção da corrente é necessário resolver um sistema de equações semelhante ao (5-23) pelo que é preciso começar por determinar os coeficientes $\mathbf{F}_{mn}$, dados por (5-24). Nesta expressão aparece um integral cuja função integranda é a indicada em (5-26) onde, por simplicidade, se omitiram os subíndices m e n .

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \beta^2 \Psi \right] \quad \text{com} \quad \Psi = \frac{e^{-j\beta R}}{R} \quad \text{e} \quad R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2} \quad (5-26)$$

Para determinar os coeficientes $\mathbf{F}_{mn}$, é conveniente obter, para (5-26), uma expressão em função de R , a e β . Para isso notemos que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \quad (5-27)$$

mas:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial R} = -\frac{e^{-j\beta R} (j\beta R + 1)}{R^2} \quad (5-28)$$

e

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z - z'}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \quad (5-29)$$

Substituindo (5-28) e (5-29) em (5-27), obtém-se:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{e^{-j\beta R} (j\beta R + 1) \sqrt{R^2 - a^2}}{R^3} \quad (5-30)$$

Dum modo semelhante podemos escrever:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \frac{\partial R}{\partial z} \quad (5-31)$$

Atendendo a que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial R} \left[-\frac{e^{-j\beta R} (j\beta R + 1) \sqrt{R^2 - a^2}}{R^3} \right] = \\ &= -\frac{e^{-j\beta R} \left[a^2 (-\beta^2 R^2 + j3\beta R + 3) - R^2 (-\beta^2 R^2 + j2\beta R + 2) \right]}{R^4 \sqrt{R^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (5-32)$$

então substituindo (5-29) e (5-32) em (5-31), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{e^{-j\beta R} \left[a^2 (-\beta^2 R^2 + j3\beta R + 3) - R^2 (-\beta^2 R^2 + j2\beta R + 2) \right]}{R^5} \quad (5-33)$$

Finalmente, substituindo (5-33) em (5-26) podemos obter, após algumas simplificações:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \beta^2 \Psi = \frac{e^{-j\beta R}}{R^5} \left[(2R^2 - 3a^2)(1 + j\beta R) + a^2 \beta^2 R^2 \right] \quad (5-34)$$

Usando esta expressão em (5-24), pode-se determinar os coeficientes F_{mn} . Atendendo à geometria do problema ilustrada na Figura 5.6, é fácil verificar que muitos destes coeficientes são iguais entre si, repetindo-se numa forma sistemática. Neste caso, basta determinar por exemplo, os elementos da primeira linha da matriz obtendo-se todos os outros a partir deles. Uma matriz como esta é designada por matriz *toeplitz*.

Tendo em conta este facto obtiveram-se os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} F_{11} &= F_{22} = F_{33} = F_{44} = F_{55} = 7.876 - j405029.3 \\ F_{12} &= F_{21} = F_{23} = F_{32} = F_{34} = F_{43} = F_{45} = F_{54} = 7.882 + j169569.8 \\ F_{13} &= F_{31} = F_{24} = F_{42} = F_{35} = F_{53} = 7.872 + j13656.4 \\ F_{14} &= F_{41} = F_{25} = F_{52} = 7.857 + j3799.17 \\ F_{15} &= 7.835 + j1584.21 \end{aligned}$$

Alimentando o dipolo com uma fonte de tensão do tipo *delta-gap voltage source*, com $V_A=1V$ teremos

$$E_3 = \frac{V_A}{\Delta z} = \frac{1}{0.01} = 100, \text{ ficando o vetor } [E_m] \text{ a ser dado por:}$$

$$[E_m] = \begin{bmatrix} 0 \angle 0^\circ \\ 0 \angle 0^\circ \\ 100 \angle 0^\circ \\ 0 \angle 0^\circ \\ 0 \angle 0^\circ \end{bmatrix} \quad (5-35)$$

Resolvendo o sistema de equações (5-23) usando todos estes valores, obtém-se para a corrente o vetor:

$$[I_n] = \begin{bmatrix} 0.1295E-03 \angle 89.966^\circ \\ 0.2638E-03 \angle 89.975^\circ \\ 0.4766E-03 \angle 89.985^\circ \\ 0.2638E-03 \angle 89.975^\circ \\ 0.1295E-03 \angle 89.966^\circ \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

Com estes valores pode-se fazer o gráfico da distribuição da corrente ao longo do dipolo. Este gráfico está representado na Figura 5.7 onde também se mostra, para comparação, o gráfico correspondente à distribuição ideal de corrente que se estudou no capítulo 2.

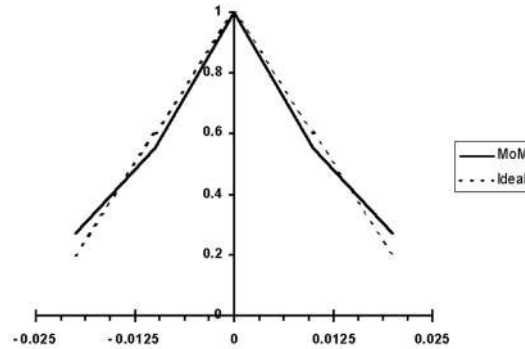


Figura 5.7 Distribuição da corrente ao longo do dipolo, obtida pelo MoM e comparação com a distribuição ideal de corrente.

Vê-se por esta figura que a distribuição da corrente calculada pelo MoM, segue de muito perto a distribuição triangular válida para um dipolo curto e muito fino.

Conhecendo a corrente no centro do dipolo, isto é, à entrada, pode-se calcular a impedância de entrada que é dada por:

$$Z_{in} = \frac{V_n}{I_n} = \frac{V_A}{I_3} = \frac{1}{0.4766 \times 10^{-3} \angle 89.985^\circ} = 0.5 - j2098.19 \text{ } (\Omega) \quad (5-37)$$

Deste resultado conclui-se que um dipolo curto tem uma impedância de entrada com uma parte reativa muito maior do que a parte real e de natureza capacitiva. Veremos mais á frente que todos os dipolos com comprimento inferior a aproximadamente $\lambda/2$ têm uma natureza capacitiva, até atingir a 1ª ressonância passando depois a ser de natureza indutiva até atingir a 2ª ressonância e assim sucessivamente.

No capítulo 2, quando se estudou o dipolo curto, deduziu-se uma expressão para a resistência de radiação

dum dipolo curto e muito fino. Como neste caso o máximo da corrente ocorre à entrada, a resistência de radiação coincide com a resistência de entrada. Calculando esta resistência por essa expressão obtém-se:

$$R_n = 20 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 20 \pi^2 0.05^2 = 0.49 \quad (\Omega) \quad (5-38)$$

Este valor está bastante próximo do calculado pelo MoM, apesar da simplicidade do algoritmo.

5.4 Solução da equação integral pela aplicação mais geral do Método dos Momentos.

Na dedução da equação integral impôs-se a condição fronteira de, à superfície do cilindro condutor e no seu interior, a soma das componentes tangenciais dos campos radiado $\mathbf{E}_z^r$ e imposto $\mathbf{E}_z^i$, ter que ser nula, isto é, $\mathbf{E}_z^i + \mathbf{E}_z^r = 0$. Se esta condição não se verificar ocorre um erro dado por (5-39):

$$ER = E_z^i + E_z^r \quad (5-39)$$

Na secção anterior, ao usar-se o método da colocação, satisfaz-se a condição $ER=0$ nos pontos seleccionados, contudo noutros pontos esta condição pode não ser satisfeita. No método da colocação, usando um número suficiente de pontos, espera-se que fora deles a condição não seja demasiado violada e que, portanto, a solução obtida seja aceitável.

Um método de melhorar o estabelecimento das condições fronteira é o de forçar o resíduo a ser nulo em termos médios, isto é, de modo que a média global de ER em todo o domínio se aproxime de zero. Para isso usam-se funções de teste ou pesadas w_m e impõe-se a condição (5-40):

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} w_m(z) ER(z) dz = 0 \quad m=1,2,3,\dots,N \quad (5-40)$$

Considerando que a corrente $I(z')$ foi aproximada por impulsos retangulares, obtém-se para $\mathbf{E}_z^r$ a expressão (5-41):

$$\mathbf{E}_z^r(z) \approx \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n \int_{\Delta z_n} \mathbf{G}(z, z') dz' \quad (5-41)$$

Substituindo (5-39) em (5-40), tendo em conta (5-41), obtém-se (5-42):

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} w_m(z) \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n \int_{\Delta z_n} \mathbf{G}(z, z') dz' + \mathbf{E}_z^i(z) \right] dz = 0 \quad m=1,2,3,\dots,N \quad (5-42)$$

que se pode ainda escrever como (5-43):

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} w_m(z) \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n \int_{\Delta z'_n} \mathbf{G}(z, z') dz' \right) dz + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} w_m(z) \mathbf{E}_z^i(z) dz = 0 \quad m=1,2,3,\dots,N \quad (5-43)$$

Se escolhermos como funções pesadas impulsos de Dirac, isto é, $w_m(z) = \delta(z - z_m)$ a equação (5-43) reduz-se à equação (5-22).

Se escolhermos como funções pesadas impulsos ortogonais definidos como em (5-44):

$$w_m(z) = \begin{cases} 1 & \text{para } z \text{ dentro de } \Delta z_m \\ 0 & \text{fora de } \Delta z_m \end{cases} \quad (5-44)$$

então (5-43) toma a forma de (5-45):

$$\int_{\Delta z_m} \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n \int_{\Delta z'_n} \mathbf{G}(z, z') dz' dz + \int_{\Delta z_m} \mathbf{E}_z^i(z) dz = 0 \quad m=1,2,3,\dots,N \quad (5-45)$$

que se pode ainda escrever como (5-46):

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n \left[- \int_{\Delta z_m} \int_{\Delta z'_n} \mathbf{G}(z, z') dz' dz \right] = \int_{\Delta z_m} \mathbf{E}_z^i(z) dz \quad m=1,2,3,\dots,N \quad (5-46)$$

Esta equação pode ser escrita na forma matricial como:

$$[\mathbf{F}_{mn}] [\mathbf{I}_n] = [\mathbf{E}_m]$$

em que:

$$\mathbf{E}_m = \int_{\Delta z_m} \mathbf{E}_z^i(z) dz \quad (5-47)$$

e

$$\mathbf{F}_{mn} = - \int_{\Delta z_m} \int_{\Delta z'_n} \mathbf{G}(z, z') dz' dz$$

A utilização de (5-47) para a obtenção da distribuição de corrente, não garante necessariamente que a condição da soma das componentes tangenciais dos campos radiado $\mathbf{E}_z^r$ e imposto $\mathbf{E}_z^i$, seja nula em toda a superfície do cilindro condutor. No entanto, assegura que a média da soma ao longo do cilindro tende para zero, sendo de prever que a solução assim obtida será mais exata do que a obtida usando como funções pesadas impulsos de Dirac.

Ao longo dos desenvolvimentos feitos nesta secção e na anterior, é mais ou menos evidente que a escolha das funções de base e das funções pesadas é um aspeto muito importante na obtenção duma solução satisfatória usando a menor carga computacional possível.

Para expandir a corrente, há em princípio uma infinidade de conjuntos de funções de base que podem ser usadas. No entanto, o desejável é escolher funções de base que se assemelhem à forma geral da corrente no fio se, de algum modo, se tiver algum conhecimento prévio dessa forma.

Na escolha das funções de teste o importante é minimizar o cálculo dos coeficientes $\mathbf{F}_{mn}$. Em princípio as funções de base usadas na expansão da corrente são diferentes das funções de teste. No entanto é muito comum usar as mesmas funções de base para ambas as coisas, isto é, $g_n = w_m$. Esta técnica é conhecida por método de Galerkin.

Na prática apenas algumas funções de base são usadas. Estas funções podem ser agrupadas em duas classes: as funções de subdomínio, que são não nulas apenas numa parte de todo o domínio z' da função desconhecida e; as funções de domínio inteiro, que são não nulas em todo o domínio z' .

5.4.1 Funções de subdomínio

Estas são as funções mais usadas quer como funções de base quer como funções de teste. Na secção anterior já se usaram duas funções deste tipo: o impulso de Dirac e o impulso retangular. Outras possíveis são as seguintes

5.4.1.1 Impulso triangular

Estas funções são definidas por (5-48).

$$h_m(z) = \begin{cases} \frac{z' - z'_{n-1}}{\Delta z'_n} & \text{para } \Delta z'_{n-1} \leq z' \leq \Delta z'_n \\ \frac{z'_{n+1} - z'}{\Delta z'_n} & \text{para } \Delta z'_n \leq z' \leq \Delta z'_{n+1} \\ 0 & \text{para outros valores de } z' \end{cases} \quad (5-48)$$

Na Figura 5.8 está ilustrada esta função e um exemplo duma expansão duma corrente usando estas funções.

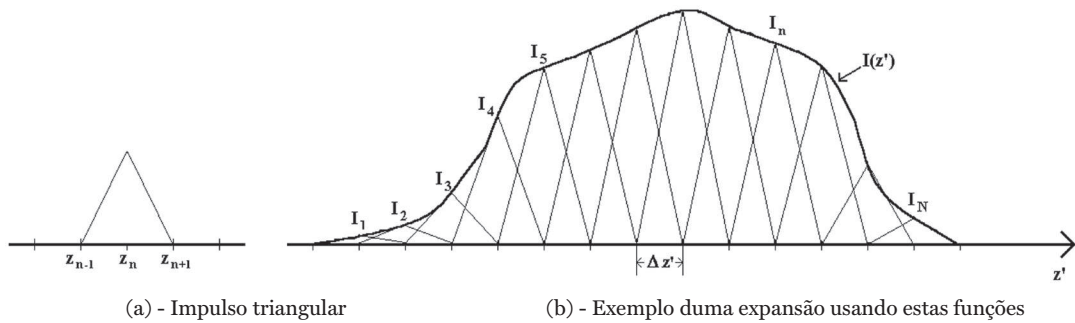


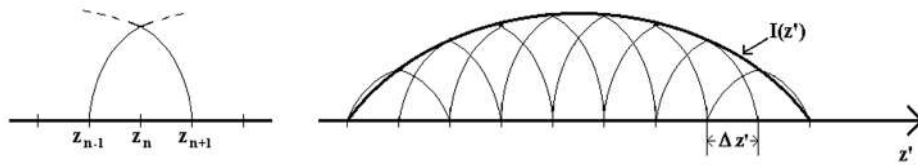
Figura 5.8 Função de base impulso triangular e exemplo duma expansão usando estas funções.

5.4.1.2 Impulso sinusoidal

Estas funções são definidas por (5-49).

$$h_m(z) = \begin{cases} \frac{\sin[\beta(z' - z'_{n-1})]}{\sin(\beta\Delta z'_n)} & \text{para } \Delta z'_{n-1} \leq z' \leq \Delta z'_n \\ \frac{\sin[\beta(z'_{n+1} - z')]}{\sin(\beta\Delta z'_n)} & \text{para } \Delta z'_n \leq z' \leq \Delta z'_{n+1} \\ 0 & \text{para outros valores de } z' \end{cases} \quad (5-49)$$

Na Figura 5.9 está ilustrada esta função e um exemplo duma expansão duma corrente usando estas funções.



(a) - Impulso sinusoidal

(b) - Exemplo duma expansão usando estas funções

Figura 5.9 Função de base impulso sinusoidal e exemplo duma expansão usando estas funções.

5.4.2 Funções de domínio inteiro

Estas funções são definidas por (5-50).

$$h_m(z) = \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z'}{l}\right] \quad \text{para} \quad -\frac{l}{2} \leq z' \leq \frac{l}{2} \quad (5-50)$$

Estas funções só são vantajosas quando se tem um conhecimento prévio do andamento da corrente, pois neste caso consegue-se obter uma boa representação com poucos termos.

O programa MININEC atrás referido usa funções triangulares e o método de Galerkin. O programa NEC usa como funções de base funções sinusoidais com interpolação e como funções de teste funções delta.

5.5 Distribuição de corrente num dipolo cilíndrico

Por aplicação do método dos momentos é possível determinar a distribuição da corrente ao longo dum dipolo cilíndrico. Tal já foi feito no Exemplo 5.1 para o caso dum dipolo com um comprimento de 0.05λ e um raio de 0.00012λ estando a distribuição de corrente obtida pelo MoM representada na Figura 5.7.

Consideremos mais dois casos particulares para exemplificar a determinação da distribuição da corrente pelo MoM. Na Figura 5.10 está representada a distribuição da corrente normalizada para um dipolo com $\lambda/2$ de comprimento e 0.004λ de raio. Na mesma figura está representada a distribuição sinusoidal que foi a que se considerou quando se estudou no capítulo 2 o dipolo fino. Embora duma forma geral a distribuição de corrente

obtida com o MoM se assemelhe à distribuição sinusoidal, há algumas diferenças sendo uma delas no centro do dipolo que tem efeitos no cálculo da impedância de entrada. Este efeito é muito mais significativo no caso seguinte.

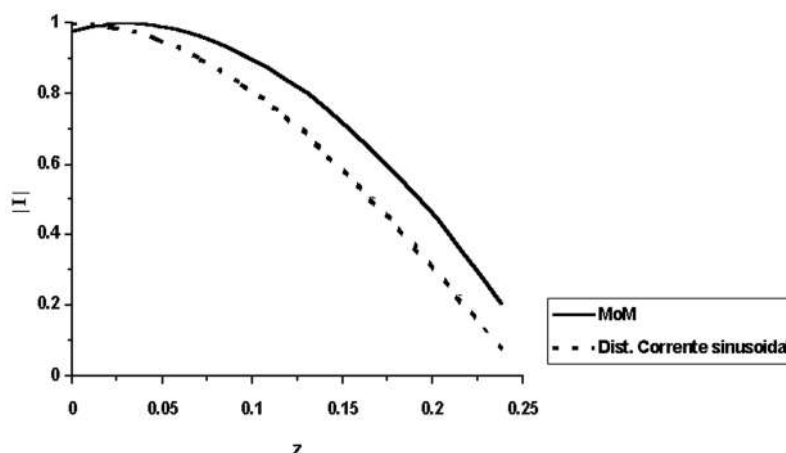


Figura 5.10 Distribuição da corrente ao longo dum dipolo de $\lambda/2$, obtida pelo MoM e comparação com a distribuição sinusoidal de corrente.

Na Figura 5.11 está representada a distribuição da corrente normalizada para um dipolo com 1λ de comprimento e 0.008λ de raio. Na mesma figura está representada a distribuição sinusoidal que foi a que se considerou quando se estudou no capítulo 2 o dipolo fino.

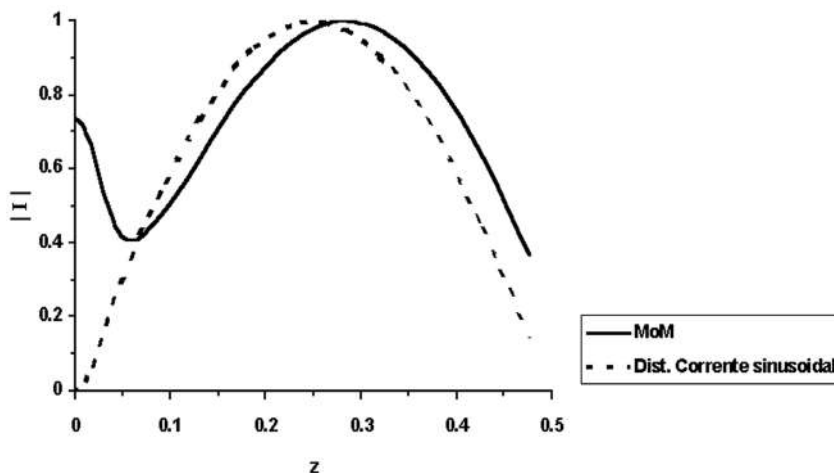


Figura 5.11 Distribuição da corrente ao longo dum dipolo de 1λ , obtida pelo MoM e comparação com a distribuição sinusoidal de corrente.

Neste caso a diferença mais significativa entre as duas distribuições ocorre no centro do dipolo o que tem efeitos decisivos no cálculo da impedância de entrada. De facto, a distribuição sinusoidal de corrente tem um nulo no centro do dipolo, isto é, à entrada o que corresponde a uma impedância de entrada infinita. Claro que tal não acontece na prática, embora a impedância dum dipolo com 1λ de comprimento seja elevada como veremos na secção seguinte. A distribuição da corrente obtida pelo MoM é, portanto mais realista.

5.6 Impedância de entrada dum dipolo cilíndrico

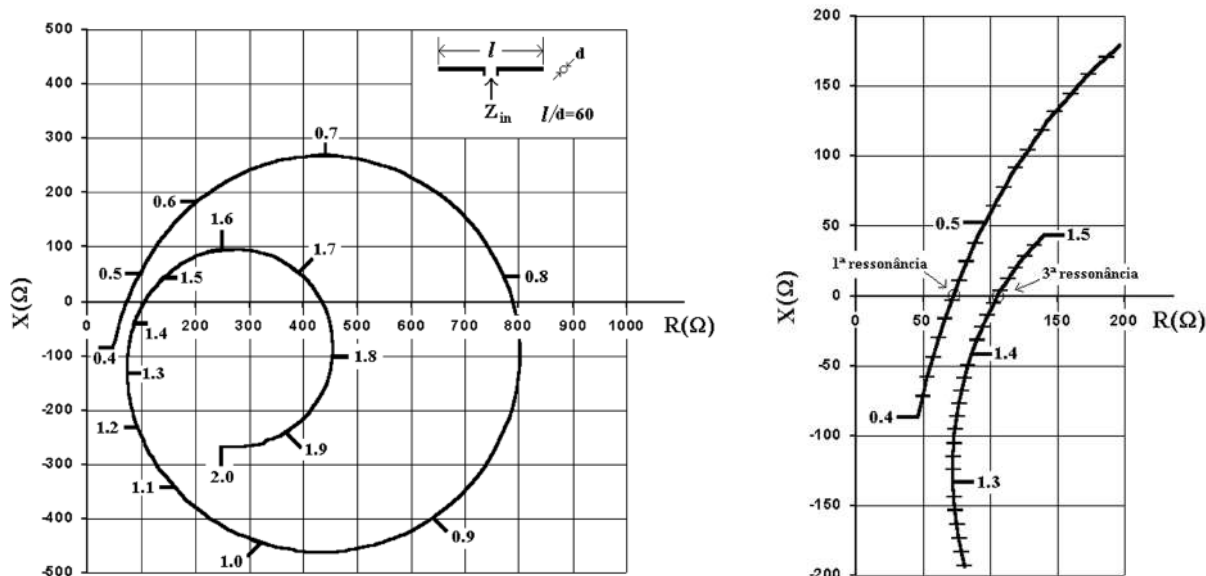
A impedância de entrada dum dipolo cilíndrico pode ser obtida a partir da distribuição de corrente calculada pelo MoM, através da relação:

$$Z_{in} = \frac{V_n}{I_n} \quad (5-51)$$

em que V_{in} é a tensão aplicada ao dipolo e I_{in} é a corrente no segmento onde a tensão foi aplicada.

Na Figura 5.12 está representada a variação com a frequência, da impedância de entrada dum dipolo grosso. O dipolo tem 0.5m de comprimento e um diâmetro de 8.333mm, o que corresponde a uma razão $l/d=60$. A impedância de entrada foi calculada para frequências entre 240MHz e 1200MHz, para as quais o comprimento elétrico do dipolo varia entre 0.4λ e 2λ , tal como se representa na figura. A impedância de entrada foi calculada recorrendo ao código NEC.

Como se pode ver pela Figura 5.12 o dipolo apresenta diversas ressonâncias à medida que a frequência aumenta, isto é, à medida que o dipolo se torna eletricamente maior. Na faixa de variação deste gráfico, a primeira ressonância ocorre para $l \approx 0.46\lambda$, a segunda ressonância para $l \approx 0.81\lambda$, a terceira ressonância para $l \approx 1.45\lambda$ e a quarta ressonância ocorre para $l \approx 1.74\lambda$.



(a) - $0 \leq R \leq 1000; -500 \leq X \leq 500$

(b) - $0 \leq R \leq 200; -200 \leq X \leq 200$

Figura 5.12 Representação da variação impedância de entrada dum dipolo com $l/d=60$, na forma dum diagrama R;X, em função do comprimento elétrico do dipolo.

Na Tabela 5-1 estão indicados os valores de R e X na vizinhança das 1ª e 3ª ressonâncias correspondentes ao gráfico da Figura 5.12 (b).

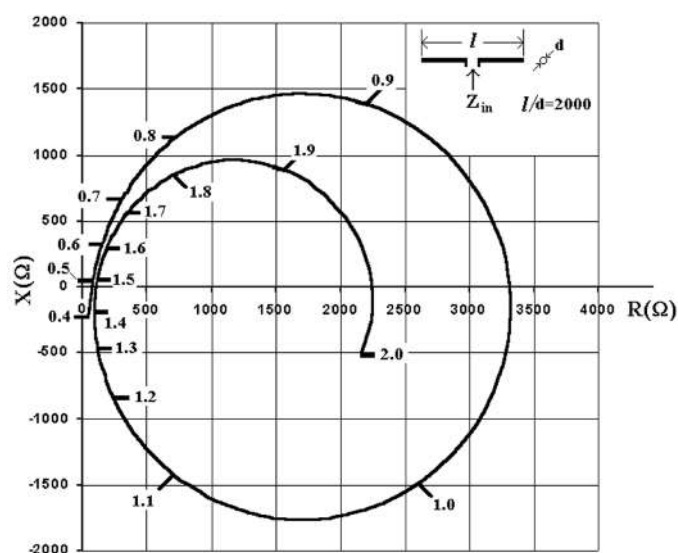
Em volta da 1ª ressonância			Em volta da 3ª ressonância		
l/λ	$R(\Omega)$	$X(\Omega)$	l/λ	$R(\Omega)$	$X(\Omega)$
0.4	45.776	-86.122	1.4	86.248	-40.42
0.41	49.291	-71.866	1.41	89.631	-31.433
0.42	53.057	-57.792	1.42	93.418	-22.53
0.43	57.094	-43.873	1.43	97.623	-13.721
0.44	61.425	-30.081	1.44	102.26	-5.019
0.45	66.074	-16.392	1.45	107.346	3.561
0.46	71.07	-2.785	1.46	112.897	12
0.47	76.441	10.76	1.47	118.929	20.278
0.48	82.221	24.259	1.48	125.461	28.369
0.49	88.447	37.726	1.49	132.508	36.245
0.5	95.159	51.174	1.5	140.058	43.887

Tabela 5-1 Valores de R e X na vizinhança das 1ª e 3ª ressonâncias correspondentes ao gráfico da Figura 5.12 (b).

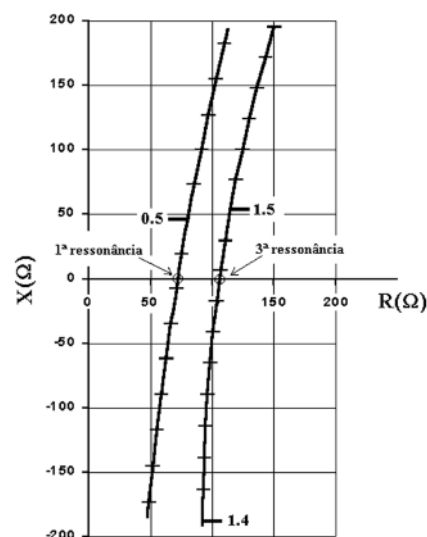
Na Figura 5.13 está representada a variação com a frequência, da impedância de entrada dum dipolo muito fino. O dipolo tem 0.5m de comprimento e um diâmetro de 0.25mm, o que corresponde a uma razão $l/d=2000$. A impedância de entrada foi calculada para frequências entre 240MHz e 1200MHz, para as quais o comprimento elétrico do dipolo varia entre 0.4λ e 2λ , tal como se representa na figura.

Comparando as Figura 5.12 e Figura 5.13 vê-se claramente que, dum modo geral, o dipolo mais fino apresenta valores de impedância de entrada mais elevados do que o dipolo grosso.

Como se pode ver pela Figura 5.13 o dipolo fino também apresenta diversas ressonâncias à medida que a frequência aumenta, mas que não coincidem com as do dipolo grosso. A primeira ressonância ocorre para $l \approx 0.482\lambda$, a segunda ressonância para $l \approx 0.955\lambda$, a terceira ressonância para $l \approx 1.476\lambda$ e a quarta ressonância ocorre para $l \approx 1.97\lambda$.



(a) - $0 \leq R \leq 4000$; $-2000 \leq X \leq 2000$



(b) - $0 \leq R \leq 200$; $-200 \leq X \leq 200$

Figura 5.13 Representação da variação impedância de entrada dum dipolo com $l/d=2000$, na forma dum diagrama R;X, em função do comprimento elétrico do dipolo.

Na Tabela 5-2 estão indicados os valores de R e X na vizinhança das 1ª e 3ª ressonâncias correspondentes ao gráfico da Figura 5.13 (b).

Em volta da 1ª ressonância			Em volta da 3ª ressonância		
l/λ	$R(\Omega)$	$X(\Omega)$	l/λ	$R(\Omega)$	$X(\Omega)$
0.45	58.541	-89.154	1.45	97.956	-65.233
0.46	62.359	-61.832	1.46	100.403	-41.302
0.47	66.408	-34.688	1.47	103.277	-17.516
0.48	70.704	-7.669	1.48	106.582	6.158
0.49	75.267	19.277	1.49	110.327	29.751
0.5	80.116	46.2	1.5	114.5	53.303
0.51	85.275	73.152	1.51	119.154	76.826
0.52	90.768	100.18	1.52	124.284	100.356
0.53	96.624	127.337	1.53	129.91	123.925
0.54	102.872	154.671	1.54	136.053	147.56
0.55	109.548	182.234	1.55	142.738	171.291

Tabela 5-2 Valores de R e X na vizinhança das 1ª e 3ª ressonâncias correspondentes ao gráfico da Figura 5.13 (b).

Da Figura 5.12 e da Figura 5.13 também se conclui que antes da 1ª ressonância os dipolos são capacitivos, entre a 1ª e a 2ª ressonâncias são indutivos, entre a 2ª e a 3ª ressonâncias são novamente capacitivos, e assim sucessivamente.

Também é interessante ver a variação da impedância de entrada dum dipolo cilíndrico com o seu diâmetro. Na Figura 5.14 está representada a resistência de entrada, em função do comprimento elétrico, para dipolos de diversos diâmetros. Na Figura 5.15 está representada a reactância de entrada.

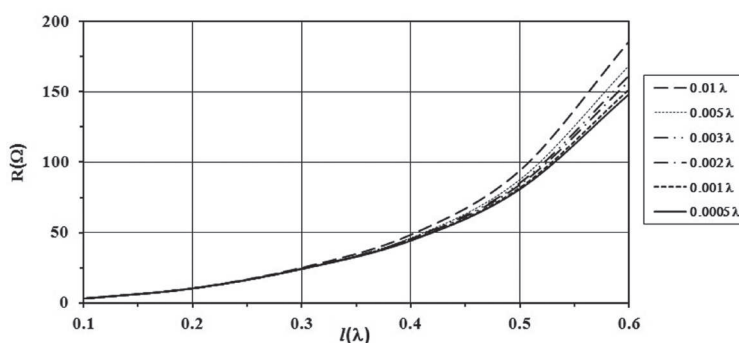


Figura 5.14 Variação da resistência de entrada em função do comprimento elétrico, para dipolos com vários diâmetros.

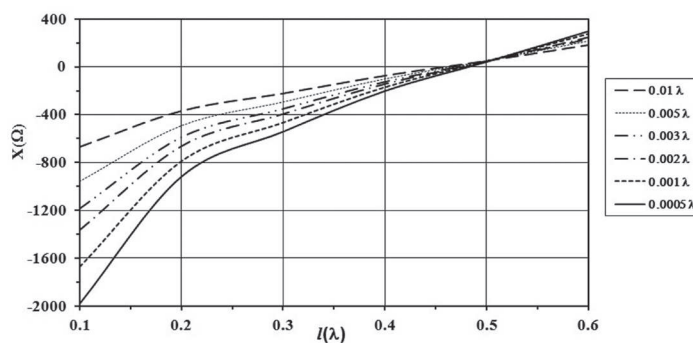


Figura 5.15 Variação da reactância de entrada em função do comprimento elétrico, para dipolos com vários diâmetros.

Destas figuras verifica-se que para dipolos com comprimentos até 0.6λ , a resistência de entrada varia pouco com o diâmetro do dipolo. A reactância varia mais com o diâmetro, sobretudo para dipolos curtos. Outro aspeto importante é o facto da primeira ressonância depender do diâmetro, ocorrendo para comprimentos entre 0.44 e 0.48λ . Quanto mais grosso for o dipolo mais curto precisa de ser para se obter a ressonância.

Na Figura 5.16 está representada a resistência de entrada dos dois dipolos, um fino e um grosso, em função do comprimento eléctrico. Na Figura 5.17 está representada a reactância de entrada.

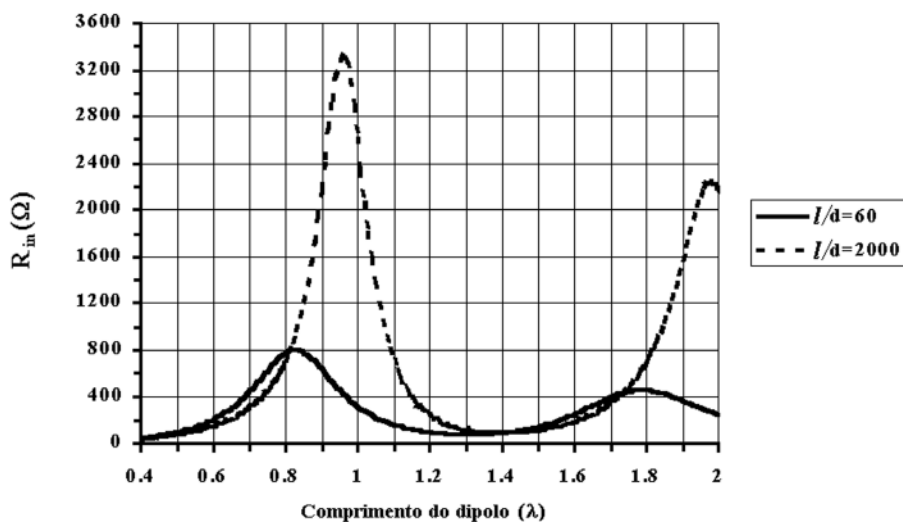


Figura 5.16 Variação da resistência de entrada em função do comprimento eléctrico, para dois dipolos de diâmetro diferente.

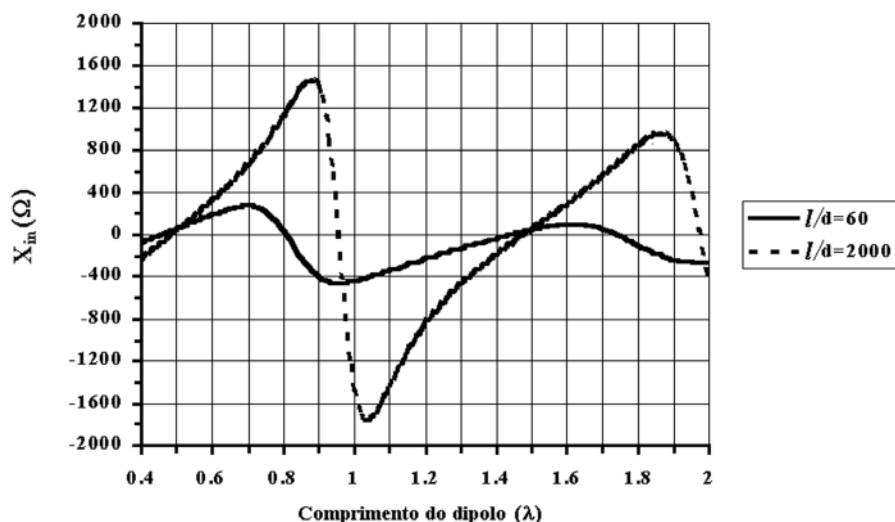


Figura 5.17 Variação da reactância de entrada em função do comprimento eléctrico, para dois dipolos de diâmetro diferente.

Pela observação destas figuras vê-se, tal como já foi dito atrás, que dum modo geral o dipolo mais fino apresenta valores de resistência e de reactância de entrada mais elevados do que o dipolo grosso. Para além disso, da Figura 5.17 conclui-se que nas vizinhanças das ressonâncias, sobretudo da 1ª e da 3ª, a variação é muito menor para o dipolo grosso do que para o dipolo fino. Isto significa que, à medida que os dipolos se tornam mais grossos, as suas impedâncias de entrada tornam-se menos sensíveis às variações da frequência. Isto tem como consequência que, a banda de frequências dentro da qual a impedância do dipolo está adaptada, relativamente a uma impedância de referência, é maior para um dipolo grosso do que para um dipolo fino. Pela observação destas figuras vê-se, tal como

já foi dito atrás, que o dipolo mais fino apresenta valores de impedância de entrada mais elevados do que o dipolo grosso. Um dipolo grosso tem, portanto, uma largura de banda maior do que um dipolo fino.

Para melhor ilustrar esta conclusão, na Figura 5.18 está representado a variação do VSWR (tendo por referência 50Ω), obtido com as impedâncias de entrada de 4 dipolos, todos com o mesmo comprimento $l=480\text{mm}$, mas com diâmetros diferentes.

Tomando como limite da largura de banda, as frequências para as quais o $\text{VSWR} \leq 2$, facilmente se obtêm as larguras de banda dos 4 dipolos sendo a maior delas para o dipolo com $d=20\text{mm}$ e a menor para o dipolo com $d=1\text{mm}$.

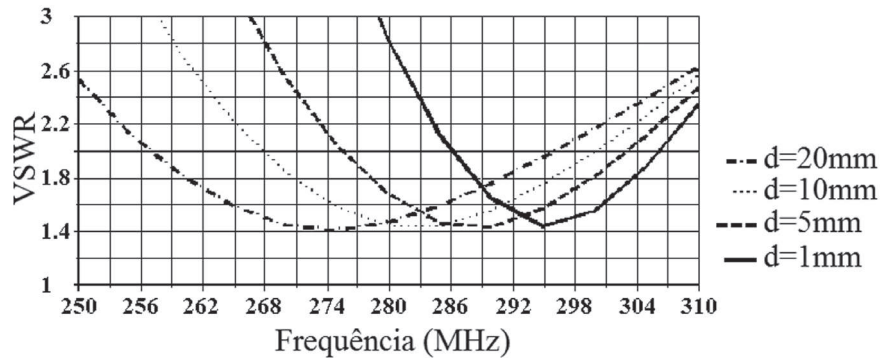


Figura 5.18 Variação do VSWR (referência 50Ω), obtido com as impedâncias de entrada de 4 dipolos, todos com o comprimento $l=480\text{mm}$, mas com diâmetros diferentes.

5.6.1 Raio equivalente

Nas secções anteriores considerou-se que o dipolo era um cilindro com secção circular. No entanto por vezes o dipolo pode ser construído com um tubo de secção não circular ou pela associação de dois ou mais tubos paralelos. Quando se tem um dipolo assim é importante obter um dipolo equivalente de secção circular para se poder usar os resultados da secção anterior para determinar a impedância de entrada.

Dois casos particulares estão representados na Figura 5.19. Num dos casos ilustra-se a determinação do raio do cilindro equivalente a um condutor em forma de tubo de secção quadrada. No outro mostra-se a determinação do raio equivalente dum condutor formado por dois cilindros iguais e paralelos.

Outras configurações e respetivos cilindros equivalentes podem ser obtidos em [4].

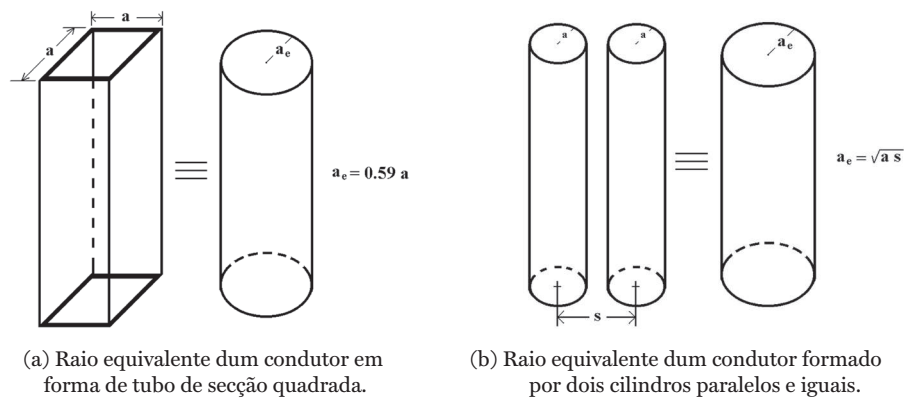


Figura 5.19 Condutores e respetivos cilindros equivalentes.

5.7 Diagrama de radiação dum dipolo cilíndrico

Vimos no capítulo 2 que o diagrama de radiação dum dipolo é calculado pela relação (5-52), em que $\mathbf{I}(z')$ é a distribuição da corrente ao longo do dipolo.

$$\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{\beta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{I}(z') e^{+j\beta z' \cos\theta} dz' \right] \quad (5-52)$$

Neste capítulo já se verificou que, para um dipolo cilíndrico, $\mathbf{I}(z')$ depende do diâmetro. Por consequência o diagrama de radiação também depende do diâmetro do dipolo.

Vimos também neste capítulo que $\mathbf{I}(z')$ pode ser expressa por uma expansão em funções de base gn, conhecidas, tal como se indica em (5-53) podendo os coeficientes complexos $\mathbf{I}_n$ ser determinados pelo MoM.

$$\mathbf{I}_z(z') = \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n g_n(z') \quad (5-53)$$

Considerando que as funções de base g_n são impulsos retangulares, então $\mathbf{I}(z')$ pode ser expressa por (5-54):

$$\mathbf{I}_z(z') = \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n(z'_n) \quad (5-54)$$

Substituindo (5-54) em (5-52), obtém-se (5-55):

$$\mathbf{E}_\theta \cong j\eta \frac{\beta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n(z'_n) e^{+j\beta z'_n \cos\theta} \Delta z' \right] \quad (5-55)$$

Usando esta expressão é possível determinar o diagrama de radiação dum dipolo cilíndrico a partir da distribuição da corrente que o percorre.

Como exemplo, na Figura 5.20 estão representados dois diagramas correspondentes a dois dipolos com o mesmo comprimento $l=1.25\lambda$, mas com diâmetros diferentes. Um tem um diâmetro $d=0.00625\lambda$ a que corresponde uma razão $l/d=200$, sendo, portanto, relativamente fino. O outro tem um diâmetro $d=0.025\lambda$ a que corresponde uma razão $l/d=50$ sendo, portanto mais grosso. Na mesma figura e para comparação está também representado o diagrama dum dipolo com o mesmo comprimento, mas infinitamente fino assumindo-se que a distribuição da corrente é sinusoidal.

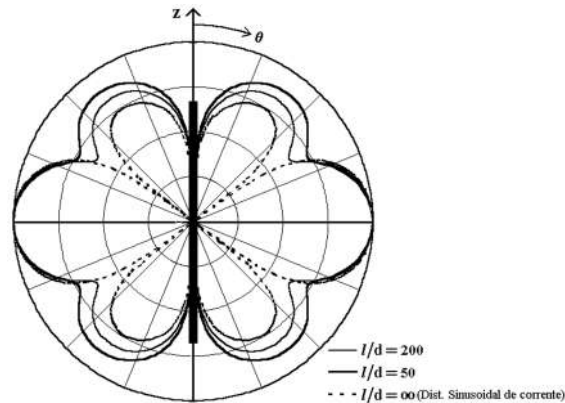


Figura 5.20 Diagramas de radiação de dipolos com o mesmo comprimento $l=1.25\lambda$, mas com diâmetros diferentes.

Desta figura pode-se concluir que à medida que o dipolo se torna mais grosso os lobos secundários têm um nível mais alto e que os mínimos, fora do eixo do dipolo, são menos pronunciados e se afastam da direção prevista pela distribuição sinusoidal. Na direção de maior intensidade de radiação os diagramas são pouco afetados pelo diâmetro. Apesar destas diferenças, a distribuição sinusoidal dá uma boa aproximação mesmo para dipolos relativamente grossos.

5.8 Impedância mútua

Até agora considerou-se sempre que os dipolos estavam isolados num meio ilimitado. Contudo, muitas vezes um dipolo está colocado nas proximidades de obstáculos ou junto a outros dipolos. A presença desses elementos altera a distribuição da corrente no dipolo, que por sua vez vai alterar a impedância à entrada e o diagrama de radiação. Esta interação designa-se por acoplamento mútuo. Este efeito é particularmente importante quando vários dipolos estão agrupados para formar um agregado.

Consideremos o caso particular de dois dipolos situados proximamente um do outro como se indica na Figura 5.21.

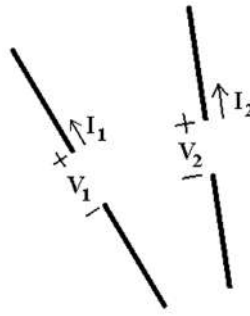


Figura 5.21 Ilustração do acoplamento mútuo entre dois dipolos situados proximamente um do outro.

Esta situação pode ser vista como um sistema de dois portos caracterizado pelas relações (5-56):

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \quad (5-56)$$

A impedância de entrada do dipolo 1 é dada por $Z_{n1} = \frac{V_1}{I_1}$ e a impedância de entrada do dipolo 2 é dada por $Z_{n2} = \frac{V_2}{I_2}$.

Tendo em conta estas definições pode-se obter, a partir de (5-56), as relações (5-57):

$$\begin{aligned} Z_{n1} &= Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} \\ Z_{n2} &= Z_{21} \frac{I_1}{I_2} + Z_{22} \end{aligned} \quad (5-57)$$

em que:

Z_{11} representa a impedância própria do dipolo 1 quando está isolado,
 Z_{22} representa a impedância própria do dipolo 2 quando está isolado,
 $Z_{12}=Z_{21}$ representam as impedâncias mútuas entre os dipolos 1 e 2.

A impedância Z_{12} é igual à impedância Z_{21} devido ao princípio da reciprocidade.

As relações (5-57) mostram que a impedância de entrada dum dipolo é modificada pela presença de outro dipolo e que isso depende da impedância mútua e da razão entre as correntes nos dois dipolos. Por sua vez a impedância mútua depende do tipo de dipolos e da sua posição relativa. Por tudo isto, quando é importante saber a impedância de entrada duma antena para, por exemplo adaptá-la a uma linha de transmissão, é a impedância de entrada, definida neste contexto que é necessário saber e não a impedância própria que só coincide com a impedância de entrada se o dipolo estiver isolado.

Para o caso geral de N dipolos a impedância de cada um deles é dada pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 Z_{in1} &= Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} + Z_{13} \frac{I_3}{I_1} \dots + Z_{1n} \frac{I_n}{I_1} + \dots + Z_{1N} \frac{I_N}{I_1} \\
 Z_{in2} &= Z_{21} \frac{I_1}{I_2} + Z_{22} + Z_{23} \frac{I_3}{I_2} + \dots + Z_{2n} \frac{I_n}{I_2} + \dots + Z_{2N} \frac{I_N}{I_2} \\
 &\vdots \\
 Z_{inn} &= Z_{n1} \frac{I_1}{I_n} + Z_{n2} \frac{I_2}{I_n} + Z_{n3} \frac{I_3}{I_n} + \dots + Z_{nn} + \dots + Z_{nN} \frac{I_N}{I_n} \\
 &\vdots \\
 Z_{inN} &= Z_{N1} \frac{I_1}{I_N} + Z_{N2} \frac{I_2}{I_N} + Z_{N3} \frac{I_3}{I_N} + \dots + Z_{Nn} \frac{I_n}{I_N} + \dots + Z_{NN}
 \end{aligned} \tag{5-58}$$

Dum modo geral a impedância mútua só se pode determinar ou por métodos numéricos como o MoM, ou por medição experimental.

Para medir a impedância mútua entre dois dipolos, pode-se proceder do seguinte modo:

- Medir a impedância própria de cada dipolo (Z_{11} e Z_{22}), isto é, a impedância de entrada quando estão isolados.
- Curto-circuitar um deles e medir a impedância de entrada do outro (Z_{cc1}), nessas circunstâncias.

Destas três impedâncias é possível obter a impedância mútua entre eles. Consideremos por exemplo que se curto-circuita o dipolo 2. Isso significa fazer $V_2=0$. Da equação (5-56), obtém-se então

$$V_2 = 0 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \tag{5-59}$$

Substituindo (5-59) em (5-57), obtém-se (5-60)

$$Z_{in1} |_{V_2=0} = Z_{11} - Z_{12} \left(\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right) \tag{5-60}$$

Designando $Z_{n1} |_{V_2=0}$ por Z_{cc2} e $Z_{12} = Z_{21} = Z_m$, (5-60) pode-se escrever como

$$Z_{cc2} = Z_{11} - \frac{Z_m^2}{Z_{22}} \tag{5-61}$$

Resolvendo (5-61) em ordem a Z_m , obtém-se

$$Z_m = \sqrt{Z_{22} (Z_{11} - Z_{cc2})} \tag{5-62}$$

No caso dos dois dipolos serem exatamente iguais, $Z_{11} = Z_{22}$ que podemos designar por Z_p . Também neste caso seria indiferente curto-circuitar o dipolo 1 ou o dipolo 2, pelo que Z_{cc2} seria igual a Z_{cc1} que podemos designar por então Z_{cc} . Então (5-62) torna-se em

$$Z_m = \sqrt{Z_p (Z_p - Z_{cc})} \tag{5-63}$$

Para mostrar variação da impedância mútua entre dois dipolos, consideremos dois casos particulares. Um arranjo com dois dipolos de meio comprimento de onda colocados paralelamente lado a lado e separados uma distância s ; e um arranjo com dois dipolos de meio comprimento de onda colocados colinearmente e separados entre os extremos por uma distância s .

As impedâncias mútuas foram obtidas pelo MoM, alimentando os dipolos exatamente da mesma maneira, isto é, com $V_1=V_2$ o que dá origem por consequência a correntes iguais, isto é, $I_1=I_2$. Nestas condições das relações (5-57) obtém-se:

$$Z_{in1} = Z_{in2} = Z_{in} = Z_p + Z_m \quad \Rightarrow \quad Z_m = Z_{in} - Z_p \quad (5-64)$$

Primeiro obteve-se a impedância própria Z_p dum dipolo e seguidamente para cada distância s obteve-se Z_m , sendo Z_m calculada por (5-64).

Para cada arranjo foram estudados dois casos, um com dipolos finos e outro com dipolos grossos. Os resultados estão representados da Figura 5.22 à Figura 5.25.

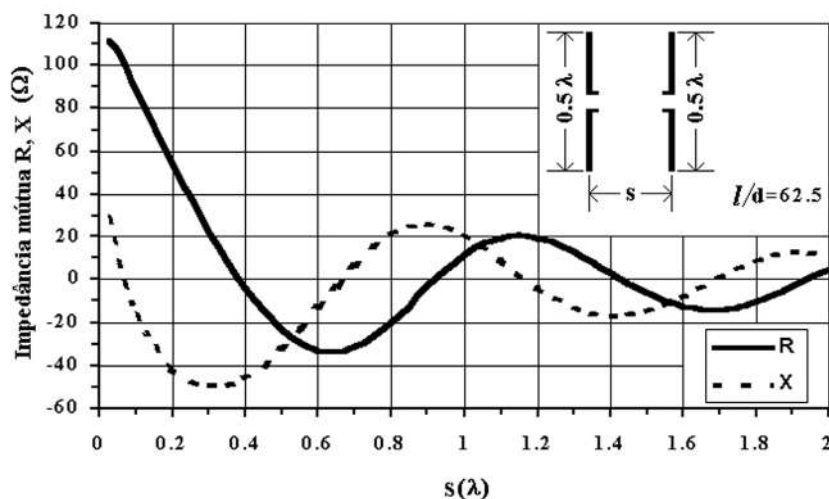


Figura 5.22 Variação da impedância mútua entre dois dipolos, colocados paralelamente lado a lado, em função da separação s entre eles. Os dipolos têm $l=\lambda/2$ e $l/d=62.5$.

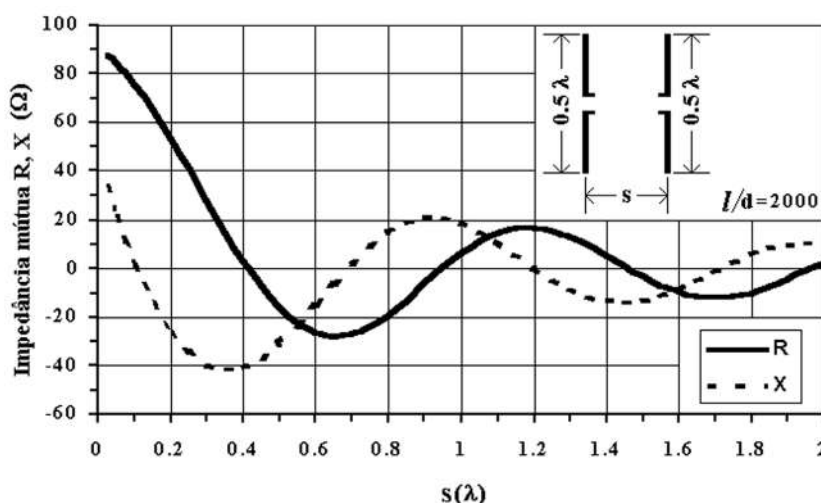


Figura 5.23 Variação da impedância mútua entre dois dipolos, colocados paralelamente lado a lado, em função da separação s entre eles. Os dipolos têm $l=\lambda/2$ e $l/d=2000$.

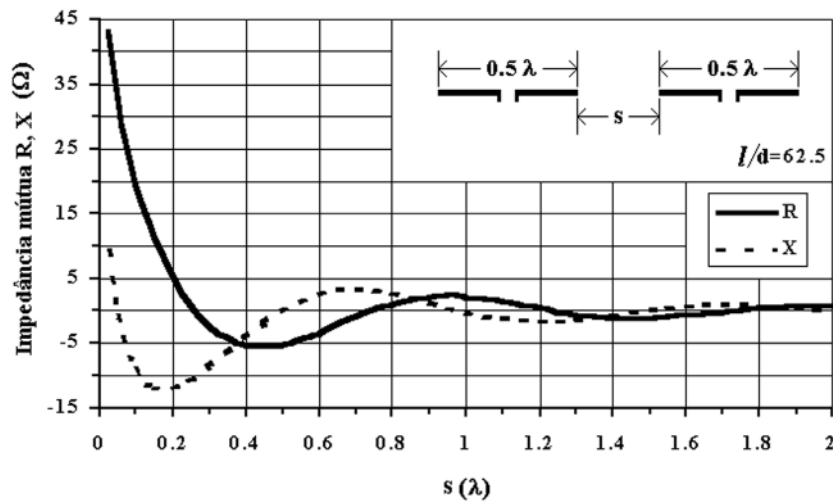


Figura 5.24 Variação da impedância mútua entre dois dipolos, colocados colinearmente, em função da separação s entre eles. Os dipolos têm $l=\lambda/2$ e $l/d=62.5$.

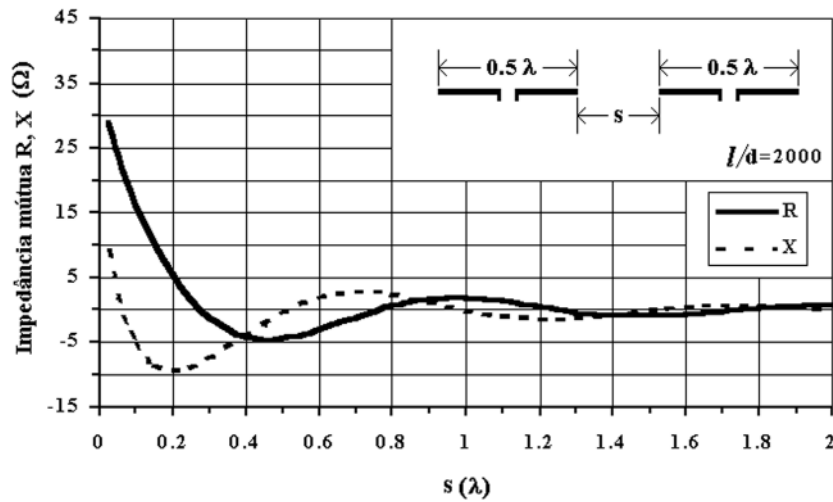


Figura 5.25 Variação da impedância mútua entre dois dipolos, colocados colinearmente, em função da separação s entre eles. Os dipolos têm $l=\lambda/2$ e $l/d=2000$.

Destas figuras torna-se evidente que a impedância mútua é mais forte no arranjo lado a lado do que no arranjo colinear. Isto deve-se ao facto de no arranjo colinear os dipolos estarem alinhados segundo a direção dum nulo de radiação enquanto que no arranjo lado a lado estão alinhados segundo a direção de máxima radiação. Outra conclusão que se tira destas figuras é que, em ambos os arranjos, a impedância mútua é um pouco mais intensa quando os dipolos são mais grossos. Embora não haja uma explicação óbvia, isso deriva da distribuição da corrente variar com o diâmetro do dipolo. Para maior facilidade de utilização apresentam-se, sob a forma de tabelas, os valores das impedâncias mútuas correspondentes às figuras anteriores.

A Tabela 5-3 contém os valores da impedância mútua correspondentes à Figura 5.22.

$l/d=62.5$								
s	Z_{12}		s	Z_{12}		s	Z_{12}	
	Real	Imag		Real	Imag		Real	Imag
0.05	106.597	8.362	0.75	-26.964	14.915	1.45	-1.605	-16.275
0.1	89.109	-16.523	0.8	-20.245	21.361	1.5	-6.19	-14.605
0.15	71.149	-31.792	0.85	-12.179	25.318	1.55	-9.994	-11.753
0.2	54.048	-41.615	0.9	-3.635	26.544	1.6	-12.737	-7.996
0.25	37.863	-47.369	0.95	4.496	25.119	1.65	-14.217	-3.679
0.3	22.685	-49.7	1	11.431	21.424	1.7	-14.334	0.807
0.35	8.706	-49.024	1.05	16.599	16.057	1.75	-13.105	5.048
0.4	-3.805	-45.684	1.1	19.698	9.724	1.8	-10.673	8.649
0.45	-14.544	-40.026	1.15	20.678	3.132	1.85	-7.304	11.272
0.5	-23.184	-32.435	1.2	19.699	-3.097	1.9	-3.361	12.683
0.55	-29.412	-23.375	1.25	17.07	-8.466	1.95	0.734	12.783
0.6	-32.966	-13.409	1.3	13.189	-12.622	2	4.557	11.62
0.65	-33.694	-3.204	1.35	8.492	-15.351			
0.7	-31.612	6.494	1.4	3.419	-16.562			

Tabela 5-3 Impedância mútua entre dois dipolos, colocados paralelamente lado a lado, em função da separação s entre eles. Os dipolos têm $l=\lambda/2$ e $l/d=62.5$.

A Tabela 5-4 contém os valores da impedância mútua correspondentes à Figura 5.23.

$l/d=2000$								
s	Z_{12}		s	Z_{12}		s	Z_{12}	
	Real	Imag		Real	Imag		Real	Imag
0.05	84.65	20.969	0.75	-24.1	9.107	1.45	0.96	-13.949
0.1	75.821	0.945	0.8	-19.279	15.043	1.5	-3.195	-13.161
0.15	65.166	-14.575	0.85	-13.218	19.124	1.55	-6.818	-11.232
0.2	53.26	-26.379	0.9	-6.534	21.142	1.6	-9.621	-8.389
0.25	40.571	-34.698	0.95	0.136	21.085	1.65	-11.397	-4.928
0.3	27.624	-39.674	1	6.2	19.133	1.7	-12.031	-1.187
0.35	14.976	-41.489	1.05	11.167	15.625	1.75	-11.516	2.482
0.4	3.174	-40.398	1.1	14.692	11.009	1.8	-9.945	5.743
0.45	-7.269	-36.752	1.15	16.589	5.795	1.85	-7.51	8.308
0.5	-15.904	-30.991	1.2	16.836	0.494	1.9	-4.478	9.963
0.55	-22.373	-23.644	1.25	15.553	-4.424	1.95	-1.165	10.592
0.6	-26.437	-15.312	1.3	12.979	-8.566	2	2.101	10.18
0.65	-28.003	-6.644	1.35	9.435	-11.637			
0.7	-27.143	1.702	1.4	5.298	-13.455			

Tabela 5-4 Impedância mútua entre dois dipolos, colocados paralelamente lado a lado, em função da separação s entre eles. Os dipolos têm $l=\lambda/2$ e $l/d=2000$.

A Tabela 5-5 contém os valores da impedância mútua correspondentes à Figura 5.24.

$l/d=62.5$								
s	Z_{12}		s	Z_{12}		s	Z_{12}	
	Real	Imag		Real	Imag		Real	Imag
0.05	32.179	-1.022	0.75	0.134	3.215	1.45	-1.223	-0.256
0.1	19.707	-9.091	0.8	1.05	2.762	1.5	-1.179	0.131
0.15	11.435	-11.703	0.85	1.722	2.11	1.55	-1.026	0.467
0.2	5.366	-11.865	0.9	2.126	1.35	1.6	-0.789	0.727
0.25	0.903	-10.682	0.95	2.265	0.568	1.65	-0.499	0.892
0.3	-2.242	-8.754	1	2.166	-0.161	1.7	-0.188	0.957
0.35	-4.264	-6.476	1.05	1.87	-0.776	1.75	0.114	0.924
0.4	-5.333	-4.133	1.1	1.433	-1.237	1.8	0.378	0.806
0.45	-5.615	-1.934	1.15	0.912	-1.521	1.85	0.583	0.62
0.5	-5.276	-0.029	1.2	0.367	-1.624	1.9	0.716	0.391
0.55	-4.485	1.485	1.25	-0.15	-1.559	1.95	0.768	0.143
0.6	-3.406	2.557	1.3	-0.593	-1.352	2	0.743	-0.098
0.65	-2.19	3.179	1.35	-0.93	-1.038			
0.7	-0.974	3.38	1.4	-1.142	-0.659			

Tabela 5-5 Impedância mútua entre dois dipolos, colocados colinearmente, em função da separação s entre eles. Os dipolos têm $l=\lambda/2$ e $l/d=62.5$.

A Tabela 5-6 contém os valores da impedância mútua correspondentes à Figura 5.25.

$l/d=2000$								
s	Z_{12}		s	Z_{12}		s	Z_{12}	
	Real	Imag		Real	Imag		Real	Imag
0.05	23.9	1.775	0.75	-0.212	2.769	1.45	-1.03	-0.357
0.1	16.377	-5.46	0.8	0.617	2.477	1.5	-1.034	-0.018
0.15	10.38	-8.494	0.85	1.259	1.99	1.55	-0.94	0.289
0.2	5.543	-9.338	0.9	1.684	1.382	1.6	-0.764	0.54
0.25	1.751	-8.866	0.95	1.887	0.727	1.65	-0.532	0.715
0.3	-1.073	-7.598	1	1.88	0.092	1.7	-0.27	0.806
0.35	-3.008	-5.893	1.05	1.694	-0.468	1.75	-0.006	0.812
0.4	-4.148	-4.021	1.1	1.368	-0.911	1.8	0.236	0.74
0.45	-4.604	-2.183	1.15	0.951	-1.213	1.85	0.434	0.603
0.5	-4.503	-0.53	1.2	0.493	-1.361	1.9	0.575	0.419
0.55	-3.978	0.836	1.25	0.041	-1.363	1.95	0.649	0.211
0.6	-3.164	1.855	1.3	-0.364	-1.233	2	0.655	-0.001
0.65	-2.19	2.505	1.35	-0.69	-1			
0.7	-1.173	2.798	1.4	-0.915	-0.696			

Tabela 5-6 Impedância mútua entre dois dipolos, colocados colinearmente, em função da separação s entre eles. Os dipolos têm $l=\lambda/2$ e $l/d=2000$.

5.9 Cálculo do ganho dum agregado de dipolos cilíndricos

Vimos no capítulo 4 que o ganho dum agregado uniforme com N dipolos era dado pela expressão (5-65):

$$G = \frac{1}{30} \frac{|\text{Const.}|^2 N^2}{\sum_{n=1}^N R_{in(n)}} \quad (5-65)$$

Considerando que $|\mathbf{FE}|_{\max} = \frac{\text{Const.}}{r} |\mathbf{I}|$ e que $R_{in(n)}$ representa a parte real da impedância de entrada do elemento n.

A impedância de entrada de cada dipolo, e, portanto, $R_{in(n)}$, depende das dimensões do dipolo e da intensidade da corrente que por sua vez depende da influência mútua entre os diversos dipolos que formam o agregado.

A impedância de entrada de cada dipolo, tendo em conta as influências mútuas entre eles, pode agora ser determinada de acordo com o que foi estabelecido nas secções anteriores.

Para exemplificar o modo de calcular o ganho de agregados de dipolos cilíndricos consideremos os dois exemplos seguintes:

Exemplo 5.2

Agregado uniforme transversal de 4 dipolos de meia onda com $l/d=62.5$, colocados paralelamente lado a lado e separados duma distância $s=0.3\lambda$.

Como o agregado é uniforme e transversal, as correntes são todas iguais em amplitude e fase pelo que, de acordo com a equação (5-58), as impedâncias dos dipolos são dadas por:

$$\begin{aligned} Z_{in1} &= Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14} \\ Z_{in2} &= Z_{21} + Z_{22} + Z_{23} + Z_{24} \\ Z_{in3} &= Z_{31} + Z_{32} + Z_{33} + Z_{34} \\ Z_{in4} &= Z_{41} + Z_{42} + Z_{43} + Z_{44} \end{aligned} \quad (5-66)$$

Como os dipolos são todos iguais as impedâncias próprias são também todas iguais. Pela simetria do problema verifica-se ainda que $Z_1=Z_4$ e $Z_2=Z_3$.

Determinando a impedância própria obtém-se $Z_{ii}=94.45+j50.73 \ (\Omega)$.

As impedâncias mútuas obtêm-se da Tabela 5-3 e são as seguintes:

$$\begin{aligned} Z_{12}=Z_{21}=Z_{23}=Z_{32}=Z_{34}=Z_{43}=Z_{m|s=0.3\lambda} &= 22.69-j49.7 \ (\Omega) \\ Z_{13}=Z_{31}=Z_{24}=Z_{42}=Z_{m|s=0.6\lambda} &= -32.97-j13.4 \ (\Omega) \\ Z_{14}=Z_{41}=Z_{m|s=0.9\lambda} &= -3.64+j26.5 \ (\Omega) \end{aligned}$$

Substituindo estes valores em (5-66), obtém-se:

$$\begin{aligned} Z_1=Z_4 &= 80.54+j14.17 \ (\Omega); \quad Z_2=Z_3 = 106.86-j62 \ (\Omega); \\ \text{ou seja, } R_1=R_4 &= 80.54 \ (\Omega) \text{ e } R_2=R_3 = 106.86 \ (\Omega). \end{aligned}$$

Substituindo estes valores em (5-65) e atendendo a que para um dipolo de meia onda $|\mathbf{FE}|_{\max} = \frac{60}{r} |\mathbf{I}|$, obtém-se:

$$G = \frac{1}{30} \frac{60^2 4^2}{374.78} = 5.12 \Rightarrow 7\text{dBi}$$

Nota: dBi significa ganho relativo a uma antena isotrópica.

A influência mútua entre dipolos depende da posição relativa entre eles e também do raio dos dipolos. Por outro lado, também já vimos que o diagrama de radiação dum dipolo depende do seu diâmetro. Por consequência, é natural que o diagrama de radiação dum agregado de dipolos dependa destes parâmetros e seja, portanto, diferente do diagrama de radiação obtido desprezando a influência mútua entre dipolos e os seus diâmetros.

Para ilustrar esta situação, na Figura 5.26 estão representados, para comparação, os diagramas de radiação do agregado deste exemplo, correspondentes a dois casos. Um caso em que o diagrama foi calculado assumindo que os dipolos são infinitamente finos, têm uma distribuição de corrente sinusoidal e não se influenciam mutuamente e; o caso em que os dipolos têm uma razão $l/d=62.5$ e o diagrama foi calculado pelo MoM tendo em conta a influência mútua entre dipolos.

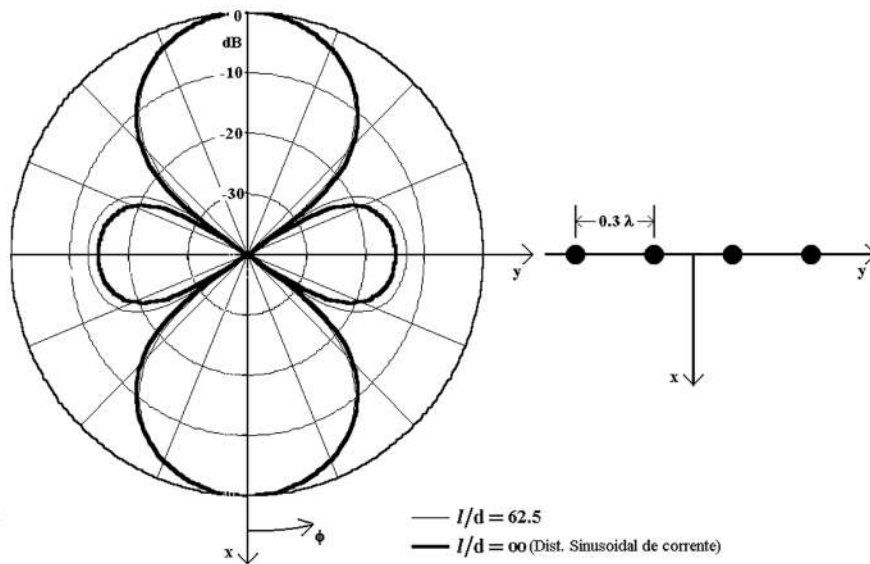


Figura 5.26 Diagramas de radiação do agregado do Exemplo 5.2.

Embora neste exemplo as diferenças entre os diagramas não sejam muito significativas verifica-se a tendência, já observada para um dipolo isolado, do nível dos lobos secundários ser mais elevado quando o diagrama é calculado pelo MoM tendo em conta a influência mútua entre dipolos e o seu diâmetro, do que quando o diagrama é calculado assumindo que os dipolos são infinitamente finos, têm uma distribuição de corrente sinusoidal e não se influenciam mutuamente.

Este efeito será ainda mais notório se os dipolos tiverem um comprimento maior do que $\lambda/2$ e estiverem mais próximos uns dos outros.

Exemplo 5.3

Consideremos o agregado planar uniforme de 6 dipolos de meia onda com $l/d=2000$, alimentados em fase e colocados em frente dum plano refletor à distância de 0.25λ , tal como se representa na Figura 5.27. Para este exemplo vamos considerar $d_x=0.5\lambda$ e $d_z=0.7\lambda$. Suponhamos ainda que os dipolos são cilindros de latão com uma condutividade $\sigma=2.56 \times 10^7$ S/m.

Devido ao plano refletor, deveremos usar o modelo para determinar as impedâncias mútuas que nos permitirão, por sua vez, calcular a impedância de entrada de cada dipolo. Para facilitar, vamos apenas calcular as impedâncias mútuas entre dipolos paralelos, colocados lado a lado e entre dipolos colineares. Tendo em conta esta simplificação as impedâncias dos dipolos 1 e 2, de acordo com a equação (5-58), são dadas por (5-67):

$$\begin{aligned} Z_{in1} &= Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} + Z_{13} \frac{I_3}{I_1} + Z_{14} \frac{I_4}{I_1} + Z_{11'} \frac{I_1'}{I_1} + Z_{12'} \frac{I_2'}{I_1} + Z_{13'} \frac{I_3'}{I_1} \\ Z_{in2} &= Z_{21} \frac{I_1}{I_2} + Z_{22} + Z_{23} \frac{I_3}{I_2} + Z_{25} \frac{I_5}{I_2} + Z_{21'} \frac{I_1'}{I_2} + Z_{22'} \frac{I_2'}{I_2} + Z_{23'} \frac{I_3'}{I_2} \end{aligned} \quad (5-67)$$

Como os dipolos são todos iguais as impedâncias próprias são também todas iguais. Pela simetria do problema verifica-se ainda que $Z_1 = Z_3 = Z_4 = Z_6$ e $Z_2 = Z_5$.

Modelo.

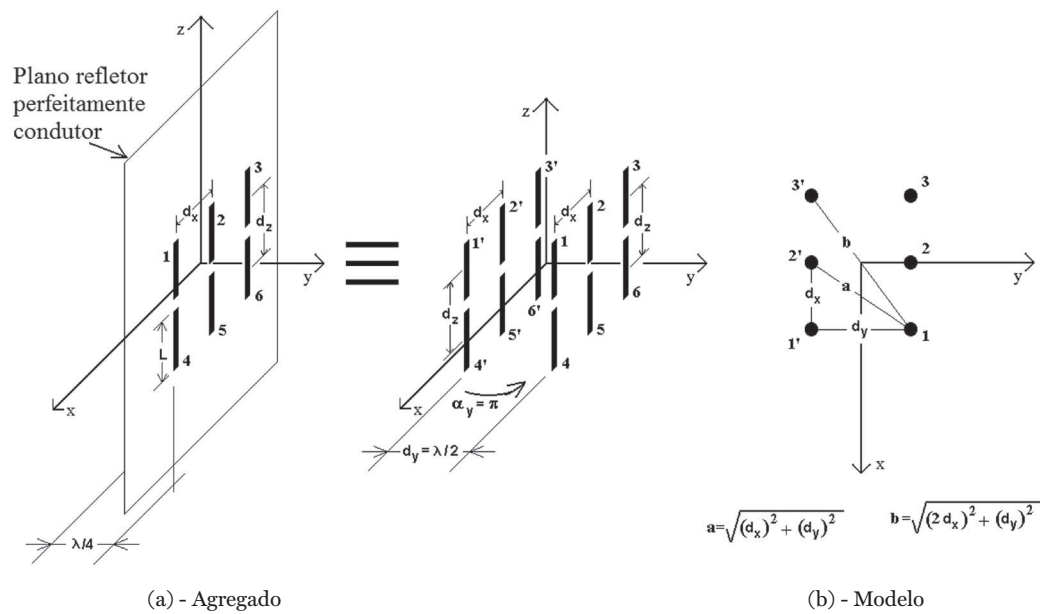


Figura 5.27 Agregado planar uniforme de 6 dipolos de meia onda, com $l/d=2000$, colocados em frente dum plano refletor, à distância $d_y=0.25\lambda$.

Como o agregado é uniforme as correntes nos dipolos 1 a 6 são todas iguais, mas como os dipolos estão colocados paralelamente ao plano refletor, as correntes nos dipolos imagem, isto é, nos dipolos 1' a 6' estão em oposição de fase. Então as impedâncias dos dipolos são dadas por

$$\begin{aligned} Z_{in1} &= Z_{in3} = Z_{in4} = Z_{in6} = Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14} - Z_{11'} - Z_{12'} - Z_{13'} \\ Z_{in2} &= Z_{in5} = Z_{21} + Z_{22} + Z_{23} + Z_{25} - Z_{21'} - Z_{22'} - Z_{23'} \end{aligned} \quad (5-68)$$

Determinando a impedância própria obtém-se $Z_{ii}=80+j45.3 \text{ } (\Omega)$.

As impedâncias mútuas para os dipolos paralelos obtém-se da Tabela 5-4 e são as seguintes:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_{21} = Z_{23} = Z_{11'} = Z_{22'} = Z_{m|s=0.5\lambda} = -15.9-j31 \text{ } (\Omega) \\ Z_{13} &= Z_{m|s=1\lambda} = 6.2+j19.13 \text{ } (\Omega) \\ Z_{12'} &= Z_{21'} = Z_{23'} = Z_{m|s=0.7\lambda} = -27.14+j1.7 \text{ } (\Omega) \\ Z_{13'} &= Z_{m|s=1.1\lambda} = 15+j10 \text{ } (\Omega) \end{aligned}$$

As impedâncias mútuas para os dipolos colineares obtém-se da Tabela 5-6 e são as seguintes:

$$Z_{14} = Z_{25} = Z_{m|s=0.2\lambda} = 5.54-j9.34 \text{ } (\Omega)$$

Substituindo estes valores em (5-68), obtém-se:

$$R_1=R_3=R_4=R_6=103.88 \text{ } (\Omega) \text{ e } R_2=R_5=123.9 \text{ } (\Omega).$$

Estes valores são as resistências de entrada dos dipolos sem tomar em consideração as perdas nesses condutores. Para calcular a resistência de perdas, deve-se recorrer à relação (5-69), já estudada no capítulo 1.

$$R_p \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{l}{2a\pi} \quad (5-69)$$

Vamos calcular esta resistência assumindo que a antena está a funcionar a 300MHz. Como $l/2a=l/d=2000$, então temos:

$$R_p \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{l}{2a\pi} = \sqrt{\frac{12}{2.56}} \times 10^{-3} \times 2000 = 4.3 \text{ } \Omega$$

A soma das resistências de entrada que aparece em (5-65) é então a seguinte:

$$\sum_{n=1}^6 R_{n(n)} = 4 \times 103.88 + 2 \times 123.9 + 6 \times 4.33 = 689.3 \text{ } \Omega.$$

Nota: Para o cálculo da potência de entrada dada por $P_n = \frac{1}{2} |I|^2 \sum_{n=1}^6 R_{n(n)}$, como é óbvio só se consideram 6 dipolos pois efetivamente só estes são alimentados.

Substituindo este valor em (5-65) e atendendo a que para um dipolo de meia onda $|\mathbf{FE}|_{\max} = \frac{60}{r} |\mathbf{I}|$, obtém-se:

$$G = \frac{1}{30} \frac{60^2 12^2}{689.3} = 25 \Rightarrow 14 \text{ dBi}$$

Nota: Nesta expressão já se consideram 12 dipolos, porque o conjunto formado pelos 6 dipolos e o refletor é substituído, para efeitos de radiação, pelo agregado dos 12 dipolos.

5.10 Dipolo dobrado

O dipolo dobrado tem a forma dum aro retangular estreito, feito com fio cilíndrico de raio a , assumindo normalmente os aspetos ilustrados na Figura 5.28. A dimensão s é muito menor que l e também muito menor que λ .

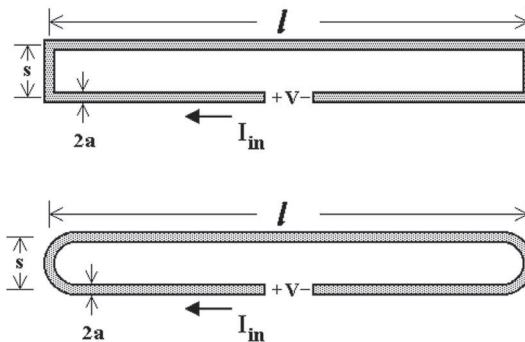


Figura 5.28 O dipolo dobrado nas suas duas versões mais comuns.

Este dipolo pode ser analisado pelo modelo linha de transmissão-antena dipolo. Esta análise consiste em considerar a corrente composta de dois modos: o modo linha de transmissão e o modo antena dipolo tal como se representa na Figura 5.29.

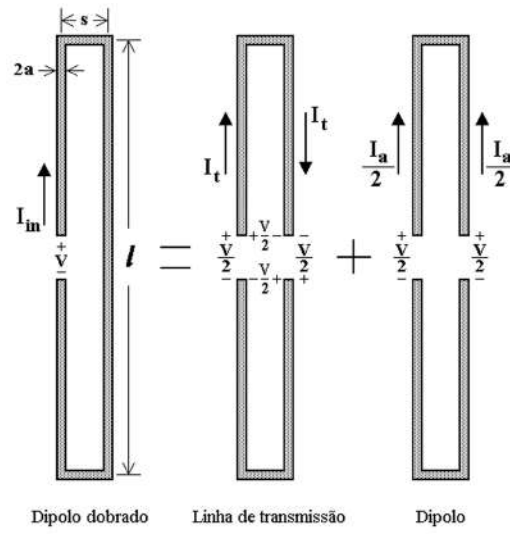


Figura 5.29 O dipolo dobrado e o seu modelo equivalente linha de transmissão-antena dipolo.

A expressão da impedância de entrada dum dipolo dobrado pode ser deduzida por aplicação deste modelo. Da Figura 5.29 vê-se que:

$$Z_{in} = \frac{V}{I_{in}} = \frac{V}{I_t + \frac{I_a}{2}} \quad (5-70)$$

A corrente I_t é a corrente à entrada numa linha de transmissão de comprimento $l/2$ terminada em curto-circuito, tal como se mostra na Figura 5.30.

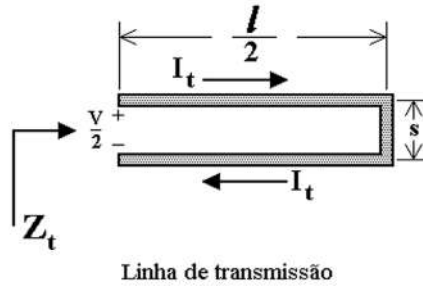


Figura 5.30 Modo linha de transmissão do modelo equivalente linha de transmissão-antena dipolo.

A corrente I_t é dada por:

$$I_t = \frac{V/2}{Z_t} \quad (5-71)$$

Z_t é a impedância de entrada numa linha de transmissão de comprimento $l/2$ terminada em curto-circuito sendo, portanto dada pela equação (5-72).

$$Z_t = jZ_0 \tan\left(\beta \frac{l}{2}\right) \quad (5-72)$$

Z_0 é a impedância característica da linha de transmissão que é dada por:

$$Z_0 \cong \frac{\eta}{\pi} \ln\left(\frac{s}{a}\right) \quad (5-73)$$

A parte dipolo do modelo da Figura 5.29 pode ser representada por um dipolo simples com um raio equivalente a_e , tal como se mostra na Figura 5.31.

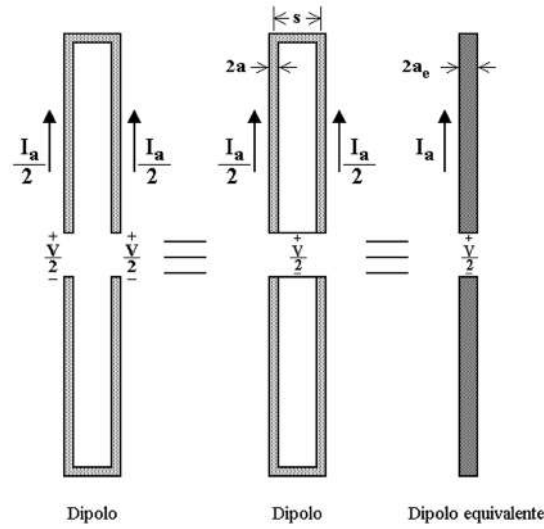


Figura 5.31 Modo dipolo do modelo equivalente linha de transmissão-antena dipolo.

Tal como se ilustrou na Figura 5.19, o raio equivalente a_e é dado pela expressão $a_e = \sqrt{as}$.

Conhecendo o raio equivalente pode-se calcular a impedância de entrada do dipolo, que designaremos por Z_d . A corrente I_a é então dada por:

$$I_a = \frac{V/2}{Z_d} \quad (5-74)$$

Substituindo I_t e I_a em (5-70), obtém-se:

$$Z_n = \frac{V}{I_n} = \frac{V}{I_t + \frac{I_a}{2}} = \frac{V}{\frac{V}{2Z_t} + \frac{V}{4Z_d}} = \frac{2Z_t \cdot 4Z_d}{2Z_t + 4Z_d} \quad (5-75)$$

Como se pode ver de (5-75) a impedância de entrada dum dipolo dobrado é o paralelo de duas impedâncias. Uma, é duas vezes a impedância de entrada numa linha de transmissão bifilar, feita com condutores cilíndricos de raio a , de comprimento $l/2$ e terminada em curto-circuito. A outra é quatro vezes a impedância de entrada dum dipolo simples de comprimento l feito com um condutor cilíndrico de raio a_e .

No caso de $l=\lambda/2$, $Z_t = \infty$ pelo que (5-75) se reduz a

$$Z_n = 4Z_d \quad (5-76)$$

Isto significa que a impedância de entrada dum dipolo dobrado de comprimento $\lambda/2$ é igual a quatro vezes a impedância de entrada dum dipolo simples de comprimento $\lambda/2$ feito com um condutor cilíndrico de raio $a_e = \sqrt{as}$. Tipicamente esta impedância é da ordem dos 300Ω.

Por vezes há dipolos dobrados que têm os lados mais compridos feitos com fios de raios diferentes. Isto tem o efeito de alterar a impedância de entrada. Mais informação sobre este assunto pode ser encontrada em[7].

O dipolo dobrado é uma antena muito usada, nomeadamente como elemento ativo em antenas Yagi-Uda. Embora isoladamente a sua impedância de entrada seja próxima de 300Ω, quando inserido num agregado o seu valor é diferente em geral um pouco mais baixo. É uma antena simples e robusta que apresenta maior largura de banda do que um dipolo simples.

Com o fim de melhor se compreender as propriedades dum dipolo dobrado e usando o código NEC, analisou-se um dipolo dobrado com as seguintes dimensões: comprimento $l=480\text{mm}$, raio do condutor $a=0.8\text{mm}$

e $s=20\text{mm}$. Para efeitos de comparação também se analisaram dois dipolos simples com o mesmo comprimento $l=480\text{mm}$. Um com fio de raio $a=1.6\text{mm}$ e outro com o raio equivalente $a_e = \sqrt{as} = 4\text{mm}$.

Todos os dipolos foram analisados entre 250 e 350 MHz e os resultados obtidos foram os seguintes:

O dipolo dobrado estava em ressonância à frequência de 285MHz apresentando uma impedância de aproximadamente 283Ω .

O dipolo simples com fio de raio $a=1.6\text{mm}$ estava em ressonância aproximadamente à frequência de 297MHz apresentando uma impedância de cerca de 72Ω .

O dipolo de raio equivalente $a_e = 4\text{mm}$ estava em ressonância aproximadamente à frequência de 287MHz apresentando uma impedância de cerca de 70Ω .

A Figura 5.32 mostra a variação do VSWR com a frequência. Para o dipolo dobrado tomou-se como impedância de referência 280Ω e para os dipolos simples 70Ω .

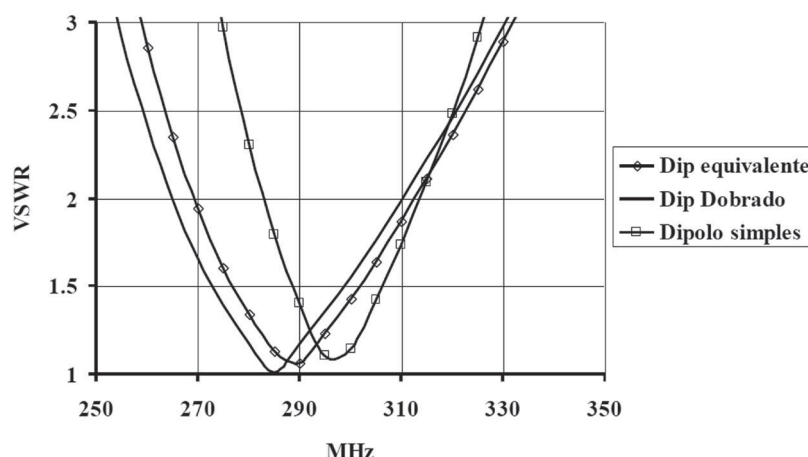


Figura 5.32 Variação do VSWR com a frequência. Para o dipolo dobrado tomou-se como impedância de referência 280Ω e para os dipolos simples 70Ω .

Como se pode ver pela Figura 5.32 o dipolo dobrado é o que apresenta maior largura de banda, cerca de 65MHz, seguido do dipolo equivalente com cerca de 45MHz. Como era de esperar o dipolo mais fino é o que tem menor largura de banda com aproximadamente 35MHz.

5.11 Elementos parasitas

Na secção 5.8 estudou-se a influência mútua entre dipolos, considerando que todos estavam alimentados. No entanto, mesmo quando um dos dipolos não está alimentado ele influencia os outros porque nele são induzidas correntes por ação dos campos radiados pelos outros. Um dipolo deste tipo designa-se por parasita.

A presença de elementos parasitas nas proximidades de dipolos alimentados, altera as suas distribuições de corrente que por sua vez vão alterar as suas impedâncias de entrada e os seus diagramas de radiação.

Consideremos o caso particular de um dipolo parasita situado proximamente dum dipolo alimentado, tal como se indica na Figura 5.33.

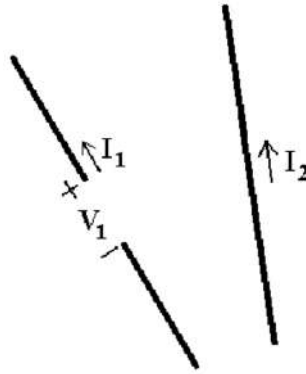


Figura 5.33 Ilustração do acoplamento mútuo entre um dipolo alimentado e um dipolo parasita.

Esta situação pode ser vista como um sistema de dois portos, com o porto 2 em curto-circuito. Este quadripolo é caracterizado pelas relações (5-77):

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (5-77)$$

$$V_2 = 0 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} I_1$$

A impedância de entrada do dipolo 1 é dada por $Z_{in1} = \frac{V_1}{I_1}$. Tendo em conta as relações (5-77), a impedância de entrada do dipolo alimentado é dada por (5-78).

$$Z_{in1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \left(-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right) = Z_{11} - \frac{(Z_{12})^2}{Z_{22}} \quad (5-78)$$

em que:

- Z_{11} representa a impedância própria do dipolo 1 quando está isolado,
- Z_{22} representa a impedância própria do dipolo 2 quando está isolado,
- $Z_{12}=Z_{21}$ representam as impedâncias mútuas entre os dipolos 1 e 2.

A impedância Z_{12} é igual à impedância Z_{21} devido ao princípio da reciprocidade.

As relações (5-78) mostram que a impedância de entrada dum dipolo é modificada pela presença de outro dipolo, mesmo quando este não é alimentado e que isso depende da impedância mútua e das impedâncias próprias dos dois dipolos. Por sua vez a impedância mútua depende do tipo de dipolos e da sua posição relativa. Por tudo isto, quando é importante saber a impedância de entrada duma antena para, por exemplo adaptá-la a uma linha de transmissão, é a impedância de entrada, definida neste contexto que é necessário saber e não a impedância própria que só coincide com a impedância de entrada se o dipolo estiver isolado.

5.11.1 Efeito dum dipolo parasita no diagrama de radiação

Viu-se na secção anterior que a presença dum elemento parasita nas proximidades dum dipolo alimentado, altera a sua impedância de entrada. Vejamos agora qual o efeito no diagrama de radiação. Consideremos o caso particular, mas importante, ilustrado na Figura 5.34.

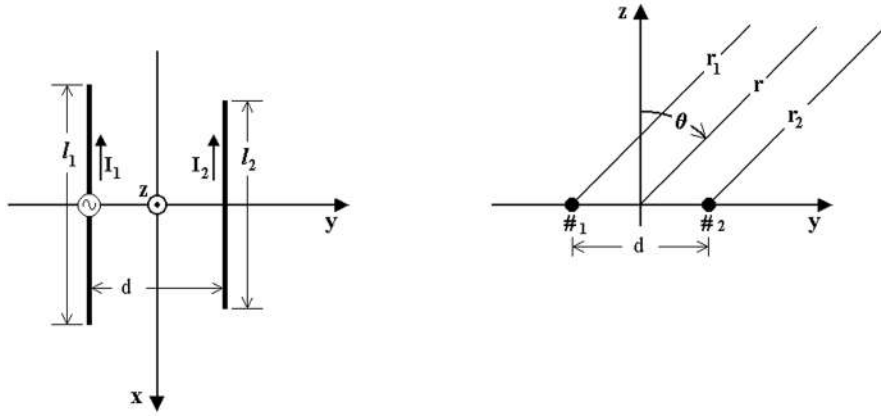


Figura 5.34 Dipolo parasita colocado paralelamente a um dipolo alimentado.

No plano yz, plano $\phi=90^\circ$, os campos radiados no campo distante por ambos os dipolos são dados pelas expressões (5-79), atendendo a que no campo distante $r_1 = r + \frac{d}{2} \sin\theta$ e $r_2 = r - \frac{d}{2} \sin\theta$.

$$\mathbf{E}_1 \cong K_1 \mathbf{I}_1 \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} = K_1 \mathbf{I}_1 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{-j\beta \frac{d}{2} \sin\theta} \quad (5-79)$$

$$\mathbf{E}_2 \cong K_2 \mathbf{I}_2 \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} = K_2 \mathbf{I}_2 \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{+j\beta \frac{d}{2} \sin\theta}$$

O campo radiado pelo conjunto formado pelos dois dipolos é dado pela soma de $\mathbf{E}_1$ com $\mathbf{E}_2$. Considerando que os dipolos têm um comprimento semelhante então $K_1 \cong K_2 \cong K$.

Além disso, de acordo com a secção anterior a corrente $\mathbf{I}_2$ é dada por $\mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{Z}_{21}}{\mathbf{Z}_{22}} \mathbf{I}_1$ que se pode escrever como $\mathbf{I}_2 = \frac{|\mathbf{Z}_{21}|}{|\mathbf{Z}_{22}|} \angle(\pi + \phi_{21} - \phi_{22}) \mathbf{I}_1$.

Tendo em conta estas relações, o campo radiado, a grande distância, pelo conjunto formado pelos dois dipolos é dado pela expressão (5-80):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \cong K \frac{e^{-j\beta r}}{r} \mathbf{I}_1 \left[e^{-j\beta \frac{d}{2} \sin\theta} + \frac{|\mathbf{Z}_{21}|}{|\mathbf{Z}_{22}|} e^{j\left(\beta \frac{d}{2} \sin\theta + \pi + \phi_{21} - \phi_{22}\right)} \right] \quad (5-80)$$

Aplicando igualdades trigonométricas o quadrado do módulo de $\mathbf{E}$ pode-se escrever como

$$|\mathbf{E}|^2 \cong \left| \frac{K}{r} \mathbf{I}_1 \right|^2 \left[1 + \left| \frac{\mathbf{Z}_{21}}{\mathbf{Z}_{22}} \right|^2 - 2 \left| \frac{\mathbf{Z}_{21}}{\mathbf{Z}_{22}} \right| \cos(\phi_{21} - \phi_{22} + \beta d \sin\theta) \right] \quad (5-81)$$

Para se ver qual o efeito do parasita no diagrama de radiação consideremos dois casos particulares baseados na geometria da Figura 5.34.

Primeiro consideremos um agregado com as seguintes características: os dipolos estão separados uma distância $d=0.2\lambda$, ambos os dipolos têm uma razão $l/d \approx 2000$, o dipolo 1 tem um comprimento de 0.48λ e o dipolo parasita é mais comprido com um comprimento de 0.5λ . O comprimento do dipolo alimentado foi escolhido de modo que ele esteja próximo da ressonância. A impedância própria do dipolo parasita obtém-se da Tabela 5-2. A impedância mútua pode-se obter aproximadamente da Tabela 5-4, embora os dipolos não tenham exatamente o comprimento de 0.5λ .

Aplicando a expressão (5-81) obtém-se o diagrama de radiação representado na Figura 5.35.

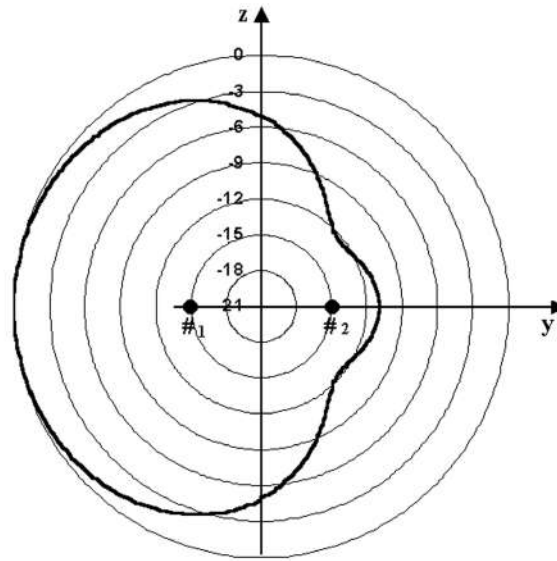


Figura 5.35 Diagrama de radiação do agregado formado um dipolo alimentado de comprimento 0.48λ e um dipolo parasita com um comprimento de 0.5λ , separados de 0.2λ .

Como se pode ver por esta figura o dipolo parasita, mais comprido do que o dipolo alimentado, tem como consequência dirigir a radiação em direção ao dipolo alimentado. O dipolo parasita funciona assim como um refletor.

Consideremos agora um agregado semelhante ao anterior, apenas com a diferença do dipolo parasita ter um comprimento de 0.46λ , isto é, ser mais curto que o dipolo alimentado.

Aplicando a este caso a expressão (5-81) obtém-se o diagrama de radiação representado na Figura 5.36.

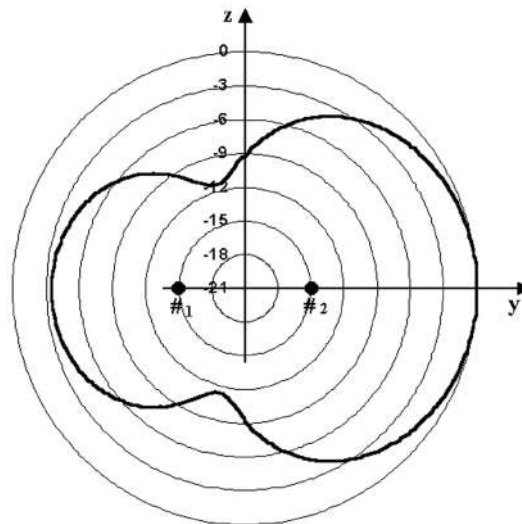


Figura 5.36 Diagrama de radiação do agregado formado um dipolo alimentado de comprimento 0.48λ e um dipolo parasita com um comprimento de 0.46λ , separados de 0.2λ .

Como se pode ver por esta figura o dipolo parasita, mais curto do que o dipolo alimentado, tem como consequência atrair a radiação na sua direção. O dipolo parasita funciona assim como um diretor.

5.12 Antena Yagi-Uda

Vimos na secção anterior que a presença dum elemento parasita na proximidade dum dipolo alimentado modificava significativamente o diagrama de radiação. Se o dipolo parasita for mais comprido do que o dipolo alimentado, dirige a radiação na direcção do dipolo alimentado atuando como um refletor. Se o dipolo parasita for mais curto do que o dipolo alimentado, dirige a radiação na sua direcção atuando como um diretor. Face a estas conclusões parece evidente que se se juntarem ambos os efeitos, deve-se ter uma antena diretiva dirigindo a energia no sentido do refletor para o diretor. Para comprovar que assim é, na Figura 5.37 está representado o diagrama de radiação da antena constituída pela junção dos três elementos atrás considerados, um dipolo alimentado com um comprimento de 0.48λ , um dipolo parasita mais comprido com um comprimento de 0.5λ e outro dipolo parasita mais curto com um comprimento de 0.46λ . Todos os dipolos estão separados duma distância $d=0.2\lambda$ e têm uma razão $l/d \approx 2000$.

Como se pode ver por este diagrama há uma clara sobreposição dos efeitos atrás estudados, obtendo-se no sentido do refletor para o diretor, um ganho de aproximadamente 9dBi enquanto para trás, isto é, no sentido inverso se obtém apenas um ganho de aproximadamente -7.5dBi. Isto corresponde a uma razão frente-trás de cerca de 16dB.

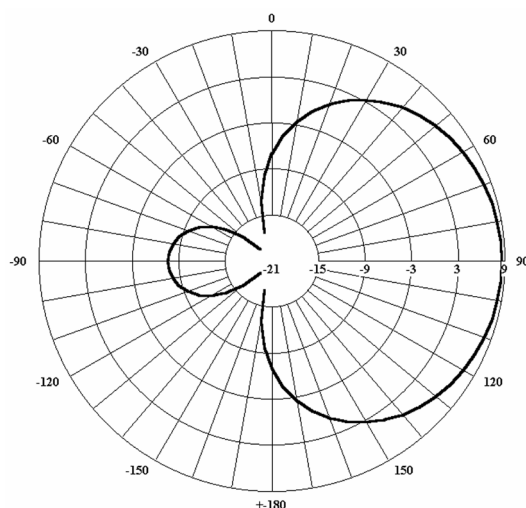


Figura 5.37 Diagrama de radiação do agregado formado por um dipolo alimentado de comprimento 0.48λ , rodeado de dois dipolos parasitas, um com um comprimento de 0.46λ e outro com um comprimento de 0.5λ , separados de 0.2λ .

Uma antena deste tipo, que na sua configuração básica, é formada por um elemento alimentado e por dois elementos parasitas paralelos, um mais comprido e outro mais curto, é muito popular por causa da sua simplicidade e por ter um ganho relativamente elevado. É muito comum usar como elemento alimentado um dipolo dobrado.

Este tipo de antena é conhecida por antena Yagi, devendo ser no entanto designada por antena Yagi-Uda pois o primeiro estudo desta antena foi realizado por Shintaro Uda na Universidade de Tohoku no Japão em 1926, embora este trabalho só tenha sido conhecido internacionalmente depois da publicação dum artigo em inglês pelo seu colega H. Yagi[5].

Na configuração mais geral uma antena Yagi-Uda possuiu um refletor e vários diretores. Um refletor é suficiente pois a utilização de mais refletores não se traduz num aumento significativo do ganho. O refletor tem sobretudo efeito na impedância de entrada da antena e no lobo traseiro. A forma do diagrama e o ganho da antena são essencialmente controlados pelos diretores. Em princípio quantos mais diretores se usarem mais

ganho se obtém. No entanto, na prática há um limite pois a partir de certo número o aumento de ganho é pouco significativo. A maior parte das antenas Yagi-Uda têm entre 6 e 12 diretores. Antenas com mais diretores podem ser projetadas, mas, no entanto, têm que ser construídas com muito cuidado.

O comprimento do dipolo alimentado é escolhido de modo que ele esteja próximo da ressonância, sendo em geral compreendido entre 0.45λ de 0.48λ . O comprimento do refletor é escolhido de modo que seja um pouco mais comprido. A separação entre o dipolo alimentado e o refletor é cerca de 0.25λ . O comprimento dos diretores é escolhido de modo que estes sejam um pouco mais curtos do que o dipolo alimentado, sendo da ordem de 0.4λ a 0.45λ . A separação entre diretores é cerca de 0.3λ . Os diretores são os elementos mais cruciais da antena.

As antenas Yagi-Uda são muito usadas nas bandas de HF, VHF e UHF por terem um ganho moderadamente alto, serem leves e de baixo custo.

5.12.1 Projeto duma antena Yagi

O projeto de antenas Yagi-Uda tem sido objeto de muitos trabalhos nomeadamente pela comunidade de radioamadores. Há, no entanto, um trabalho bastante extensivo e muito referenciado realizado por Peter Vezbicke[6] que é um bom guia para o projeto destas antenas. Nesse trabalho foram analisadas várias antenas Yagi-Uda e extraídas conclusões à cerca dos diversos elementos, das suas dimensões e posições relativas. As diversas conclusões são apresentadas na forma de gráficos e tabelas. Usando estes resultados pode-se estabelecer um guia passo a passo para o projeto destas antenas. Assumindo que o suporte, a que estão ligados os diversos elementos, não é condutor, o procedimento apoia-se apenas na Tabela 5-7 e na Figura 5.38. Ilustraremos de seguida esse procedimento através dum exemplo.

Espaçamento entre o refletor e o elemento alimentado, $s_{RE}=0.2\lambda$ Diâmetro dos elementos $d/\lambda=0.0085$		Comprimento da YAGI (λ)					
		0.4	0.8	1.2	2.2	3.2	4.2
Comprimento do refletor (λ)		0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.475
Comprimento dos diretores (λ)	1°	0.442	0.428	0.428	0.432	0.428	0.424
	2°		0.424	0.42	0.415	0.42	0.424
	3°		0.428	0.42	0.407	0.407	0.42
	4°			0.428	0.398	0.398	0.407
	5°				0.39	0.394	0.403
	6°				0.39	0.39	0.398
	7°				0.39	0.386	0.394
	8°				0.39	0.386	0.39
	9°				0.398	0.386	0.39
	10°				0.407	0.386	0.39
	11°					0.386	0.39
	12°					0.386	0.39
	13°					0.386	0.39
	14°					0.386	
	15°					0.386	
Espaçamento entre diretores (λ)		0.2	0.2	0.25	0.2	0.2	0.308
Ganho relativo a um dipolo de $\lambda/2$ (dBd)		7.1	9.2	10.2	12.25	13.4	14.2
Curva de apoio ao projeto		(A)	(C)	(C)	(B)	(C)	(D)

Tabela 5-7 Comprimentos ótimos dos dipolos parasitas para antenas Yagi-Uda de seis diferentes comprimentos. (Obtida de [6])

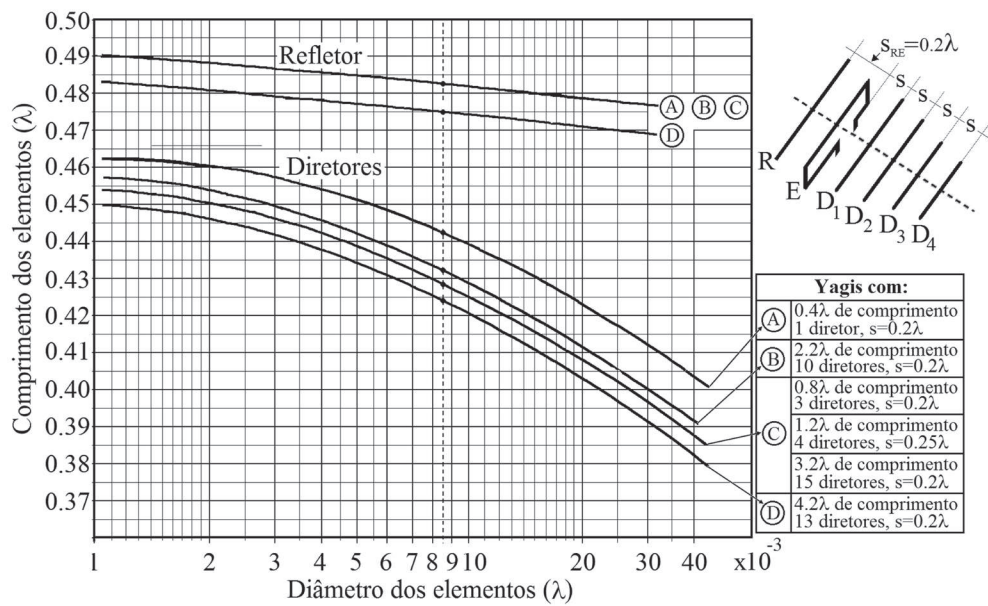


Figura 5.38 Curvas para determinar os comprimentos dos dipolos parasitas para antenas Yagi-Uda de seis diferentes comprimentos. (Obtida de [6]).

Para projetar uma antena Yagi-Uda assume-se que se conhece a frequência de funcionamento, o ganho pretendido e o diâmetro dos dipolos parasitas.

Exemplo 5.4

Pretende-se projetar uma antena Yagi-Uda para a frequência de 50.1MHz com um ganho de 9.2dBd, usando elementos com 25.4mm de diâmetro, montados num suporte não condutor. Para esta frequência o comprimento de onda é 5.988m pelo que o diâmetro dos elementos é $d=0.00424\lambda$. De acordo com a Tabela 5-7 para se obter o ganho de 9.2dBd deve-se usar uma antena com um comprimento de 0.8λ , constituída por um refletor e 3 diretores. Ainda de acordo com esta tabela o espaçamento entre todos os elementos é de 0.2λ . A determinação dos comprimentos dos elementos parasitas é obtida através da curva C da Figura 5.38, com base nos valores da Tabela 5-7 tendo em conta que estes são válidos para $d=0.0085\lambda$. O procedimento a seguir é o seguinte:

1. Começamos por marcar nas curvas C, que por clareza se repetem na Figura 5.39, os comprimentos que constam da Tabela 5-7, válidos para $d=0.0085\lambda$: $L'_{D1}=L'_{D3}=0.428\lambda$; $L'_{D2}=0.424\lambda$ e $L'_R=0.482\lambda$.
2. Como neste exemplo $d=0.00424\lambda$, tracemos nesta figura uma linha vertical que passe por este valor. A intersecção desta linha com a curva dos diretores dá o comprimento do primeiro diretor (neste caso igual ao do terceiro diretor) e a intersecção com a curva dos refletores dá o comprimento do refletor. Os valores assim obtidos são: $L_{D1}=L_{D3}=0.442\lambda$ e $L_R=0.485\lambda$.
3. Determinemos a distância $\Delta\ell$, medida ao longo da curva, entre $L'_{D1}=L'_{D3}$ e L'_{D2} . Usando esta distância a partir de $L_{D1}=L_{D3}$, obtém-se o valor de $L_{D2}=0.438\lambda$.

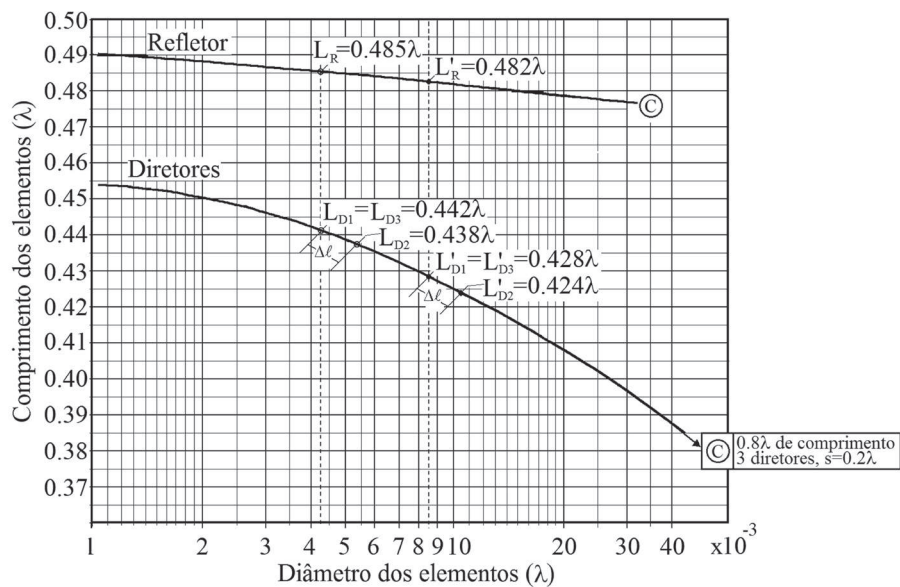


Figura 5.39 Curvas para determinar os comprimentos dos dipolos parasitas da antena Yagi-Uda do Exemplo 5.4.

5.12.2 Exemplos de projeto de antenas Yagi

Com base no procedimento anterior, o autor elaborou dois *scripts* em Matlab que permitem o projeto rápido de antenas Yagi. Um é designado por *ProjetoYagi_DS.m* e usa como elemento ativo um dipolo simples, o outro é designado por *ProjetoYagi_DD.m* e usa como elemento ativo um dipolo dobrado. Estes *scripts* dão as dimensões relevantes, o desenho da antena e ainda geram um texto apropriado para ser lido por programas de cálculo que usam o código NEC.

Exemplo 5.5

Pretende-se projetar uma antena com uma diretividade de 9.2dBd, isto é, com 11.35dBi, à frequência de 50.1MHz construída com tubo de 25.4mm de diâmetro, usando como elemento ativo um dipolo simples. A antena vai ser alimentada por uma linha de 50Ω.

Aplicando o *ProjetoYagi_DS.m*, obtém-se as seguintes dimensões para a antena:

Comprimento do Refletor= 2904.2mm

Comprimento do Dipolo Ativo= 2778.4mm

Espaçamento entre o Refletor e o Dipolo Ativo= 1197.6mm

Espaçamento entre o Dipolo Ativo e o 1º Diretor

igual ao espaçamento entre Diretores= 1197.6mm

Comprimento dos Diretores:

1º Diretor= 2653mm

2º Diretor= 2633mm

3º Diretor= 2653mm

Espaçamento entre Diretores= 1197.6mm

Comprimento total da antena= 3592.8mm

Na Figura 5.40 está ilustrada a geometria da antena.

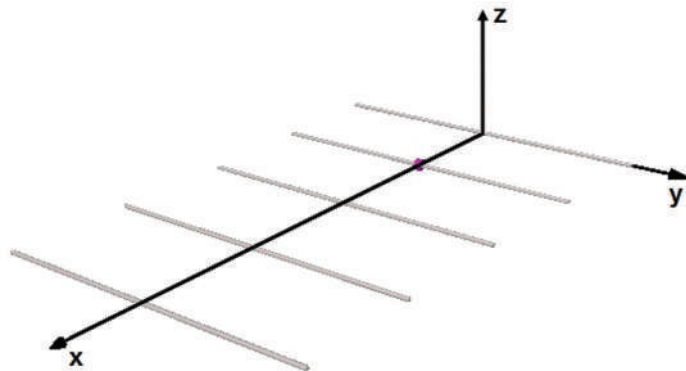


Figura 5.40 Geometria da antena Yagi do Exemplo 5.5.

O programa gera um texto, apropriado para ser lido pelo programa 4NEC2. Deve-se selecionar o texto, copiá-lo para o Notepad e guardá-lo com a extensão .NEC. Nas linhas abaixo está o conteúdo do ficheiro.

```
CM FICHEIRO apropriado para o 4NEC2
CM Antena Yagi com 5 elementos
CM Um Refletor, um Dipolo Ativo simples e 3 Diretores
CM O diâmetro de todos os dipolos é 25.4 mm
CM A frequência é de 50.1MHz
CM A diretividade pretendida é de 11.35dBi
CM
CE
SY LR=2904.2
SY LDA=2778.4
SY Esp_RDA=1197.6
GW 1 13 0 -LR/2 0 0 LR/2 0 12.7
GW 2 13 Esp_RDA -LDA/2 0 Esp_RDA LDA/2 0 12.7
GW 3 12 2395.2 -1326.35 0 2395.2 1326.35 0 12.7
GW 4 11 3592.8 -1316.5 0 3592.8 1316.5 0 12.7
GW 5 12 4790.4 -1326.35 0 4790.4 1326.35 0 12.7
GS 0 0 0.001
EX 0 2 7 0 1 0
```

O comprimento do refletor, o comprimento do dipolo ativo e a distância entre o refletor e o dipolo ativo, são definidas como variáveis para possibilitar a otimização pelo programa 4NEC2. Já dentro deste programa será definida a banda de frequências a utilizar na simulação.

Na Figura 5.41 está representada a variação do SWR, referido a 50Ω , na banda de frequências de 49 a 51 MHz, dada pelo 4NEC2 usando as dimensões dadas pelo projeto, isto é, sem qualquer otimização.

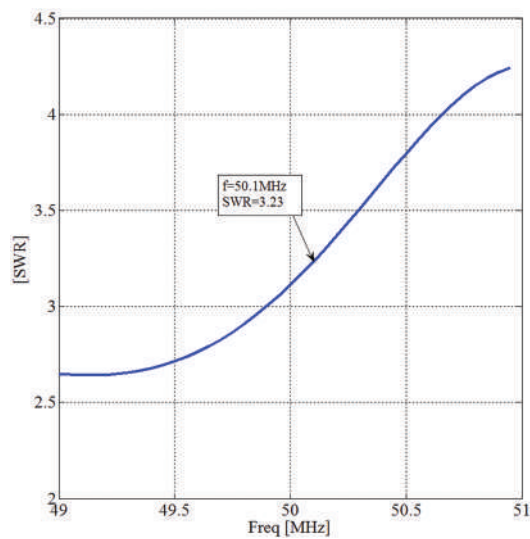


Figura 5.41 VSWR da antena Yagi do Exemplo 5.5.

Como se pode ver da Figura 5.41 o SWR para a frequência de 50.1MHz é de 3.25 que é um valor um pouco elevado. Deveria ser menor do que 2. A impedância de entrada a esta frequência é $Z_{in}=17.13+j15.53\Omega$. Isso significa que algum tipo de adaptação deverá ser introduzido de modo a melhorar o rendimento da antena considerando que ela vai ser alimentada por uma linha com impedância característica de 50Ω . O assunto da adaptação de antenas será abordado mais à frente neste capítulo.

Na Figura 5.42 estão representados os diagramas de radiação da antena à frequência de 50.1MHz. Como se pode ver desta figura a diretividade prevista é de 11.25dBi. O valor desejado para o projeto era de 11.35dBi pelo que este é um valor bem aceitável. A razão frente/trás é de 12.3 dB que também é aceitável para uma antena deste tipo.

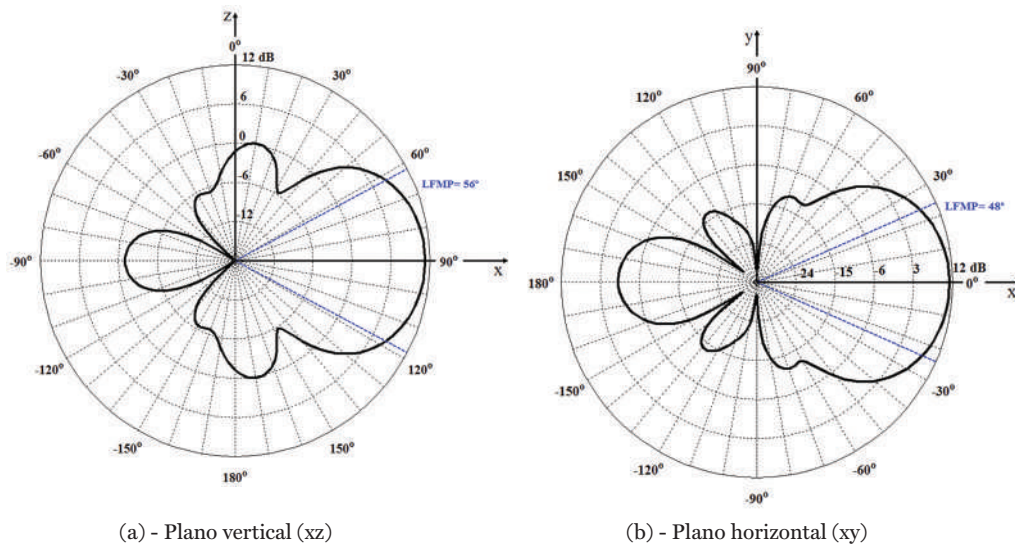


Figura 5.42 Diagramas de radiação da antena Yagi do Exemplo 5.5.

Finalmente na Figura 5.43 está representado o diagrama de radiação da antena em 3D à frequência de 50.1MHz, com realce para os cortes segundo os planos vertical e horizontal.

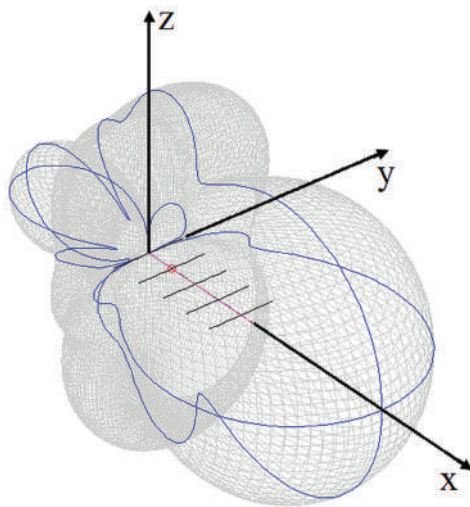


Figura 5.43 Diagrama de radiação em 3D da antena Yagi do Exemplo 5.5.

Exemplo 5.6

Pretende-se projetar uma antena Yagi-Uda para a frequência de 500MHz com uma diretividade de 12.35dBi, usando tubos com 8mm de diâmetro e um dipolo simples como elemento ativo. A antena vai ser alimentada por uma linha de 50Ω.

Aplicando o programa *ProjetoYagi_DS.m*, obtém-se as seguintes dimensões para a antena:

Comprimento do Refletor= 287.4mm

Comprimento do Dipolo Ativo= 268.3mm

Espaçamento entre o Refletor e o Dipolo Ativo= 120mm

Espaçamento entre o Dipolo Ativo e o 1º Diretor igual ao espaçamento entre Diretores= 150mm

Comprimento dos Diretores:

1º Diretor= 249mm

2º Diretor= 244mm

3º Diretor= 244mm

4º Diretor= 249mm

Espaçamento entre Diretores= 150mm

Comprimento total da antena= 570mm

Na Figura 5.44 está ilustrada a geometria da antena.

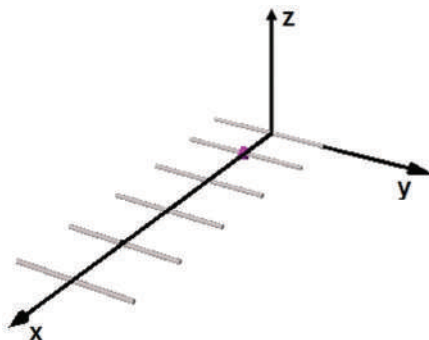


Figura 5.44 Geometria da antena Yagi do Exemplo 5.6.

Abaixo está o conteúdo do ficheiro apropriado para ser lido pelo programa 4NEC2 gerado pelo programa:

CM FICHEIRO apropriado para o 4NEC2

CM Antena Yagi com 6 elementos

CM Um Refletor, um Dipolo Ativo simples e 4 Diretores

CM O diâmetro de todos os dipolos é 8 mm

CM A frequência é de 500MHz

CM A diretividade pretendida é de 12.35dBi

CM

CE

SY LR=287.4

SY LDA=268.3

SY Esp_RDA=120

GW	1	12	0	-LR/2	0	0	LR/2	0	4
GW	2	13	Esp_RDA		-LDA/2	0	Esp_RDA	LDA/2	0 4
GW	3	11	270	-124.65	0	270	124.65	0	4
GW	4	11	420	-121.9	0	420	121.9	0	4
GW	5	11	570	-121.9	0	570	121.9	0	4
GW	6	11	720	-124.65	0	720	124.65	0	4
GS	0	0	0.001						
GE	0								
GN	-1								
EK									
EX	0	2	7	0	1	0	0		
FR	0	31	0	0	450	2			
EN									

O comprimento do refletor, o comprimento do dipolo ativo e a distância entre o refletor e o dipolo ativo, são definidas como variáveis para possibilitar a otimização pelo programa 4NEC2.

Usando as funcionalidades de otimização do programa 4NEC2, otimizaram-se as dimensões do comprimento do refletor, do comprimento do dipolo ativo e da distância entre o refletor e o dipolo ativo, com o fim de reduzir o valor do SWR e de tornar a impedância de entrada real, à frequência de projeto. As novas dimensões passaram a ser as seguintes:

Comprimento do Refletor= 301.7mm

Comprimento do Dipolo Ativo= 262.4mm

Espaçamento entre o Refletor e o Dipolo Ativo= 123.3mm

Com esta otimização conseguiu-se uma ligeira redução do SWR, tal como se pode observar na Figura 5.45 onde está ilustrada a comparação da variação do SWR, referido a 50Ω , na banda de frequências de 450 a 525 MHz entre antes e depois da otimização. A impedância de entrada à frequência de 500MHz é $Z_{in} \cong 21.3\Omega$ que é aproximadamente real. Também neste caso isso significa que algum tipo de adaptação deverá ser introduzido se a antena for alimentada por uma linha com impedância característica de 50Ω .

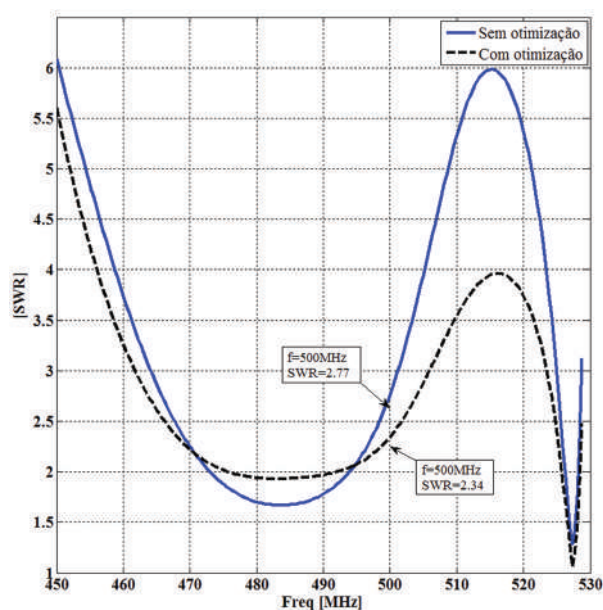


Figura 5.45 Comparação da variação do SWR da antena Yagi do Exemplo 5.6 antes e depois da otimização.

Na Figura 5.46 estão representados os diagramas de radiação da antena à frequência de 500MHz, antes e depois da otimização. Como se pode ver desta figura a diretividade prevista é de 12.14dBi para os dois casos. O valor desejado para o projeto era de 12.35dBi pelo que este é um valor bem aceitável. A maior diferença verifica-se para os valores da razão frente/trás que é cerca de 14.5dB antes da otimização e passa para cerca de 12.5dB depois da otimização continuando mesmo assim a ser um valor aceitável para uma antena deste tipo. Este caso mostra que quando se faz a otimização dum dado parâmetro há sempre outro que piora. Cabe ao projetista optar pela melhor solução de compromisso.

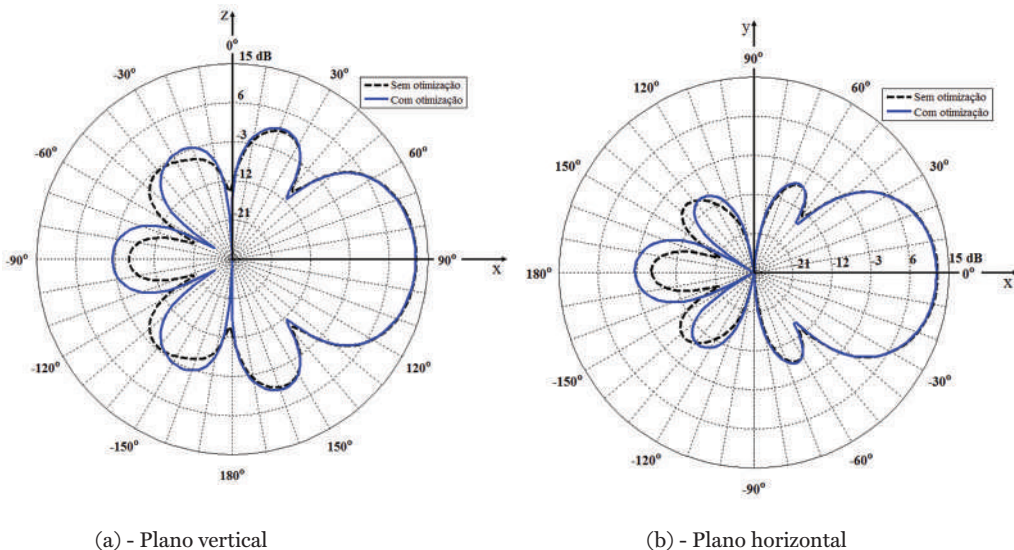


Figura 5.46 Diagramas de radiação da antena Yagi do Exemplo 5.6 antes e depois da otimização.

Exemplo 5.7

Pretende-se projetar uma antena Yagi-Uda para a frequência de 800MHz com uma diretividade de 15.55dBi, sendo os elementos feitos com tubo de 5mm de diâmetro e usando um dipolo dobrado como elemento ativo, centrado relativamente ao eixo da antena. A antena vai ser alimentada por uma linha de 75Ω.

Aplicando o *ProjetoYagi_DD.m* a este exemplo, obtém-se as seguintes dimensões para a antena:

Comprimento do Refletor= 179.6mm

Comprimento do Dipolo Ativo= 167.7mm

Espaçamento entre os centros dos tubos do Dipolo Ativo= 20mm

Espaçamento entre os tubos do Dipolo Ativo= 10mm

Espaçamento entre o Refletor e o Dipolo Ativo= 75mm

Espaçamento entre o Dipolo Ativo e o 1º Diretor igual

ao espaçamento entre Diretores= 75mm

Comprimento dos Diretores:

1º Diretor= 156mm

2º Diretor= 152mm

3º Diretor= 148mm

4º Diretor= 145mm

5º Diretor= 143mm

6º Diretor= 142mm

7º Diretor= 141mm

8º Diretor= 141mm

9º Diretor= 141mm

10º Diretor= 141mm

11º Diretor= 141mm

12º Diretor= 141mm

13º Diretor= 141mm

14º Diretor= 141mm

15º Diretor= 141mm

Comprimento total da antena= 1125mm

Na Figura 5.47 está ilustrada a geometria da antena.

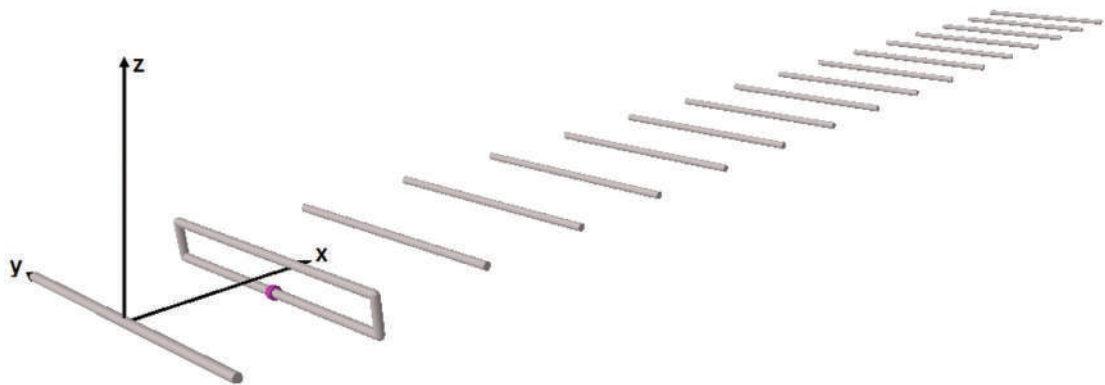


Figura 5.47 Geometria da antena Yagi do Exemplo 5.7.

Tal como no Exemplo 5.6, usando as funcionalidades de otimização do programa 4NEC2, otimizaram-se as dimensões do comprimento do refletor, do comprimento do dipolo ativo e da distância entre o refletor e o dipolo ativo, com o fim de reduzir o valor do SWR e de tornar a impedância de entrada real, à frequência de projeto. As novas dimensões passaram a ser as seguintes:

Comprimento do Refletor= 175.95mm

Comprimento do Dipolo Ativo= 149.7mm

Espaçamento entre o Refletor e o Dipolo Ativo= 75.7mm

Com esta otimização conseguiu-se uma significativa redução do SWR, tal como se pode observar na Figura 5.48 onde está ilustrada a comparação da variação do SWR, referido a 75Ω , na banda de frequências de 750 a 850MHz entre antes e depois da otimização. A impedância de entrada à frequência de 800MHz é $Z_{in} \cong 102-j3\Omega$ que é aproximadamente real. Também neste caso isso significa que algum tipo de adaptação deverá ser introduzido se a antena for alimentada por uma linha com impedância característica de 75Ω .

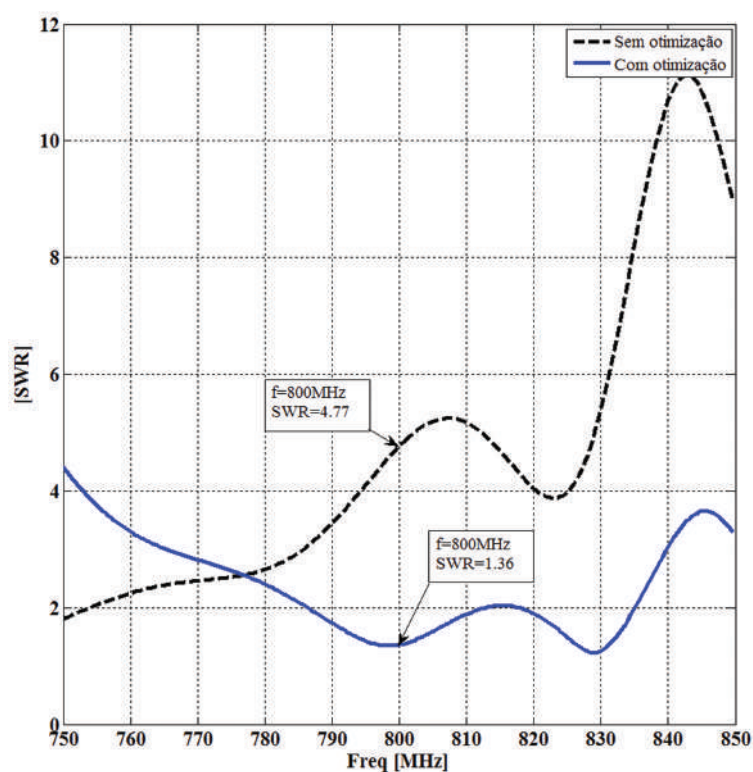


Figura 5.48 Comparação da variação do SWR da antena Yagi do Exemplo 5.7 antes e depois da otimização.

Na Figura 5.49 estão representados os diagramas de radiação da antena à frequência de 800MHz, antes e depois da otimização. Como se pode ver desta figura a diretividade prevista é de 15.25dBi para os dois casos. O valor desejado para o projeto era de 15.55dBi pelo que este é um valor bem aceitável. A razão frente/trás é cerca de 20dB que é um valor muito bom para uma antena deste tipo. Os dois diagramas são quase coincidentes pelo que neste caso valeu a pena fazer a otimização para melhorar o SWR.

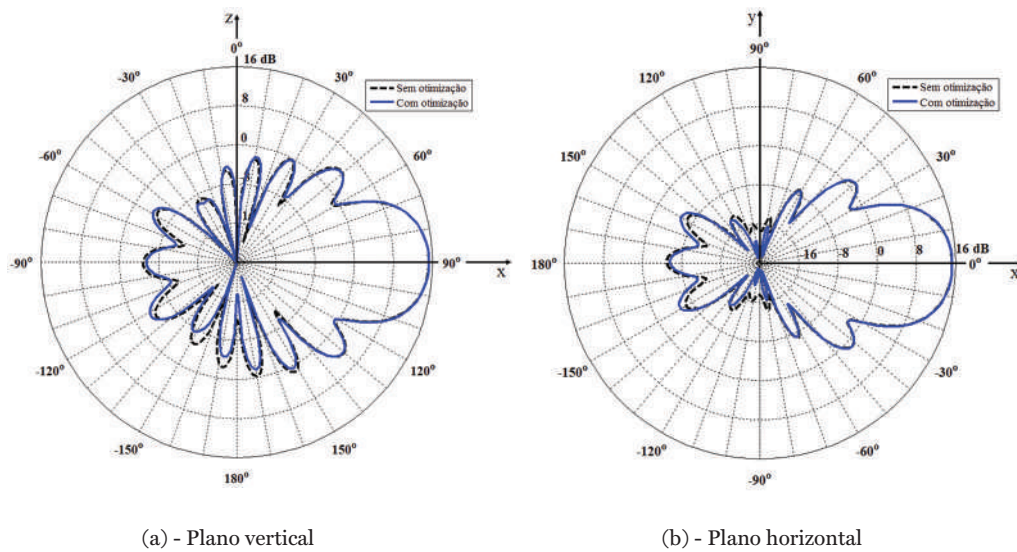


Figura 5.49 Diagramas de radiação da antena Yagi do Exemplo 5.7 antes e depois da otimização.

Na Figura 5.50 está representado o diagrama de radiação da antena em 3D à frequência de 800MHz, com realce para os cortes segundo os planos vertical e horizontal.

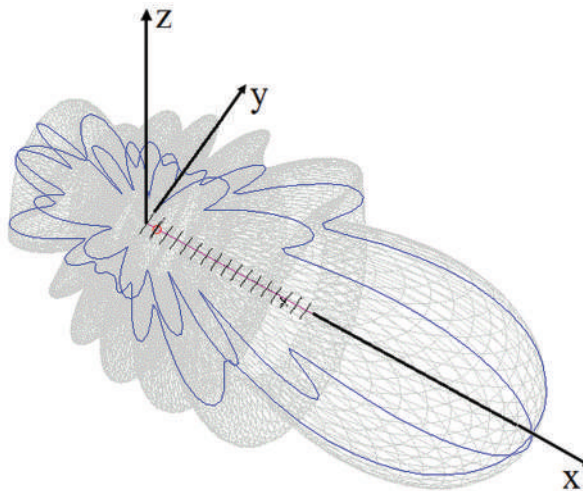


Figura 5.50 Diagrama de radiação em 3D da antena Yagi do Exemplo 5.7.

Exemplo 5.8

Atualmente em Portugal a difusão dos sinais de televisão é feita segundo a norma da Televisão Digital Terrestre (TDT). No continente a TDT é emitida maioritariamente no canal 56 que cobre a banda de 750 a 758MHz. Consideremos que se pretende projetar uma antena Yagi para este canal com uma diretividade de 11.35dBi, usando elementos feitos com tubo de 4mm de diâmetro e um dipolo dobrado como elemento ativo, centrado relativamente ao eixo da antena. A antena vai ser alimentada por uma linha de 75Ω.

Aplicando o *ProjetoYagi_DD.m* a este exemplo, obtém-se as seguintes dimensões para a antena:

Comprimento do Refletor= 191.4mm
 Comprimento do Dipolo Ativo= 180.2mm
 Diâmetro dos tubos= 4mm
 Espaçamento entre os centros dos tubos do Dipolo Ativo= 12mm
 Espaçamento entre os tubos do Dipolo Ativo= 8mm
 Espaçamento entre o Refletor e o Dipolo Ativo= 79.6mm
 Espaçamento entre o Dipolo Ativo e o 1º Diretor igual
 ao espaçamento entre Diretores= 79.6mm

Comprimento dos Diretores:

1º Diretor= 169mm
 2º Diretor= 167mm
 3º Diretor= 169mm

Comprimento total da antena= 238.8mm

Na Figura 5.51 está ilustrada a geometria da antena.

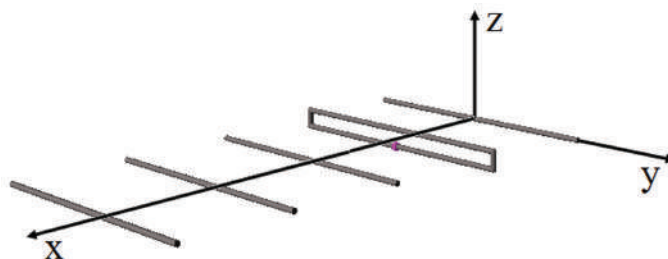


Figura 5.51 Geometria da antena Yagi do Exemplo 5.8.

Abaixo está o conteúdo do ficheiro apropriado para ser lido pelo programa 4NEC2 gerado pelo programa:

CM FICHEIRO apropriado para o 4NEC2

CM Antena Yagi com 5 elementos

CM Um Refletor, um Dipolo Ativo dobrado e 3 Diretores

CM O dipolo dobrado é colocado centrado

CM A frequência é de 754MHz

CM A diretividade pretendida é de 11.35dBi

CM

CE

SY LR=191.4

SY LDA=180.2

SY Esp_RDA=79.6

SY det=12

GW	1	13	0	-LR/2	0	0	LR/2	0	2
GW	2	13	Esp_RDA	-LDA/2	det/2	Esp_RDA	LDA/2	det/2	2
GW	3	1	Esp_RDA	-LDA/2	det/2	Esp_RDA	-LDA/2	-det/2	2
GW	4	1	Esp_RDA	LDA/2	det/2	Esp_RDA	LDA/2	-det/2	2
GW	5	13	Esp_RDA	-LDA/2	-det/2	Esp_RDA	LDA/2	-det/2	2
GW	6	11	159.2	-84.55	0	159.2	84.55	0	2

GW	7	11	238.8	-83.65	0	238.8	83.65	0	2
GW	8	11	318.4	-84.55	0	318.4	84.55	0	2
GS	0	0	0.001						
GE	0								
GN	-1								
EK									
EX	0	5	7	0	1	0	0		
FR	0	200	0	0	750	0.04			
EN									

Simulando esta antena pelo programa 4NEC2 obtém-se um SWR da ordem de 5. Usando as funcionalidades de otimização do programa 4NEC2, otimizaram-se as dimensões do comprimento do refletor, do comprimento do dipolo ativo e da distância entre o refletor e o dipolo ativo, com o fim de reduzir o valor do SWR, mas tentando não baixar muito a diretividade. As novas dimensões passaram a ser as seguintes:

Comprimento do Refletor= 196mm

Comprimento do Dipolo Ativo= 166mm

Espaçamento entre o Refletor e o Dipolo Ativo= 82mm

Com esta otimização conseguiu-se uma significativa redução do SWR que passou para cerca de 1.02, tal como se pode observar na Figura 5.52 onde está ilustrada a comparação da variação do SWR, referido a 75 Ω , na banda de frequências de 750 a 758MHz antes e depois da otimização. A impedância de entrada à frequência de 754MHz é $Z_{in} \cong 73.5\Omega$.

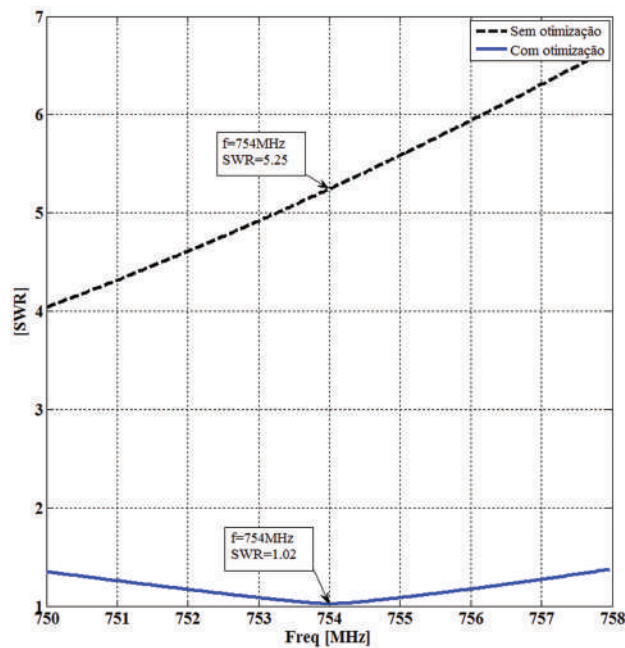


Figura 5.52 SWR da antena do Exemplo 5.8 antes e depois da otimização.

Na Figura 5.53 está ilustrada a comparação entre os diagramas de radiação da antena à frequência de 754MHz, nos planos vertical e horizontal antes e depois da otimização.

O valor da diretividade especificado para o projeto era de 11.35dBi. Como se pode ver desta figura a diretividade prevista pela simulação é de 11.22dBi antes da otimização, caindo cerca de 0.22dB com a otimização. Esta ligeira redução de diretividade foi claramente compensada pela significativa diminuição do SWR. A maior

diferença verifica-se para os valores da razão frente/trás que é cerca de 13dB antes da otimização e passa para cerca de 12dB depois da otimização continuando mesmo assim a ser um valor aceitável para uma antena deste tipo

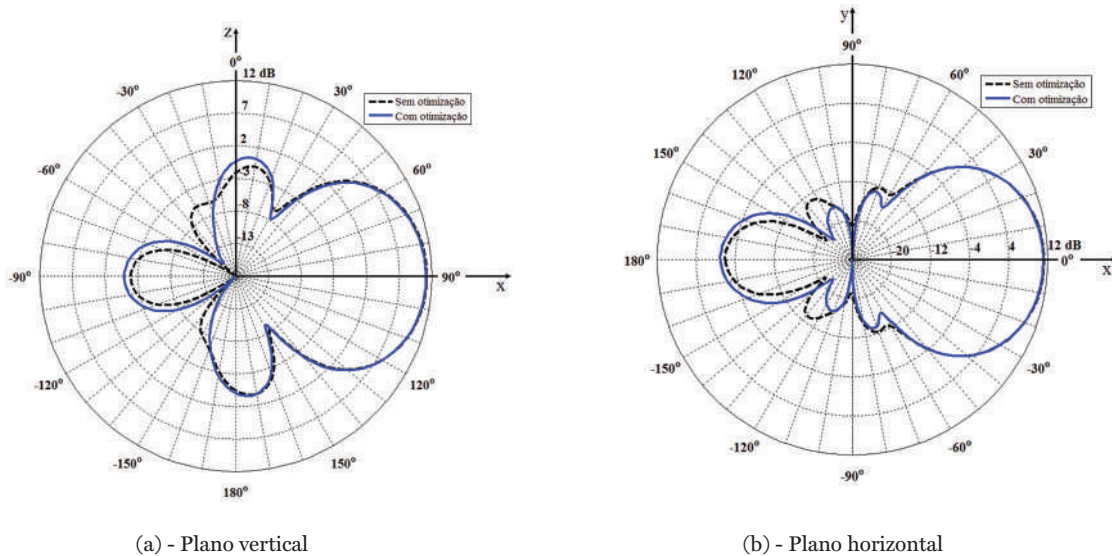
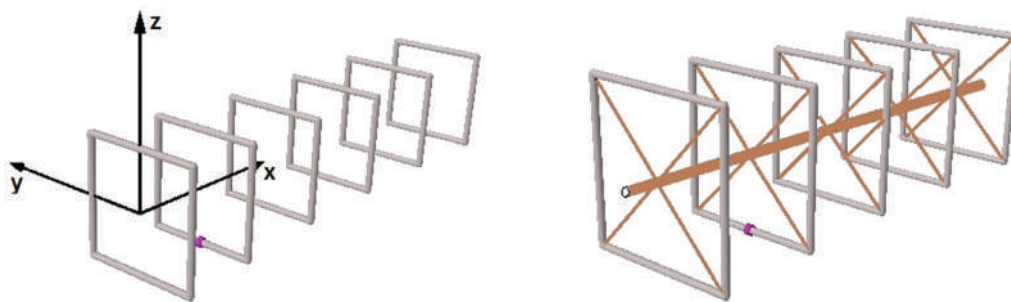


Figura 5.53 Diagramas de radiação da antena Yagi do Exemplo 5.8 antes e depois da otimização.

5.12.3 Antena Yagi com elementos em forma de aros quadrados

No capítulo 2 foi estudada a antena em forma de aro. Mostrou-se então que se as dimensões do perímetro do aro forem da ordem de um comprimento de onda o aro radia axialmente. Tendo em conta esta propriedade, pode-se construir uma antena do tipo Yagi em que em vez de dipolos se usam aros quadrados cujo perímetro seja da ordem do comprimento de onda, obedecendo à regra de o aro ativo ter um perímetro muito próximo desse valor, o aro refletor ter um perímetro um pouco maior e os aros diretores serem progressivamente mais pequenos.

Na Figura 5.54 (a) está ilustrada a geometria duma antena deste tipo. Normalmente os aros são montados numa cruz de tubos plásticos que por sua vez são fixados noutra tubo de maior diâmetro, como se ilustra na Figura 5.54 (b).



(a) Geometria genérica duma antena Yagi de aros quadrados.

(b) Modo habitual de fixar os aros.

Figura 5.54

O projeto duma antenna deste tipo pode seguir os mesmos passos dos que foram usados no projeto da antenna Yagi de dipolos, nomeadamente para determinar o espaçamento entre elementos. Em geral uma antenna Yagi de aros tem mais diretividade do que a sua equivalente feita com dipolos.

Exemplo 5.9

Em alguns locais de Portugal a TDT é emitida no canal 42 que cobre a banda de 638 a 646MHz. Pretende-se projetar uma antenna Yagi de aros para este canal com uma diretividade de 12.35dBi, usando aros feitos tubo de 8mm de diâmetro. A antenna vai ser alimentada por uma linha de 75Ω .

Com base no procedimento de projeto descrito anteriormente para as antenas Yagi de dipolos, o autor desenvolveu o *script* em Matlab designado por *ProjetoYagi_Aros_Corr1_VF.m* que permite fazer o projeto rápido de antenas Yagi de aros quadrados adaptando as suas dimensões de forma que os seus perímetros sejam da ordem do comprimento de onda.

Aplicando este *script* a este exemplo, obteve-se as seguintes dimensões para a antenna:

Comprimento do lado do aro Refletor= 135.1mm

Comprimento do lado do aro Ativo= 126.15mm

Espaçamento entre o aro Refletor e o aro Ativo= 93.5mm

Espaçamento entre o aro Ativo e o 1º aro Diretor igual

ao espaçamento entre aros Diretores= 116.8mm

Comprimento dos lados dos aros Diretores:

1º Aro Diretor= 117mm

2º Aro Diretor= 115mm

3º Aro Diretor= 115mm

4º Aro Diretor= 117mm

Esta antenna foi simulada pelo programa 4NEC2, tendo-se obtido um SWR bastante bom sobretudo na parte inferior da banda tal como se pode ver na Figura 5.55 (a). A diretividade está compreendida entre 12.5 e 13 dBi, um pouco melhor do que se pretendia e, com uma variação suave dentro da banda como se pode ver na Figura 5.55 (b).

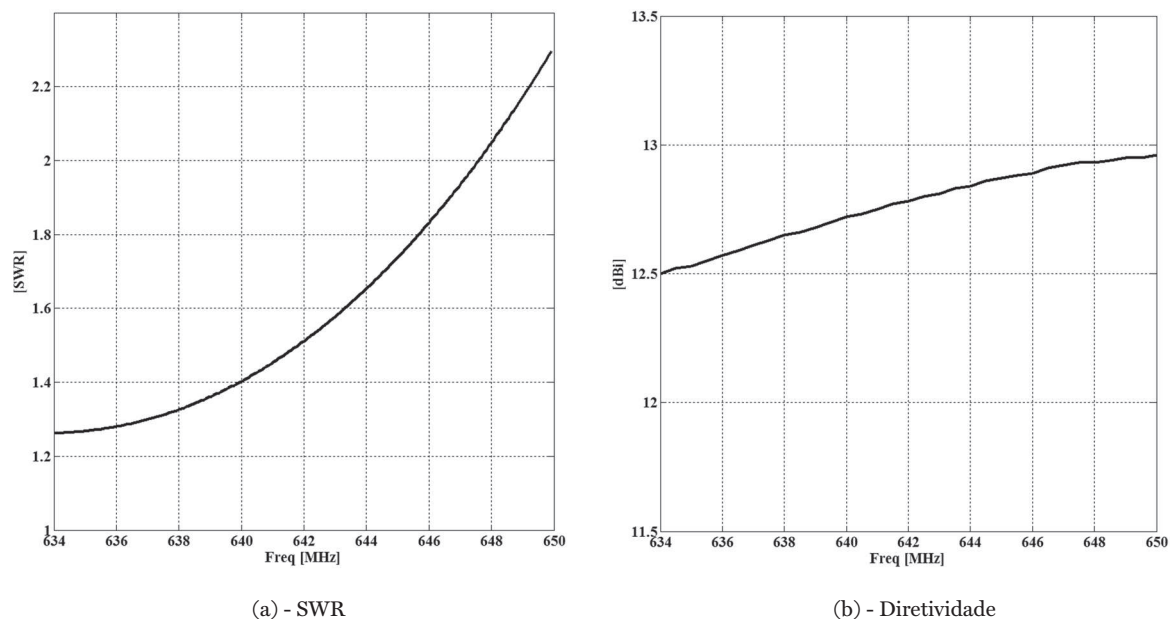


Figura 5.55 Características da antenna Yagi de aros quadrados do Exemplo 5.9, em função da frequência.

Na Figura 5.56 estão representados os diagramas de radiação nos planos horizontal e vertical à frequência de 642MHz e na Figura 5.57 está uma visualização 3D do diagrama de radiação, à mesma frequência com realce para os diagramas de radiação nos planos horizontal e vertical.

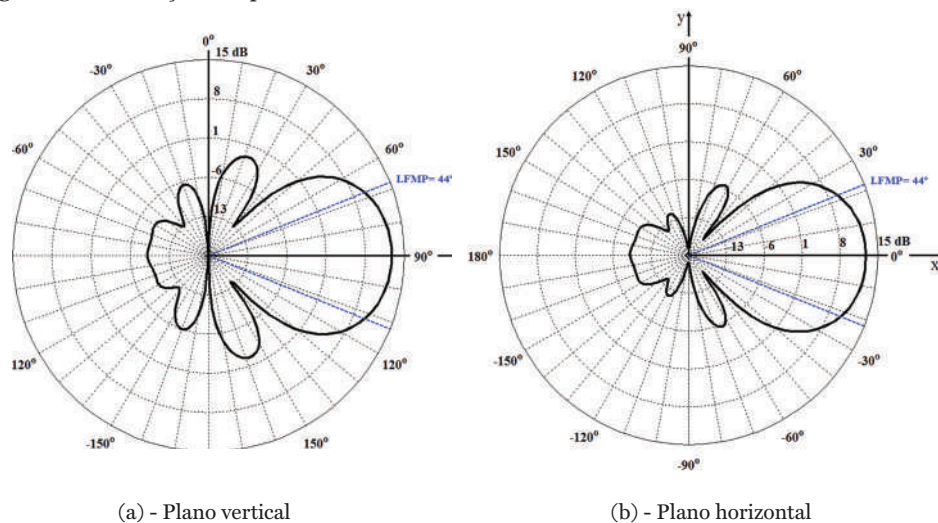


Figura 5.56 Diagramas de radiação do Exemplo 5.9 nos planos horizontal e vertical à frequência de 642MHz.

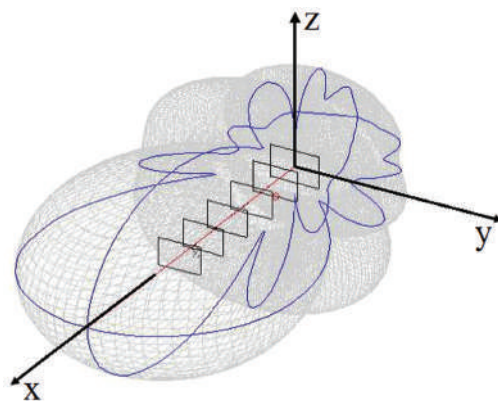


Figura 5.57 Diagrama de radiação em 3D da antena Yagi do Exemplo 5.9.

5.13 Antena Log-Periódica de dipolos

As antenas log-periódicas são geralmente englobadas na categoria das antenas independentes da frequência. Embora rigorosamente estas antenas não sejam independentes da frequência, são, no entanto, de banda larga e têm um desempenho que é periódico em função do logaritmo da frequência. Daí o nome de logarítmico-periódicas ou mais simplesmente log-periódicas.

Um estudo mais detalhado sobre antenas independentes da frequência e das antenas log-periódicas genéricas pode ser encontrado em [4] e [10]. Nesta secção será abordada apenas a antena log-periódica de dipolos, (ALPD).

5.13.1 Análise simplificada

Como se viu anteriormente a largura de banda dum dipolo cilíndrico é de cerca de 12%, que não é suficiente para muitas aplicações. Sendo assim, se quisermos usar uma gama larga de frequências usando dipolos teremos de usar vários separadamente ou ter um, mas com um mecanismo que de algum modo modificasse o seu comprimento de acordo com a frequência. Como é óbvio nenhuma destas soluções é prática ou até viável.

Uma alternativa em princípio mais realista é conceber um conjunto de vários dipolos de comprimentos diferentes alimentados pela mesma linha de transmissão, de modo que os mais pequenos funcionem às frequências mais altas e os maiores às frequências mais baixas, cobrindo-se deste modo uma banda larga de frequências. Esquematicamente esta implementação está ilustrada na Figura 5.58.

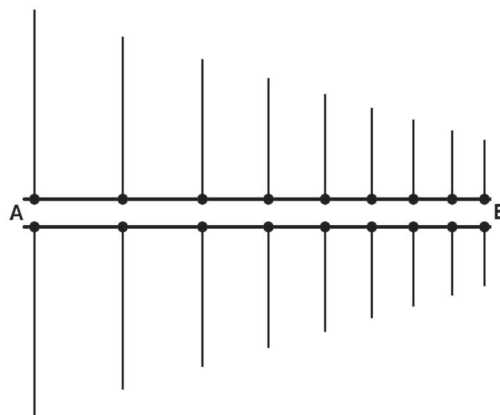


Figura 5.58 Estrutura básica inicial duma antena Log-Periódica de Dipolos.

Assumindo a possibilidade de usar a estrutura da Figura 5.58, a primeira questão que se coloca é de que lado se deve alimentar os dipolos. Pelo lado A ou pelo lado B?

Consideremos que se está a usar frequência central da banda. Então os dipolos ativos serão um a três, situados aproximadamente no centro, e que terão um comprimento de cerca de $\lambda/2$ a essa frequência. Para os alimentar é necessário fazer chegar energia à zona central da estrutura. Já vimos anteriormente na Figura 5.12 e na Figura 5.13 que a impedância de entrada de dipolos de comprimento inferior a $\lambda/2$ é de natureza capacitiva enquanto que a impedância de entrada de dipolos de comprimento um pouco superior a $\lambda/2$ é de natureza indutiva. Tendo isto em consideração, isso significa que se alimentarmos a linha pelo lado dos dipolos mais curtos, isto é, pelo lado B, a linha entre esse ponto e os dipolos a alimentar tem cargas em paralelo, capacitivas e no início até bastante elevadas. Tendo em conta o modelo duma linha de transmissão que é formado por uma capacidade distribuída ao longo da linha, estas cargas não vão perturbar a natureza da linha que continuará a ser essencialmente uma linha de transmissão embora com a capacidade distribuída modificada que se traduzirá pela diminuição da velocidade de propagação da energia. Ou seja, alimentando a linha pelo lado dos dipolos mais curtos, a energia chegará seguramente aos dipolos ativos.

Em contrapartida, se alimentarmos a linha pelo lado dos dipolos mais compridos, isto é, pelo lado A, a linha entre esse ponto e os dipolos a alimentar tem cargas em paralelo, em geral indutivas. Estas cargas vão perturbar a natureza da linha que perderá as características duma linha de transmissão pelo que, alimentando a linha pelo lado dos dipolos mais compridos, a energia não chegará duma forma eficiente aos dipolos ativos.

Tendo sido esclarecido o modo de alimentar uma antena do tipo ilustrado na Figura 5.58, analisemos agora o modo como ela radiaria. A uma dada frequência é de supor que haverá um a três dipolos ativos com um comprimento de cerca de $\lambda/2$ separados entre si de cerca de $\lambda/4$ a essa frequência, tal como se ilustra na Figura 5.59.

Consideremos a radiação longitudinal, no sentido dos dipolos mais curtos, ponto P e no sentido dos dipolos mais compridos, ponto Q.

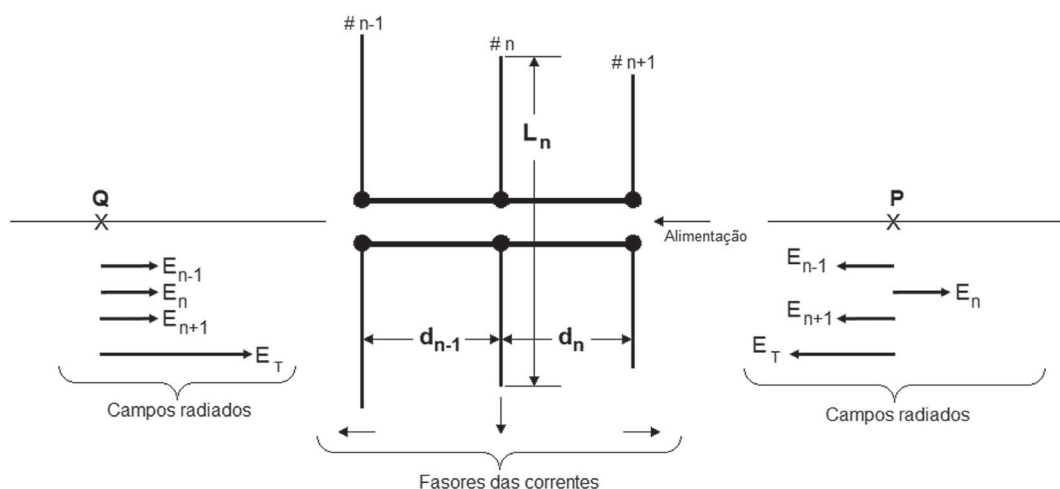


Figura 5.59 Como radia a zona ativa da antena Log-Periódica de Dipolos se for usada a alimentação ilustrada.

Devido à alimentação usada, as correntes nos três dipolos ativos podem ser representadas pelos fasores indicados na figura por baixo dos respectivos dipolos. Consideremos primeiro a radiação no ponto P. O primeiro campo a chegar ao ponto P é o campo radiado pelo dipolo $n+1$ que suponhamos é representado por E_{n+1} . O segundo campo a chegar ao ponto P é o campo radiado pelo dipolo n . Devido à distância de $\lambda/2$ que tem que percorrer a mais, deveria estar em atraso de 90° , mas como a corrente no dipolo n está atrasada de 90° relativamente à corrente no dipolo $n+1$, o campo devido ao dipolo n , está em oposição de fase com o campo radiado pelo dipolo $n+1$. Finalmente o terceiro campo a chegar ao ponto P é o campo radiado pelo dipolo $n-1$. Devido à distância de λ que tem que percorrer a mais, deveria estar desfasado de 180° , mas como a corrente no dipolo $n-1$ está em oposição de fase com a corrente no dipolo $n+1$, o campo devido ao dipolo $n-1$ está em fase com o campo radiado pelo dipolo $n+1$. O campo resultante não se cancela totalmente mas também não há um reforço completo, tal como se representa na Figura 5.59.

Consideremos agora a radiação no ponto Q. Aplicando um raciocínio semelhante ao anterior é fácil concluir que a radiação dos dipolos ativos nesse ponto é caracterizada pela coincidência de fase dos campos radiados pelos três dipolos. O campo resultante no ponto Q reforça-se totalmente, tal como se representa na Figura 5.59.

A maior radiação vai então na direção dos dipolos mais compridos que se comportam como refletores dificultando a progressão da radiação nesse sentido. A radiação é, portanto, pouco eficiente.

Perante esta conclusão tornou-se imperioso fazer com que a radiação máxima seja na direção dos dipolos mais curtos que além de perturbarem menos a radiação até podem funcionar como diretores à semelhança do que acontece na antena Yagi. Para conseguir esse objetivo, alternou-se a alimentação dos dipolos tal como se ilustra na Figura 5.60.

Aplicando um raciocínio semelhante ao caso anterior é fácil concluir que a radiação dos dipolos ativos no ponto P é agora caracterizada pela coincidência de fase dos campos radiados pelos três dipolos. O campo resultante no ponto P reforça-se totalmente, tal como se representa na Figura 5.60. A maior radiação vai então na direção dos dipolos mais curtos, tal como se pretendia, facilitando a progressão da radiação nesse sentido. A radiação é, portanto, bastante eficiente.

No ponto Q o campo resultante é menos intenso indo na direção dos dipolos mais compridos que se comportam como refletores dificultando a progressão da radiação nesse sentido. Sobrepondo os dois efeitos obtém-se assim uma antena que radia numa forma eficiente no sentido dos dipolos mais curtos.

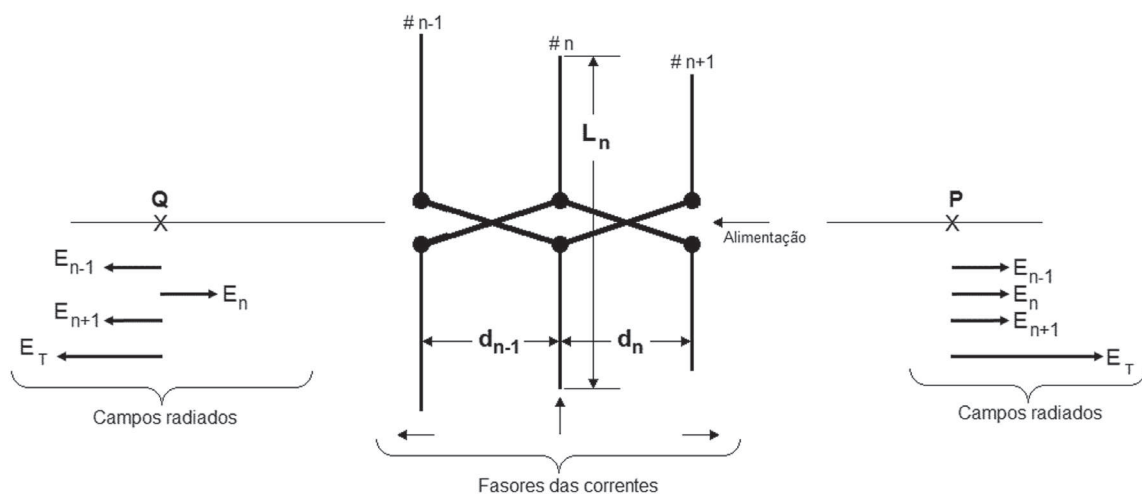


Figura 5.60 Como radia a zona ativa da antena Log-Periódica de Dipolos se for usada a alimentação correta.

A configuração correta duma Antena Log-Periódica de Dipolos é, portanto a que está ilustrada na Figura 5.61. À frequência mais baixa da banda funcionam os dipolos mais compridos e à frequência mais alta os dipolos mais curtos. Para a radiação ser eficiente, à frequência de operação o dipolo ativo deve ter um comprimento de cerca de $\lambda/2$ e estar a uma distância de aproximadamente $\lambda/4$ dos seus dois vizinhos. Isto significa que fisicamente os dipolos mais compridos estão mais afastados e os dipolos mais curtos mais próximos dando à estrutura da antena o aspeto ilustrado na Figura 5.61.

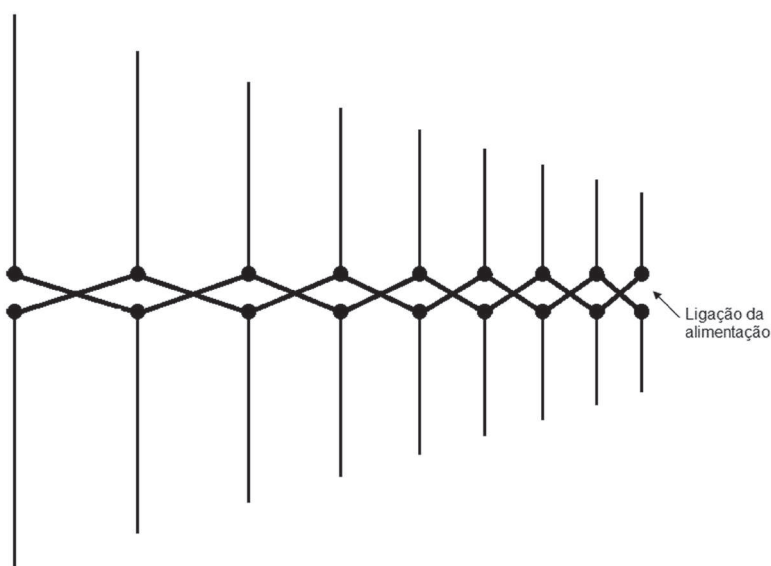


Figura 5.61 Antena Log-Periódica de Dipolos na configuração correta.

As dimensões duma antena deste tipo são fundamentalmente impostas por razões práticas. De facto, é impraticável ter dipolos curtos de alguns milímetros e ao mesmo tempo dipolos compridos de dezenas de metros. Há que chegar a uma solução de compromisso para a banda de frequências que se quer utilizar.

5.13.2 Análise detalhada

Esta análise é baseada nos trabalhos de Carrel [8],[9].

Na Figura 5.62 está representado o esquema básico duma ALPD. Os principais parâmetros desta antena são o fator de escala τ , o fator de espaçamento σ e o ângulo α . Este ângulo depende de τ e σ e define os extremos dos dipolos a partir do vértice virtual.

Desta figura obtém-se as relações da equação (5-82).

$$\tan \alpha = \frac{L_1/2}{R_1} = \frac{L_n/2}{R_n} = \frac{L_{n+1}/2}{R_{n+1}} \quad (5-82)$$

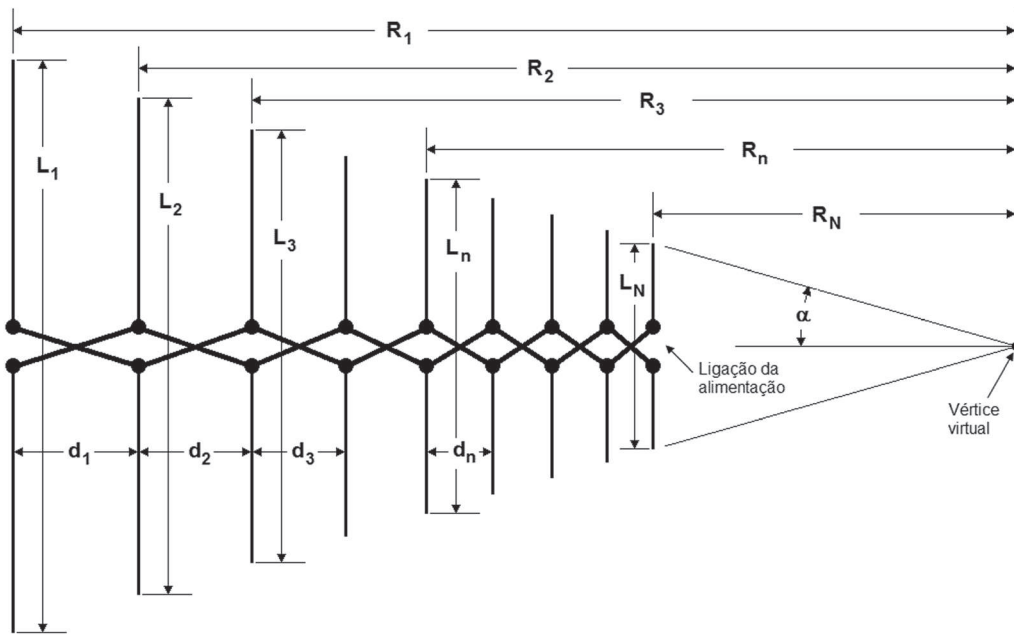


Figura 5.62 Antena Log-Periódica de Dipolos com as dimensões relevantes.

Da equação (5-82) podem-se obter as relações que constam da equação (5-83):

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{R_{n+1}}{R_n} \quad (5-83)$$

Definindo fator de escala como:

$$\tau = \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{R_{n+1}}{R_n} \quad (5-84)$$

isso implica que $L_{n+1} = \tau L_n$ e $R_{n+1} = \tau R_n$. Então pode-se afirmar que os comprimentos dos sucessivos dipolos formam uma progressão geométrica de razão $\tau < 1$. O mesmo acontece às sucessivas distâncias dos dipolos ao vértice virtual.

Da mesma forma se considerarmos a razão $\frac{d_{n+1}}{d_n}$, atendendo à Figura 5.62 e às relações anteriores, podemos deduzir que

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{R_{n+1} - R_{n+2}}{R_n - R_{n+1}} = \frac{R_{n+1} - \tau R_{n+1}}{R_n - \tau R_n} = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \tau.$$

Então, tal como acontece com os comprimentos dos sucessivos dipolos e das suas distâncias ao vértice virtual, também as separações sucessivas formam uma progressão geométrica de razão τ .

A experiência mostra que os valores mais comuns para o fator de escala τ variam entre 0.81 e 0.95.

Para a frequência mais baixa f_1 , isto é, para o comprimento de onda λ_1 o comprimento do maior dipolo deve ser $L_1 \cong \frac{\lambda_1}{2}$.

Do mesmo modo, para a frequência mais alta f_N , isto é, para o comprimento de onda λ_N o comprimento do menor dipolo deve ser $L_N \cong \frac{\lambda_N}{2}$. Dum modo geral tem-se $\lambda_1 \cong 2L_1$; $\lambda_2 \cong 2L_2$; $\lambda_n \cong 2L_n$.

Estas últimas relações conduzem às que estão na equação (5-85):

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{L_{n+1}}{L_n} = \tau \Rightarrow \frac{f_n}{f_{n+1}} = \tau \quad \text{com } f_n < f_{n+1} \quad (5-85)$$

Fazendo o logaritmo da equação anterior tem-se:

$$\log(f_{n+1}) = \log(f_n) + \log\left(\frac{1}{\tau}\right) \quad (5-86)$$

A relação anterior exibe um carácter periódico na forma logarítmica e daí o nome de antena log-periódica. Carrel [8],[9] define fator de espaçamento como sendo:

$$\sigma = \frac{d_n}{2L_n} \quad (5-87)$$

Esta equação pode ser modificada como a seguir se indica, de modo a obter uma relação entre os parâmetros τ , σ e α que estão relacionados pela geometria da Figura 5.62. De facto, pode-se alterar (5-87) de modo a obter a seguinte equação:

$$\sigma = \frac{d_n}{2L_n} = \frac{R_n - R_{n+1}}{2L_n} = \frac{1 - \tau}{2} \frac{R_n}{L_n} \quad (5-88)$$

Recorrendo à equação (5-82), obtém-se:

$$\sigma = \frac{(1 - \tau)}{4} \cot \alpha \quad (5-89)$$

5.13.3 Projeto duma ALPD

Nesta secção vai-se descrever um método de projeto de antenas log-periódicas de dipolos que é baseado no procedimento usado por Balanis [4] que por sua vez segue o método referido por Carrel [8],[9].

A geometria ilustrada na Figura 5.61, é apropriada para antenas que são feitas com condutores flexíveis suportados por uma estrutura auxiliar apropriada. Isso ocorre com antenas para baixas frequências como por exemplo as usadas em comunicações em HF.

As ALPD usadas em VHF e UHF são geralmente construídas com condutores cilíndricos rígidos formando uma estrutura auto suportada. Nesse caso o modo de desfazar as correntes nos diversos dipolos é conseguido recorrendo à geometria ilustrada na Figura 5.63. Nestas antenas a linha de alimentação é feita com tubos ocos de secção cilíndrica ou quadrada. Aproveita-se este facto para enfiar o cabo coaxial de alimentação por dentro dum dos tubos, ligando a malha do cabo a esse tubo e o condutor interior do cabo ao outro tubo da linha. Para além se ser uma solução muito prática, esta montagem constitui uma transição adequada entre a linha de alimentação,

que é balanceada e o cabo coaxial, que é não balanceado. Uma estrutura que desempenha esta função designa-se por **BALUN** cujo nome deriva das palavras **BAL**anced e **UN**balanced. Este assunto será aprofundado mais à frente neste capítulo. O detalhe desta forma de alimentação está ilustrado na Figura 5.63.

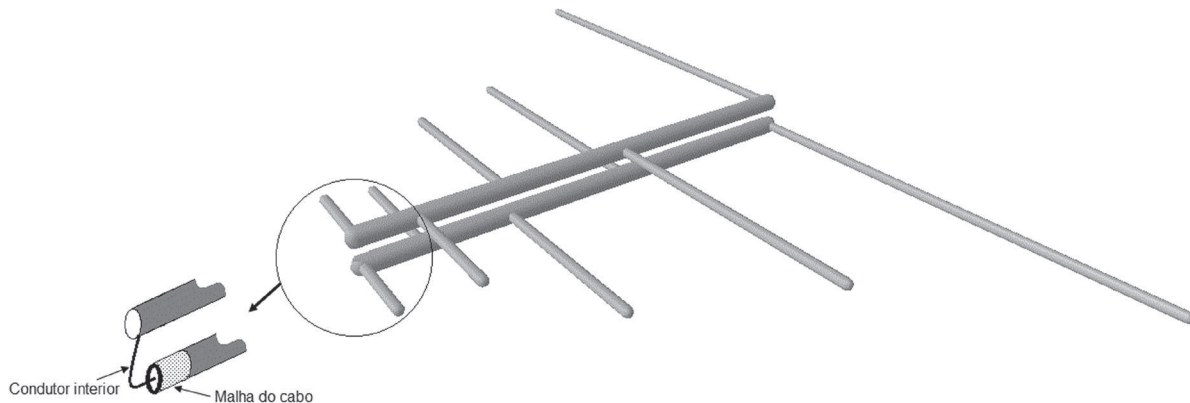


Figura 5.63 Antena Log-Periódica de Dipolos auto suportada alimentada por um cabo coaxial.

Procedimento passo a passo

1. Dados de entrada

Os dados de entrada são os seguintes:

- Diretividade pretendida;
- Frequência inferior e superior da banda;
- Diâmetro dos tubos dos dipolos;
- Diâmetro dos tubos da linha de alimentação;
- Resistência de entrada desejada.

2. Determinação do τ ótimo

Carrel mostrou no seu trabalho que para uma dada diretividade há um par (τ, σ) de valores ótimos. As relações entre estes parâmetros são apresentadas através de gráficos de contorno de várias diretvidades no plano (τ, σ) .

A partir dos valores destes gráficos é possível obter por regressão linear (*fitting*) uma expressão que relaciona o τ ótimo com a diretividade em dBi. A expressão é um polinómio do terceiro grau.

Posteriormente alguns investigadores verificaram que os valores de diretividade estavam sobredimensionados. Este assunto é abordado por Warren e Stutzman [10] que propõem um novo gráfico com valores de diretividade mais realistas.

Efetivamente, as antenas projetadas com os valores de Carrel, quando simuladas apresentam diretvidades inferiores à pretendida. O autor verificou, através de resultados de várias simulações que os melhores resultados se obtêm com valores intermédios entre os de Carrel e os de Warren e Stutzman.

Usando valores intermédios entre os de Carrel e os de Warren e Stutzman, o polinómio que permite determinar o τ ótimo conhecida a diretividade é dado pela equação (5-90):

$$\tau = 0.00109D^3 - 0.03712D^2 + 0.43082D - 0.7509 \quad (5-90)$$

3. Determinação do σ ótimo

O σ ótimo também pode ser obtido do τ ótimo por regressão linear partir dos valores destes gráficos. A relação entre o σ ótimo e o τ ótimo é linear sendo aproximadamente dada pela equação (5-91):

$$\sigma = 0.25 \tau - 0.059 \quad (5-91)$$

4. Determinação do ângulo α

O ângulo α pode ser calculado recorrendo à equação (5-92) obtida de (5-89).

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1-\tau}{4\sigma}\right) \quad (5-92)$$

5. Determinação da largura de banda efetiva B_s

A largura de banda pretendida B é dada pela razão $B = f_{\max}/f_{\min}$. No entanto para se ter a certeza de que a antena funcionará nessa banda é conveniente usar no projeto uma largura de banda um pouco superior para garantir que nas frequências extremas a região ativa não fique reduzida a apenas um dipolo. Carrel [8] e [9] sugere um fator empírico B_{ar} , a que chamou largura de banda da região ativa, dado pela relação (5-93):

$$B_{ar} = 1.1 + 7.7 (1 - \tau)^2 \cot \alpha \quad (5-93)$$

Com este fator B_{ar} a largura efetiva B_s de projeto é dada por $B_s = B B_{ar}$.

6. Determinação do comprimento L da antena

Da Figura 5.62 vê-se que o comprimento da antena é $L = R_1 - R_N$.

Tendo em conta (5-82), podemos escrever $L = \frac{(L_1 - L_N)}{2 \tan \alpha}$, mas de (5-85) $L_1 = \frac{\lambda_{\max}}{2}$ e $L_N = \frac{\lambda_{\min}}{2}$. A largura efetiva $B_s = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$.

Usando estas últimas relações pode-se então obter para o comprimento da antena a expressão (5-94):

$$L = \frac{\lambda_{\max}}{4} \left(1 - \frac{1}{B_s}\right) \cot \alpha \quad (5-94)$$

7. Determinação do número N de dipolos

De (5-85) conclui-se que $\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{1}{\tau^{N-1}}$. Como $B_s = \frac{f_{\max}}{f_{\min}}$ então, $B_s = \frac{1}{\tau^{N-1}}$.

Tomando o logaritmo de ambos os termos desta equação, facilmente obtemos a relação (5-95) para o número N de dipolos.

$$N = 1 - \frac{\log(B_s)}{\log(\tau)} \quad (5-95)$$

8. Determinação da impedância característica Z_0 da linha de alimentação

Carrel [8],[9] mostrou que a impedância característica Z_0 da linha de alimentação dos dipolos, depende da resistência de entrada R_{in} pretendida, da impedância característica média Z_a dos dipolos e dos parâmetros τ e σ . A impedância característica Z_0 é dada pela expressão (5-96):

$$Z_0 = \frac{R_n^2}{8\sigma' Z_a} \left(1 + \sqrt{\left(\frac{8\sigma' Z_a}{R_n} \right)^2} \right) \quad (5-96)$$

Com Z_a dada pela expressão (5-97):

$$Z_a = 120 \left[\ln \left(\frac{L_n}{d} \right) - 2.25 \right] \quad (5-97)$$

Nota: Nesta relação, d representa o diâmetro dos dipolos. Em rigor o dipolo mais comprido deveria ser mais grosso, o seguinte um pouco mais fino e assim sucessivamente até ao dipolo mais curto que deveria ter o diâmetro mais fino, mantendo-se assim constante a razão $\frac{L}{d}$.

No entanto por facilidade de construção normalmente usa-se o mesmo diâmetro para todos os dipolos. Sendo assim, em (5-97) temos que escolher um L_n . Por uma questão de lógica considerou-se mais conveniente usar o comprimento do dipolo central.

O parâmetro σ' foi designado por Carrel como o fator de espaçamento médio e é dado pela expressão (5-98):

$$\sigma' = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} \right) \quad (5-98)$$

9. Determinação da distância entre os centros dos tubos da linha de alimentação

Conhecida a impedância característica Z_0 da linha de alimentação dos dipolos, pela teoria das linhas de transmissão, pode-se determinar a distância s entre os centros dos tubos da linha pela expressão (5-99):

$$s = d_L \cosh \left(\frac{Z_0}{120} \right) \quad (5-99)$$

em que d_L é o diâmetro dos tubos da linha de alimentação.

Com base no procedimento anterior, o autor elaborou um *script* em Matlab que permite o projeto rápido de antenas ALPD. Este *script* designado por *ProjetoALPD.m* dá as dimensões relevantes, o desenho da antena e ainda gera um texto apropriado para ser lido por programas de cálculo que usam o código NEC. De seguida apresentam-se alguns exemplos de projeto de ALPD e os respetivos resultados obtidos pelo simulador 4NEC2.

5.13.4 Exemplos de projeto de ALPD

Exemplo 5.10

Pretende-se projetar uma ALPD para a banda de VHF de 170 a 230 MHz com uma diretividade de 8dBi. Os dipolos serão construídos com tubo de 10mm de diâmetro e a linha de alimentação, onde estão ligados os dipolos, será feita com tubos de 20mm de diâmetro. Pretende-se ainda que a resistência de entrada seja de 75Ω para a adequada alimentação da antena com um cabo coaxial de com 75Ω de impedância característica.

Usando o *script ProjetoALPD.m* começa-se por introduzir os seguintes dados de entrada:

- Escreva a diretividade pretendida em dBi, $D=8$
- Escreva a frequência inferior em MHz, $f_{\min}=170$
- Escreva a frequência superior em MHz, $f_{\max}=230$
- Escreva o diâmetro dos tubos em mm, $d=10$
- Escreva o diâmetro dos tubos da linha de alimentação em mm, $dL=20$
- Escreva a impedância de entrada pretendida em Ohm, $R_{in}=75$

Após isto obtém-se os seguintes resultados: Fator de escala $\tau=0.8825$, fator de espaçamento $\sigma=0.1607$, $\alpha=10.35^\circ$ e o número de dipolos $N=8$. O comprimento do dipolo maior é igual a metade do maior comprimento de onda, isto é, $L_1=882\text{mm}$ e os comprimentos dos restantes podem ser obtidos usando a relação (5-100):

$$L_n = L_1 \tau^{(n-1)} \quad \text{com} \quad n = 2 \text{ a } N \quad (5-100)$$

O espaçamento d_1 entre o 2º e o 1º dipolo é dado pela relação (5-101):

$$d_1 = \frac{L_1 - L_2}{2 \tan \alpha} \quad (5-101)$$

Os restantes espaçamentos podem ser obtidos pela relação (5-102):

$$d_n = d_1 \tau^{(n-2)} \quad \text{com} \quad n = 2 \text{ a } N \quad (5-102)$$

Com estes dados as dimensões da antena são as seguintes:

Dipolo Nº	Comprimento (mm)	Espaçamento (mm) entre os dipolos N e N-1
1	882	----
2	779	284
3	687	250
4	607	221
5	535	195
6	472	172
7	417	152
8	368	134

A distância entre os centros dos tubos da linha de alimentação é de 27mm. A distância entre as faces dos tubos é portanto de 7mm.

Na Figura 5.64 está ilustrada a geometria da antena.

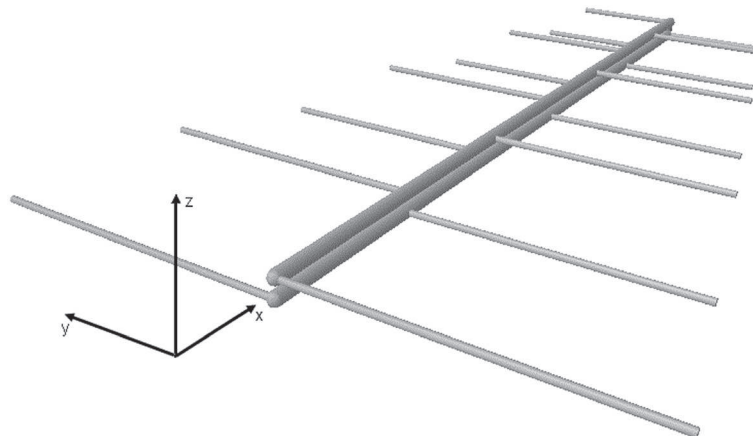


Figura 5.64 Geometria da antena LPD do Exemplo 5.10.

Esta antena foi simulada no software 4NEC2, usando como ficheiro de entrada o que foi gerado no programa de projeto.

Na Figura 5.65 (a) está representada a diretividade e na Figura 5.65 (b) está representado o SWR, da antena do Exemplo 5.10, ambos em função da frequência na banda de projeto.

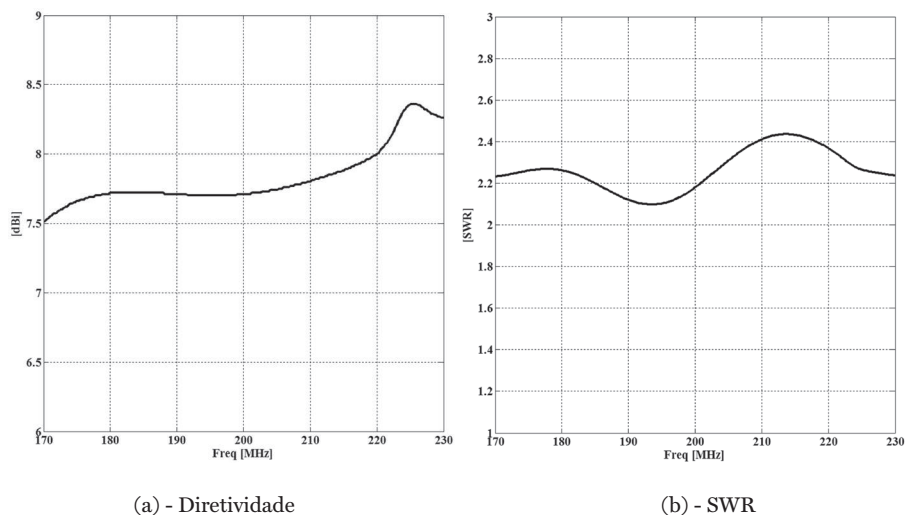


Figura 5.65 Diretividade e SWR da antena do Exemplo 5.10 em função da frequência.

Da Figura 5.65 (a) vê-se que a diretividade é aproximadamente 8dBi em toda a banda como se pretendia e da Figura 5.65 (b) verifica-se que o SWR varia entre 2.1 e 2.4. Embora fosse desejável que fosse inferior a 2, mesmo assim é um valor muito aceitável para o tipo de aplicação a que se destinam este tipo de antenas.

Na Figura 5.66 (a) estão representados os diagramas de radiação no plano vertical às frequências de 170 e 230MHz. O plano vertical é o plano (x,z), plano $\phi=0^\circ$ ou ainda plano H. Na Figura 5.66 (b) estão representados os diagramas de radiação no plano horizontal às frequências de 170 e 230MHz. O plano horizontal é o plano da antena, plano (x,y), plano $\theta=90^\circ$ ou ainda plano E.

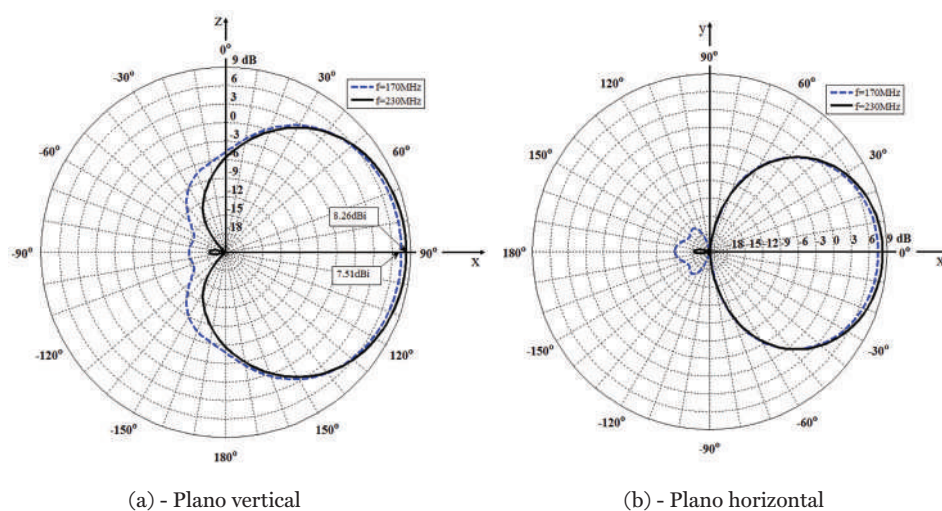


Figura 5.66 Diagramas de radiação nos planos vertical e horizontal, da antena do Exemplo 5.10 às frequências de 170MHz e 230MHz.

Na Figura 5.67 estão representados os diagramas de radiação nos planos vertical e horizontal à frequência de 200MHz e na Figura 5.68 está uma visualização 3D do diagrama de radiação à mesma frequência, com realce para os diagramas de radiação nos planos horizontal e vertical.

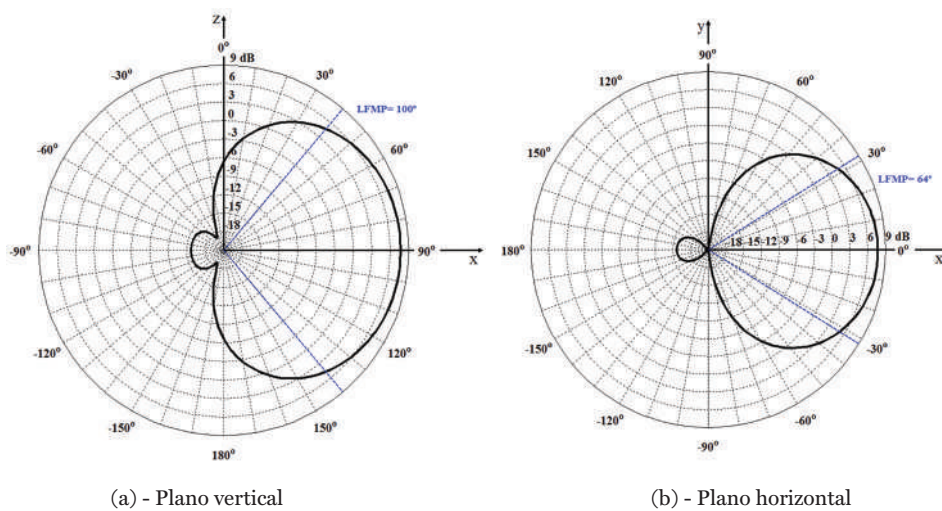


Figura 5.67 Diagramas de radiação da antena do Exemplo 5.10 nos planos horizontal e vertical à frequência de 200MHz.

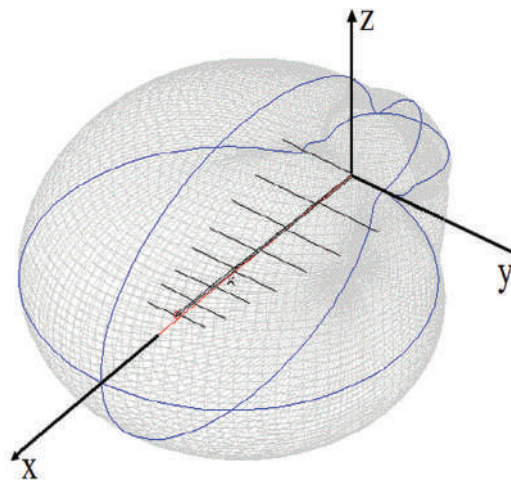


Figura 5.68 Diagrama de radiação em 3D da antena do Exemplo 5.10 à frequência de 200MHz.

A largura de feixe a meia potência LFMP no plano vertical é aproximadamente de 100° e a LFMP no plano horizontal é cerca de 64° . A razão frente/trás é cerca de 24dB à frequência de 170MHz e cerca de 26dB à frequência de 230MHz. Tendo em conta todos estes resultados é de esperar globalmente um bom desempenho desta antena.

Exemplo 5.11

Pretende-se projetar uma ALPD para a banda de VHF de 150 a 300 MHz com uma diretividade de 10dBi. Os dipolos e a linha de alimentação, onde eles estão ligados, serão feitos com tubos de 10mm de diâmetro. Pretende-se ainda que a resistência de entrada seja de 75Ω para a adequada alimentação da antena com um cabo coaxial de com 75Ω de impedância característica.

Usando o *script* *ProjetoALPD.m* obtém-se os seguintes resultados: Fator de escala $\tau=0.9324$, fator de espaçamento $\sigma=0.1732$, $\alpha=5.57^\circ$ e o número de dipolos $N=17$. O comprimento do dipolo maior é igual a metade do maior comprimento de onda, isto é, $L_1=1000\text{mm}$ e os comprimentos dos restantes podem ser obtidos usando a relação (5-100).

O espaçamento d_1 entre o 2º e o 1º dipolo é dado pela relação (5-101) e é igual a 346mm. Os restantes espaçamentos podem ser obtidos pela relação (5-102).

A distância entre os centros dos tubos da linha de alimentação é de 13.3mm. A distância entre as faces dos tubos é portanto de 3.3mm.

Na Figura 5.69 está ilustrada a geometria da antena.

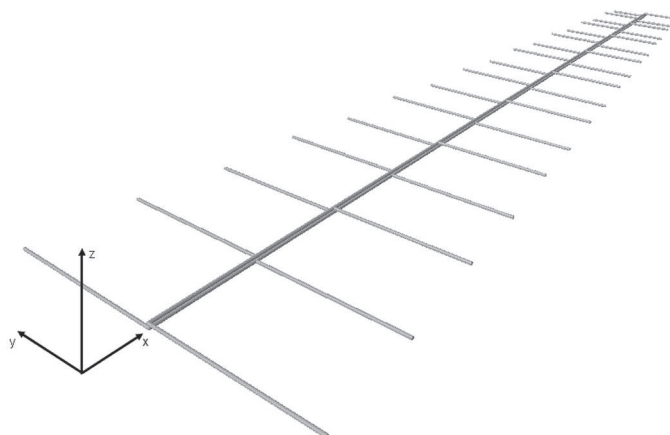


Figura 5.69 Geometria da antena LPD do Exemplo 5.11.

Esta antena foi simulada no software 4NEC2, usando como ficheiro de entrada o que foi gerado no programa de projeto.

Na Figura 5.70 (a) está representada a diretividade e na Figura 5.70 (b) está representado o SWR, ambos em função da frequência na banda de projeto.

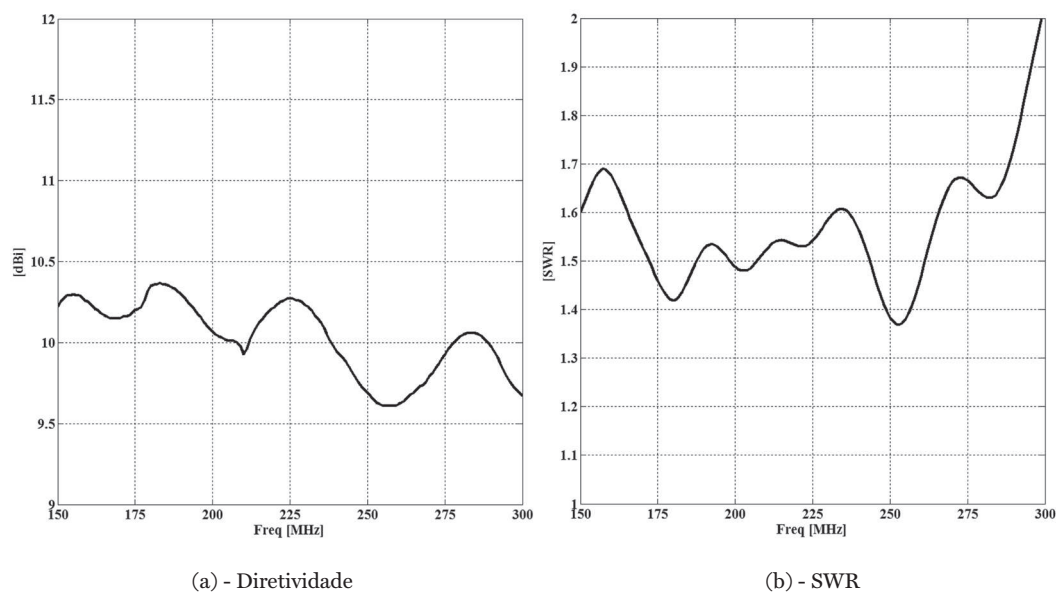


Figura 5.70 Diretividade e SWR da antena do Exemplo 5.11 em função da frequência.

Da Figura 5.70 (a) vê-se que a diretividade é aproximadamente 10dBi em toda a banda como se pretendia. Da Figura 5.70 (b) verifica-se que o SWR é sempre inferior a 2 que é o desejável por ser o critério normalmente aceite como significando boa adaptação.

Na Figura 5.71 (a) estão representados os diagramas de radiação no plano vertical às frequências de 150 e 300MHz. O plano vertical é o plano (x,z), plano $\phi=0^\circ$ ou ainda plano H. Na Figura 5.71 (b) estão representados os diagramas de radiação no plano horizontal às frequências de 150 e 300MHz. O plano horizontal é o plano da antena, plano (x,y), plano $\theta=90^\circ$ ou ainda plano E.

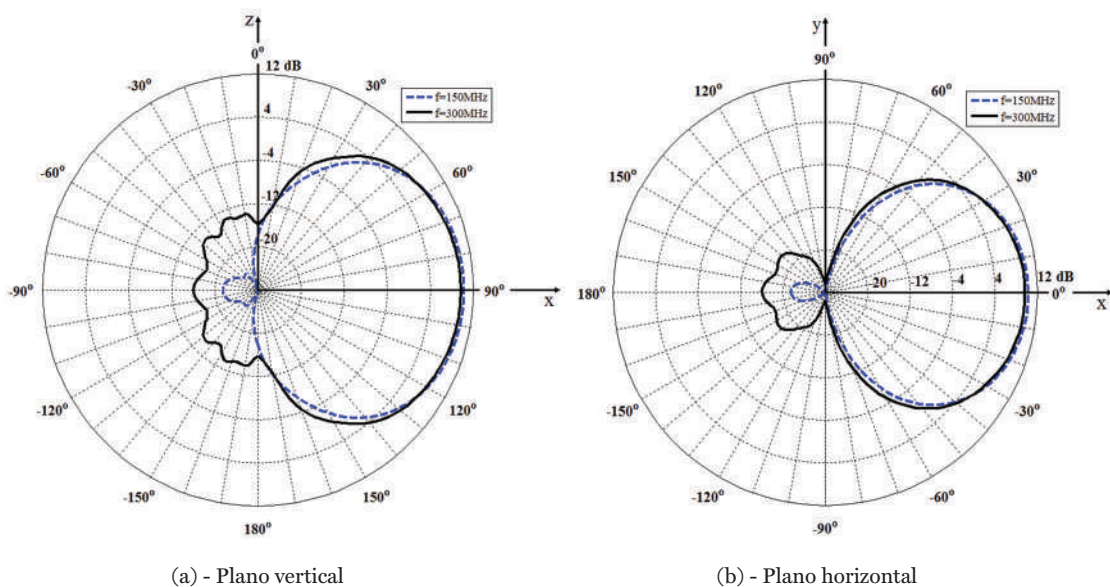


Figura 5.71 Diagramas de radiação nos planos vertical e horizontal, da antena do Exemplo 5.11 às frequências de 150MHz e 300MHz.

Os resultados da simulação mostram que para 150MHz a LFMP é, no plano vertical, de 72° e, no plano horizontal de 56° . Para 300MHz a LFMP é, no plano vertical, de 80° e, no plano horizontal de 56° . Para 150MHz a diretividade é de 10.2dBi e a razão frente/trás é de 31.8dB. Para 300MHz a diretividade é de 9.7dBi e a razão frente/trás é de 25.7dB.

Tendo em conta todos estes resultados é de esperar globalmente um bom desempenho desta antena.

Exemplo 5.12

Pretende-se projetar uma ALPD para a banda de UHF de 450 a 900 MHz com uma diretividade de 8dBi. Os dipolos serão construídos com tubo de 5mm de diâmetro e a linha de alimentação, onde estão ligados os dipolos, será feita com tubos de 10mm de diâmetro. Pretende-se ainda que a resistência de entrada seja de 75Ω para a adequada alimentação da antena com um cabo coaxial de com 75Ω de impedância característica.

Usando o *script ProjetoALPD.m* obtém-se os seguintes resultados: Fator de escala $\tau=0.8574$, fator de espaçamento $\sigma=0.1545$, $\alpha=13^\circ$ e o número de dipolos $N=10$. O comprimento do dipolo maior é igual a metade do maior comprimento de onda, isto é, $L_1=333\text{mm}$ e os comprimentos dos restantes podem ser obtidos usando a relação (5-100).

O espaçamento d_1 entre o 2º e o 1º dipolo é dado pela relação (5-101) e é igual a 103mm. Os restantes espaçamentos podem ser obtidos pela relação (5-102).

A distância entre os centros dos tubos da linha de alimentação é de 14.5mm. A distância entre as faces dos tubos é portanto de 4.5mm.

A geometria da antena é semelhante às anteriores. Esta antena foi simulada no software 4NEC2, usando como ficheiro de entrada o que foi gerado no programa de projeto.

Os resultados da simulação mostram que a diretividade é aproximadamente 8dBi variando um pouco mais de 1dB dentro da banda sendo pior nas frequências mais baixas. Os resultados evidenciam também que o SWR varia entre 1.7 e 2.3 dentro da banda. Embora fosse desejável que fosse inferior a 2, mesmo assim é um valor muito aceitável.

Quanto aos diagramas de radiação, os resultados mostram que eles são semelhantes na forma aos dos exemplos anteriores. Para 450MHz a LFMP é, no plano vertical, de 108° e, no plano horizontal de 68° . Para

900MHz a LFMP é, no plano vertical, de 92° e, no plano horizontal de 60°. Para 450MHz a diretividade é de 7dBi e a razão frente/trás é de 17.4dB. Para 900MHz a diretividade é de 8.1dBi e a razão frente/trás é de 25.2dB.

As ALPD projetadas nos exemplos anteriores são muito comuns na receção de TV terrestre para receber os vários canais de VHF e/ou UHF. Atualmente com a generalização da Televisão Digital Terrestre (TDT) que emite apenas num canal, elas perderam a sua importância para esta aplicação. São, no entanto, antenas simples e robustas adequadas à utilização em casos em que é necessário cobrir uma banda larga de frequências, tipicamente de 1 para 2 ou mesmo de 1 para 3.

5.14 Antena Helicoidal

Uma antena helicoidal consiste numa estrutura feita com um condutor cilíndrico enrolado em hélice tal como se ilustra na Figura 5.72. Os parâmetros principais desta estrutura são os seguintes:

D - Diâmetro da hélice

C - Perímetro da hélice igual a πD

S - Espaçamento entre espiras ou passo da hélice igual a $C \tan \alpha$

α - Ângulo de passo da hélice dado por: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right)$

L - Comprimento duma espira igual a $\sqrt{C^2 + S^2}$

N - Número de espiras

d - Diâmetro do condutor com que é feita a hélice

Se uma espira for desenrolada obtém-se o triângulo inserido na figura que relaciona os principais parâmetros da hélice.

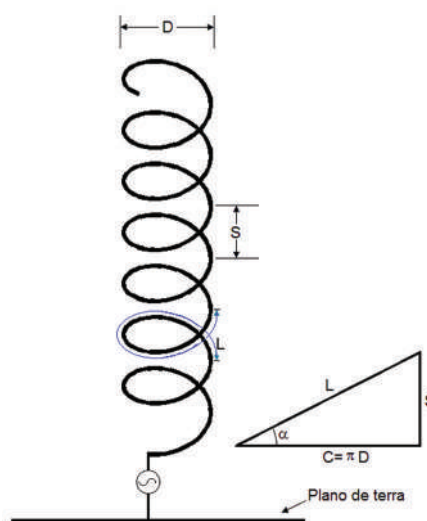


Figura 5.72 Estrutura duma antena helicoidal.

A antena helicoidal pode funcionar em dois modos. O modo axial caracterizado pela radiação ser segundo o eixo da hélice e o modo transversal no qual a radiação ocorre segundo a perpendicular ao eixo. O modo axial verifica-se quando o perímetro da hélice é cerca de um comprimento de onda. A onda radiada tem polarização circular. O modo transversal ocorre quando o diâmetro da hélice é pequeno comparado com o comprimento de onda. A antena helicoidal foi desenvolvida por J. D. Kraus[3] que a estudou exaustivamente.

5.14.1 Estudo do modo axial

As antenas helicoidais no modo axial são usadas quando se pretende radiar ou receber ondas com polarização circular com ganhos moderados até cerca de 15dBi. Uma das aplicações é a comunicação com satélites em UHF. Este modo ocorre quando o perímetro da hélice é cerca de um comprimento de onda, tipicamente deve verificar-se a relação (5-103):

$$\frac{3}{4}\lambda \leq C \leq \frac{4}{3}\lambda \quad (5-103)$$

Também o ângulo de passo α deve ser da ordem dos 13° , variando normalmente no intervalo dado por (5-104):

$$12^\circ < \alpha < 15^\circ \quad (5-104)$$

Como acima foi dito J. D. Kraus[3] estudou exaustivamente esta antena tendo proposto algumas fórmulas empíricas para a resistência de entrada, LFMP, diretividade e razão axial, válidas nas condições dadas por (5-103) e (5-104) e com $N \geq 4$.

Para a diretividade a fórmula proposta é a indicada em (5-105) com K constante.

$$D = K N \frac{C^2 S}{\lambda^3} \quad (5-105)$$

Atendendo a que $S = C \tan \alpha$, esta expressão pode ser escrita como $D = K N \frac{C^3}{\lambda^3} \tan \alpha$.

No seu livro, J. D. Kraus[3], sugere $K=12$ mas em outros livros K aparece com valores diferentes. Por exemplo no livro do C. A. Balanis[4] $K=15$ e no livro do Stutzman[10], $K=6.2$. De acordo com esta fórmula a diretividade depende de três fatores, do número de espiras, do perímetro da espira e do ângulo de passo. O autor fez diversas simulações recorrendo ao software NEC e concluiu que esta fórmula é indicativa e dá valores aceitáveis para valores de N até cerca de 20 espiras, para valores de C entre 0.8 e 1.15 e para valores de α entre 12° e 15° . O autor verificou que o valor ótimo da constante K varia com estes parâmetros, mas concluiu que uma solução de compromisso é usar $K=4.5$.

Por esta fórmula somos levados a supor que duplicando o número de espiras a diretividade deveria também duplicar. Esta é uma conclusão otimista embora seja aproximadamente verificada para valores de N até cerca de 40.

A diretividade aumenta com C dentro dos limites apontados. O valor de C deve ser aproximadamente igual a 1λ , verificando-se um máximo da diretividade para $C \cong 1.1\lambda$.

Embora em princípio se possa projetar hélices com qualquer ângulo de passo, as hélices obtidas podem não ter um bom desempenho global tendo em conta um conjunto de parâmetros especialmente a diretividade e a razão axial. O autor fez diversas simulações duma hélice com 13 espiras à frequência de 1GHz e obteve a Tabela 5-8.

α	5	8	10	12	13	14	15	16	17	18
Dir	13.6	13.6	13.4	12.7	12.1	11.7	11	10.5	9.8	9.2
RA	0.59	0.77	0.79	0.84	0.95	0.91	0.94	0.95	0.96	0.97

Tabela 5-8 Valores da razão axial e da diretividade para alguns valores de α para uma hélice com $N=13$ à frequência de 1GHz.

Como se pode ver pela tabela a faixa sombreada correspondente a ângulos de passo na faixa $12^\circ < \alpha < 15^\circ$ é a que produz um bom compromisso entre uma boa razão axial e uma diretividade aceitável para o número de espiras usado.

O autor analisou como exemplo uma antena helicoidal com um condutor de diâmetro $d=0.01\lambda$ e com $C=1\lambda$ para a frequência de 1GHz, com ângulos de passo entre 12° e 15° e determinou para cada caso o número de espiras necessário para obter diretividades compreendidas entre 8 e 16dBi. As diversas simulações que o autor fez recorrendo ao software NEC permitiram-lhe obter a Tabela 5-9 com os valores que sintetizam as relações entre a diretividade, o número de espiras e o ângulo de passo.

$\alpha(^{\circ}) \backslash \text{Dir(dBi)}$	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12	3	4	6	9	11	15	20	25	35
12.5	3	4	7	9	12	16	21	27	37
13	3	5	7	9	13	17	22	30	39
13.5	3	5	8	10	14	18	24	30	43
14	4	6	9	11	15	20	27	33	43
14.5	4	6	9	12	16	21	28	35	46
15	4	7	10	13	18	23	30	39	49

Tabela 5-9 Valores de N para pares de valores α e Dir para uma antena com $C=1\lambda$ e $d=0.01\lambda$.

Com base nos dados desta tabela o autor elaborou um *script* em Matlab que permite o projeto rápido de antenas helicoidais com o objetivo de terem uma diretividade na faixa de valores desta tabela de referência. Este *script* designado por *ProjetoHelice_Axial_Ref.m* dá as dimensões relevantes, o desenho da antena e ainda gera um texto apropriado para ser lido por programas de cálculo que usam o código NEC. Para além deste *script* o autor desenvolveu outro mais geral denominado *ProjetoHelice_Axial_Geral.m* em que os dados de entrada são o N, o α , o C e o d e que permite obter as dimensões relevantes, o desenho da antena e um texto apropriado para ser lido por programas de cálculo que usam o código NEC. O desempenho da antena obtida deve ser depois avaliado por simulação.

É conveniente notar que antenas helicoidais com muitas espiras podem a certas frequências serem estruturas de dimensões consideráveis e até impraticáveis.

As antenas helicoidais geram uma onda com polarização elíptica que é praticamente circular segundo o eixo da hélice. O sentido da rotação da polarização é determinado pelo sentido de enrolamento do fio. Por exemplo, a hélice indicada na Figura 5.72 tem um enrolamento à direita, isto é, está de acordo com a regra da mão direita e, portanto, radia uma onda com polarização direita. A qualidade da polarização é indicada pela razão axial que quando é igual a 1 indica que a polarização é circular. J. D. Kraus[3] indica para a razão axial a fórmula (5-106). Esta fórmula mostra que quanto maior for o número de espiras mais circular é a polarização da onda segundo o eixo da hélice.

$$RA = \frac{2N}{2N+1} \quad (5-106)$$

Uma hélice com um enrolamento à direita radia e recebe uma onda com polarização circular direita. Uma hélice com um enrolamento à esquerda radia e recebe uma onda com polarização circular esquerda. Assim, se quisermos fazer uma ligação radioelétrica com duas hélices, ambas têm que ser do mesmo tipo, isto é, ambas com um enrolamento à direita ou ambas com um enrolamento à esquerda.

Pelo facto de ao longo da hélice se propagar uma onda progressiva, a impedância de entrada deveria ser essencialmente resistiva dentro duma largura de banda considerável. Contudo, isso não é exatamente assim porque a impedância de entrada é afetada pelo modo como é alimentada junto ao plano de terra e também pelas dimensões deste. Como regra, o plano de terra é circular ou quadrado com um diâmetro ou um lado de pelo menos $3/4\lambda$. J. D. Kraus[3] indica para a resistência de entrada a fórmula (5-107). Esta fórmula deve ser considerada como uma aproximação. O valor mais realista tem que ser obtido por simulação ou por medida.

$$R = 140 \frac{C}{\lambda} (\Omega) \quad (5-107)$$

A fase da corrente na hélice muda continuamente ao longo dela como é característico numa onda progressiva. Como o perímetro de cada espira é cerca dum comprimento de onda as correntes em pontos diametralmente opostos estão em oposição de fase. Esta inversão de fase cancela a mudança de sentido da corrente nesses pontos o que significa que a radiação produzida por pontos opostos está aproximadamente em fase dando origem em campo distante a um reforço segundo o eixo da hélice.

O diagrama de radiação duma antena helicoidal pode ser aproximado ao dum agregado longitudinal de N espiras. Este diagrama é o produto do fator de elemento FE pelo fator de agregado FA.

O elemento é uma espira circular que como vimos no capítulo 2 tem um diagrama do tipo $\cos\theta$, o fator de agregado é dado pela relação estudada no capítulo 4:

$$FA = \frac{\sin\left(\frac{N\Psi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right)}, \text{ com } \Psi = \beta S \cos\theta + \alpha_h.$$

S é o espaçamento uniforme entre as espiras e α_h é o desfasamento progressivo. O diagrama de radiação duma antena helicoidal pode ser então dado pela expressão (5-108):

$$F(\theta) = \text{Const} \cos\theta \frac{\sin\left(\frac{N\Psi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right)} \quad (5-108)$$

Como o máximo da radiação ocorre para $\theta=0^\circ$, então para um agregado longitudinal comum, Ψ deve ser nulo nessa direção o que implica $\alpha_h = -\beta S$. Contudo a corrente ao longo do fio introduz um desfasamento extra de -2π porque cada espira tem cerca dum comprimento de onda. Sendo assim, o desfasamento progressivo deve ser $\alpha_h = -\beta S - 2\pi$. Para além disto, o estudo da antena helicoidal mostra que o seu comportamento se aproxima do agregado superdiretivo Hansen-Woodyard, que foi analisado no capítulo 4. Este facto implica um desfasamento adicional de $-\pi/N$. Tendo em conta estas observações, o desfasamento progressivo α_h passa a ser dado pela expressão (5-109):

$$\alpha_h = -\beta S - 2\pi - \pi/N \quad (5-109)$$

Normalmente interessa obter o diagrama normalizado ao máximo que ocorre para $\theta=0^\circ$ sendo $\Psi = -2\pi - \pi/N$. Este máximo é dado pela expressão (5-110):

$$F(\theta) = \text{Const} \frac{\text{sen}\left(-N\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{N \text{sen}\left(-\pi - \frac{\pi}{2N}\right)} = \frac{\text{Const}(-1)^{N+1}}{N \text{sen}\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \quad (5-110)$$

O diagrama normalizado é então dado pela expressão (5-111):

$$F_n(\theta) = (-1)^{N+1} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2N}\right) \cos\theta \frac{\text{sen}\left(\frac{N\Psi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Psi}{2}\right)} \quad (5-111)$$

$$\text{com } \Psi = \beta S (\cos\theta - 1) - 2\pi - \frac{\pi}{N}$$

De seguida apresentam-se alguns exemplos de projeto de antenas helicoidais e os respetivos resultados obtidos pelo simulador 4NEC2.

Exemplo 5.13

Pretende-se projetar uma antena helicoidal para a frequência de 1GHz com uma diretividade de 12dBi, um ângulo de passo de 13° e espiras com um perímetro de 1λ feitas com um condutor de diâmetro 0.01λ. Usando o programa *ProjetoHelice_Axial_Ref.m* e escolhendo polarização circular direita, obtém-se uma antena com as seguintes características e dimensões:

Polarização CD

Número de espiras N=13

Diâmetro das espiras D=95.5mm

Espaçamento entre espiras S=69.3mm

Ângulo de passo α=13°

Perímetro da hélice C=1λ (300mm)

Comprimento duma espira L=307.9mm

Comprimento total do fio =4002.6mm

Comprimento da hélice =900.4mm

Diâmetro do fio aproximadamente d=3 mm

O programa de projeto gerou o seguinte ficheiro apropriado para ser lido pelo 4NEC2:

CM

CM Antena Hélice com polarização CD

CM A antena tem 13 espiras

CM O diâmetro das espiras é 95.5 mm

CM O diâmetro do fio é 3 mm

CM O perímetro da hélice é 1 wl

CM O ângulo de passo é 13°

CM O comprimento da Hélice é 900.4 mm

CM A frequência é de 1000MHz

CM A diretividade pretendida é de 12dBi

CM

CE

GH 1 467 69.2605 900.3859 47.7465 0 47.7465 0 1.5

GS 0 0 0.001

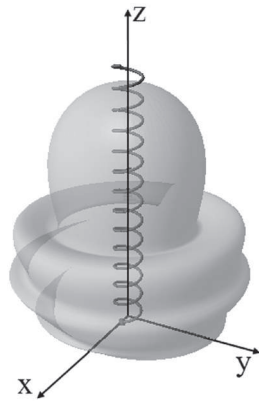
GE 1


```

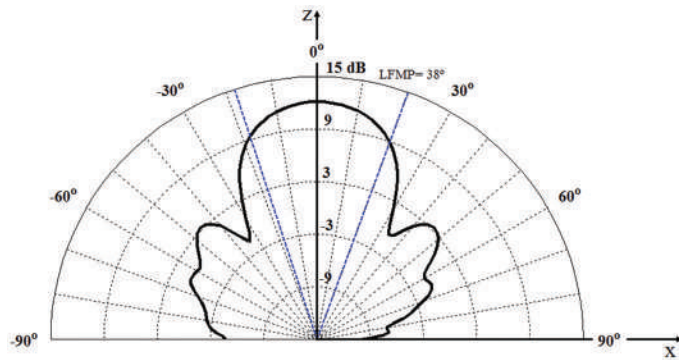
GN 1
EX 0 1 1 0 1 0
FR 0 0 0 0 1000 0
EN

```

Na Figura 5.73 (a) está ilustrado o diagrama 3D e na Figura 5.73 (b) está representado o diagrama 2D no plano $\phi=0^\circ$, obtidos pela simulação.



(a) - Diagrama 3D



(b) - Diagrama 2D

Figura 5.73 Diagramas de radiação do Exemplo 5.13 à frequência de 1GHz.

Como se pode ver das figuras o diagrama é quase de perfeita revolução e a diretividade dada pela simulação é de 12.12dBi que é aproximadamente o pretendido. Calculando a diretividade usando a fórmula (5-105) com $K=4.5$ obtém-se o valor de 11.3dBi que embora sendo menor do que o pretendido é uma boa aproximação.

Na Figura 5.74 está representada a variação da diretividade em função da frequência. Como se pode ver pela figura a diretividade varia pouco na faixa de frequências para as quais $0.75 \leq C/\lambda \leq 1.2$, verificando-se um máximo da para $C \approx 1.13\lambda$.

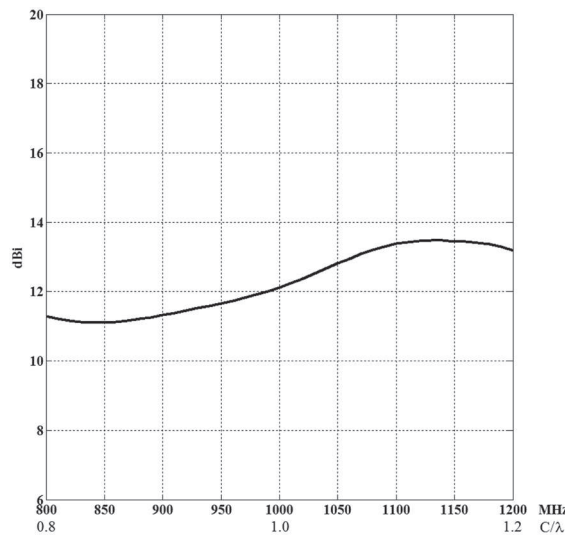


Figura 5.74 Variação da diretividade em função da frequência.

Na Figura 5.75 está representada a comparação entre o diagrama simulado e o teórico obtido pela expressão (5-111) à frequência de 1130MHz para a qual a antena tem a máxima diretividade e que corresponde a $C \approx 1.13\lambda$.

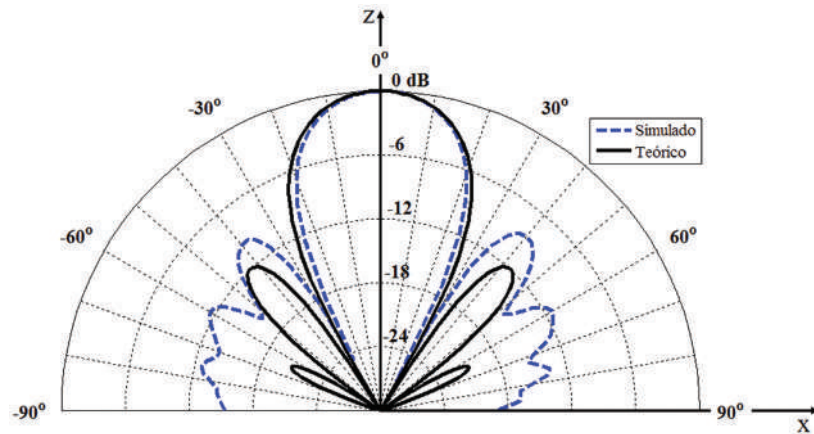


Figura 5.75 Comparação entre o diagrama simulado e o teórico à frequência de 1130MHz.

Como se pode ver pela figura há uma boa correspondência nomeadamente na definição do lobo principal, na previsão dos primeiros nulos e na direção dos lóbulos secundários. É visível uma discrepância no nível dos primeiros lóbulos secundários e maior ainda para os outros lóbulos secundários. É de notar, contudo que a expressão (5-111) foi deduzida a partir de pressupostos ideais.

Na Figura 5.76 está representada a variação da impedância de entrada em função da frequência. Como se pode ver pela figura a resistência de entrada é relativamente constante na faixa de frequências para as quais $0.75 \leq C/\lambda \leq 1.3$, sendo cerca de 100Ω . Estes valores são mais baixos de que os previstos pela fórmula (5-107) que como se disse deve ser considerada como uma aproximação.

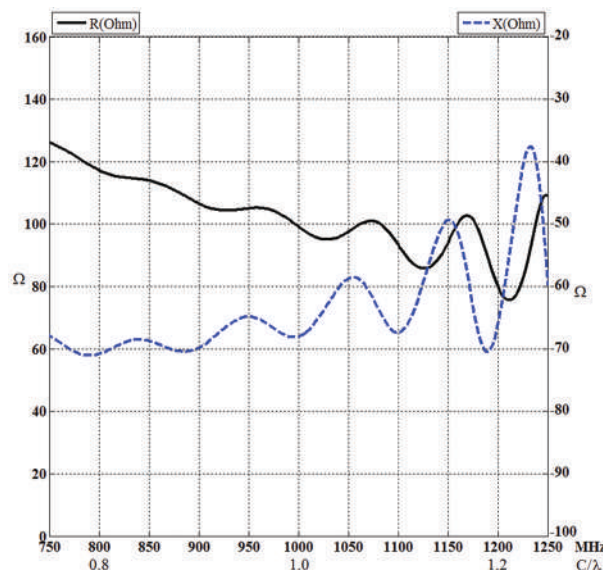
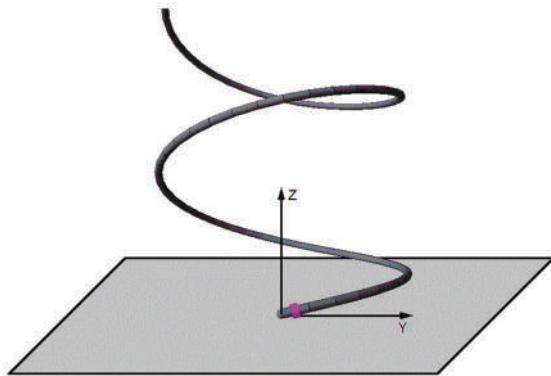


Figura 5.76 Variação da impedância de entrada em função da frequência.

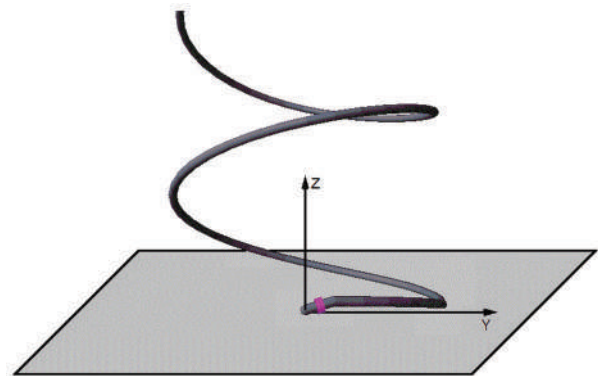
Considerando como referência uma impedância característica de 50Ω esta antena daria origem a um SWR da ordem de 3. No seu livro, J. D. Kraus[3], sugere que se pode melhorar a adaptação aproximando do plano de terra o início da primeira espira. Uma simulação mostrou que se nesta antena o primeiro quarto da primeira espira for enrolado paralelamente ao plano de terra, isto é, mantendo uma altura constante o SWR baixa consideravelmente.

A Figura 5.77(a) mostra a ampliação da primeira espira da hélice deste primeiro exemplo com o enrolamento habitual. A Figura 5.77(b) mostra a mesma hélice, mas com a primeira espira enrolada de tal modo que o seu

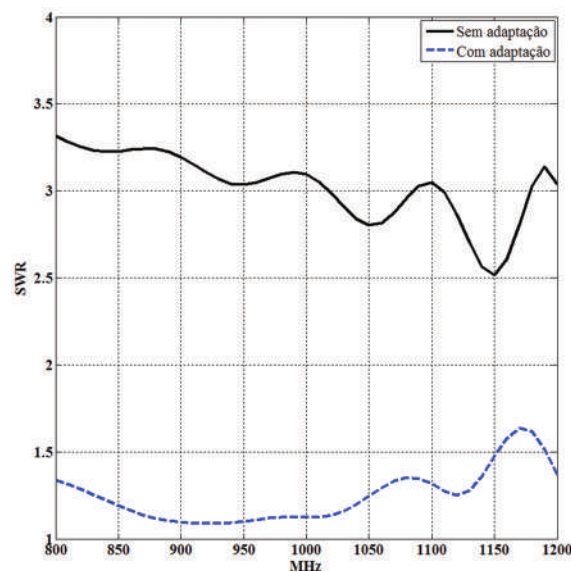
primeiro quarto fica paralelo ao plano de terra. No primeiro caso o primeiro quarto tem uma altura, relativamente ao plano de terra, que vai de 1.93mm até 15.4mm. No segundo caso o primeiro quarto tem uma altura constante, relativamente ao plano de terra, de 2.5mm.



(a) Primeira espira da hélice com o enrolamento habitual



(b) Primeira espira com o primeiro quarto paralelo ao plano de terra



(c) SWR obtido pela simulação de ambos os casos

Figura 5.77

Na Figura 5.77(c) está representada a comparação do SWR em relação a $Z_0=50\Omega$, obtido pela simulação de ambos os casos. Como se pode ver a melhoria do SWR é muito significativa o que mostra que na prática é possível usar esta técnica que, quando executada com cuidado, pode melhorar bastante a adaptação duma antena helicoidal a um cabo coaxial.

Na Figura 5.78 está representada a variação da razão axial em função do ângulo θ para a frequência de 1GHz. Como se pode ver na direção $\theta=0^\circ$ a razão axial é cerca de -0.9dB que é próximo de 0, isto é, a polarização é praticamente circular perfeita segundo essa direção. Considerando ainda como aceitável, valores da RA superiores a -3dB, pode-se ver que a antena radia uma onda com polarização circular dentro dum ângulo sólido com uma abertura total de cerca de 62° .

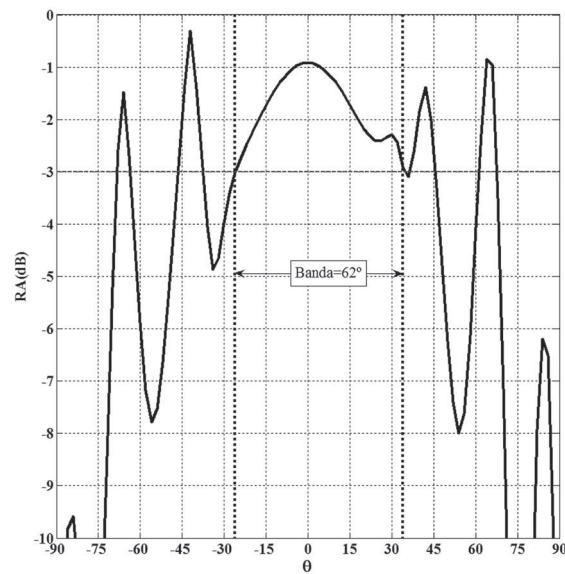


Figura 5.78 Variação da razão axial em função do ângulo θ para $f=1000\text{MHz}$.

Calculando a razão axial pela fórmula (5-106) obtém-se o valor de -0.33dB que é um pouco melhor do que o resultado da simulação e que confirma a polarização circular praticamente perfeita segundo a direção $\theta=0^\circ$.

Exemplo 5.14

Neste exemplo pretende-se projetar uma antena helicoidal com polarização circular esquerda para a frequência de 10GHz com uma diretividade de 15dBi , um ângulo de passo de 14° e espiras com um perímetro de 1λ feitas com um condutor de diâmetro 0.01λ . Usando o programa *ProjetoHelice_Axial_Ref.m*, obtém-se uma antena com as seguintes características e dimensões:

Polarização CE

Número de espiras $N=33$

Diâmetro das espiras $D=9.5\text{mm}$

Espaçamento entre espiras $S=7.5\text{mm}$

Ângulo de passo $\alpha=14^\circ$

Perímetro da hélice $C=1\lambda$ (30mm)

Comprimento duma espira $L=30.9\text{mm}$

Comprimento total do fio= 1020.3mm

Comprimento da hélice= 246.8mm

Diâmetro do fio aproximadamente $d=0.3\text{mm}$

Os resultados relevantes obtidos da simulação são os seguintes:

Diretividade de 15.15dBic e $\text{LFMP}=20^\circ$ para a frequência de 10GHz .

Máxima diretividade de 15.64dBic e $\text{LFMP}=16^\circ$ para a frequência de 10.6GHz , para a qual $C=1.06\lambda$.

A razão axial é 0.921 na direção $\theta=0^\circ$ podendo-se considerar que a onda radiada tem polarização circular dentro dum ângulo sólido com uma abertura total de cerca de 34° .

A impedância de entrada é $Z_{\text{in}} = 108 - j66\Omega$.

Exemplo 5.15

Neste exemplo pretende-se ilustrar o uso de um agregado de hélices para obter uma maior diretividade. Suponhamos que se quer uma antena helicoidal com 18dBic à frequência de 5GHz, com um ângulo de passo de 13° . Para se conseguir esta diretividade seria necessário construir uma hélice com cerca de 65 espiras de 19mm de diâmetro, ficando a hélice com um comprimento de cerca de 1m. Como se pode imaginar esta hélice é de construção complicada com uma geometria instável e não autossustentável. Uma solução mais conveniente é utilizar um agregado de 4 hélices idênticas, cada uma delas com uma diretividade de 12dBic.

Optando por um espaçamento entre os eixos das hélices de 40mm, isto é, 0.7λ à frequência de 5GHz, obtém-se o agregado ilustrado na Figura 5.79, em que as hélices têm polarização circular direita. As dimensões relevantes são as seguintes:

Cada Hélice, com 13 espiras, tem as seguintes dimensões:

Diâmetro, $D=19.1\text{mm}$

Comprimento, $L=180.1\text{mm}$

Espaçamento entre espiras, $S=13.9\text{mm}$

Ângulo de passo, $\alpha=13^\circ$

Comprimento total do fio usado em cada hélice, $L_n=800.5\text{mm}$

Diâmetro do fio, $d=0.6\text{mm}$

Cada espira tem as seguintes dimensões:

Perímetro, $C=1\lambda(60\text{mm})$

Comprimento, $L_o=61.6\text{mm}$

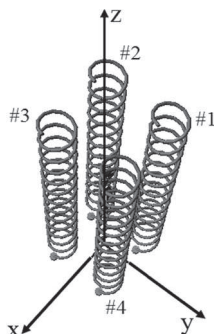
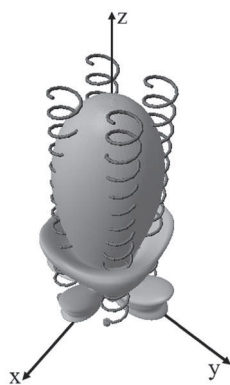
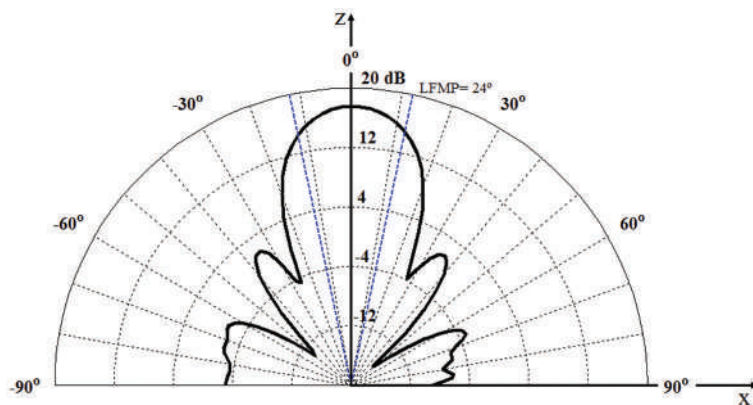


Figura 5.79 Agregado de 4 hélices idênticas, cada uma com uma diretividade de 12dBic.

Simulando esta estrutura no NEC, obtém-se os diagramas representados na Figura 5.80 à frequência de 5GHz.



(a) - Diagrama 3D



(b) - Diagrama 2D

Figura 5.80 Diagramas de radiação do Exemplo 5.15 à frequência de 5GHz.

Outros resultados relevantes obtidos da simulação são os seguintes:

Diretividade de 17.55dBic e uma LFMP=24° para a frequência de 5GHz. A razão axial é 0.855 na direção $\theta=0^\circ$ radiando uma onda com polarização que se pode considerar circular dentro dum ângulo sólido com uma abertura total de cerca de 28°.

As impedâncias de entrada de cada hélice são: $Z_{1in}=156-j26\Omega$; $Z_{2in}=142-j29\Omega$; $Z_{3in}=160-j27\Omega$ e $Z_{4in}=141-j30\Omega$;

Para alimentar as 4 hélices com a mesma potência e em fase, é necessário projetar um circuito de alimentação apropriado. Se por exemplo se ligarem as 4 hélices a um ponto central através de linhas com $\lambda/2$ de comprimento, teremos nesse ponto o paralelo das 4 impedâncias de entrada. Como elas são aproximadamente iguais a $Z_{in}=150-j30\Omega$;, então a impedância de entrada do conjunto seria aproximadamente $Z_{Ain}=37.5-j7.5\Omega$; que daria origem a um VSWR de aproximadamente 1.4 com referência a 50Ω , o que é aceitável.

5.14.2 Estudo do modo transversal

Uma antena helicoidal funciona no modo transversal se as dimensões da hélice forem pequenas comparadas com o comprimento de onda. Tipicamente D, C e S devem ser menores do que 0.1λ . Quando isto se verifica, a hélice fica com o aspeto duma mola e a radiação máxima ocorre na direção transversal ao eixo da hélice, com um nulo segundo esse eixo e com polarização linear alinhada com esse eixo, isto é, semelhante à dum monopolo. Neste modo de funcionamento a hélice é eletricamente curta e portanto tem uma baixa eficiência.

Exemplo 5.16

Consideremos uma hélice com 40 espiras de 9.2mm de diâmetro, usando um fio com 0.5mm de diâmetro enrolado com um ângulo de passo de 7°. A frequência é de 145MHz, o perímetro da hélice é 0.014λ e o seu comprimento é 142.3mm, isto é, 0.07λ . Os resultados da simulação dão uma impedância de entrada $Z \approx 4+j70\Omega$ para a frequência de 145MHz, verificando-se uma ressonância para a frequência de 137.2MHz com $Z \approx 3+j0\Omega$. O diagrama de radiação está ilustrado na Figura 5.81. A diretividade é de aproximadamente 4dBi. Atendendo à baixa eficiência desta antena o seu ganho pode ser modesto.

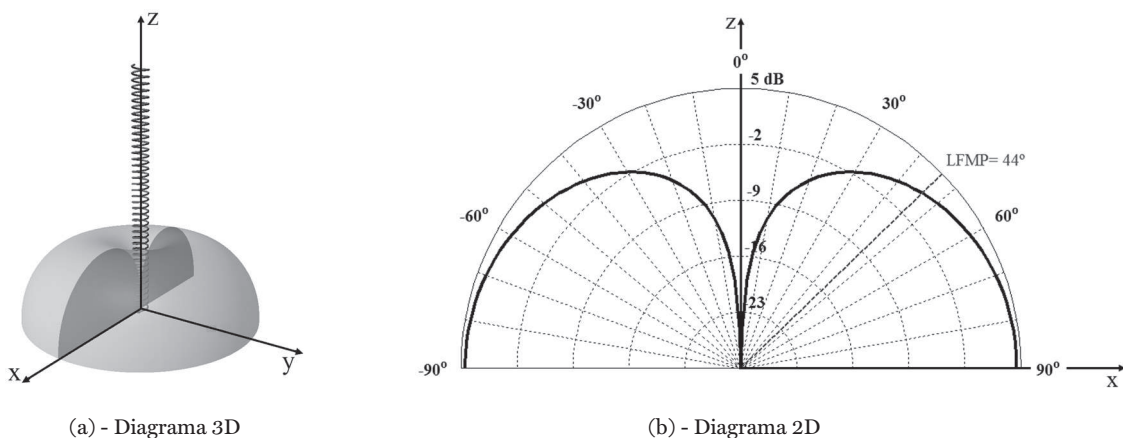


Figura 5.81 Diagramas de radiação do Exemplo 5.16 à frequência de 145MHz.

É possível conseguir uma razoável adaptação alimentando a hélice numa das suas espiras através de uma ligação paralelo, *shunt feed* ou *tap*, tal como se ilustra na Figura 5.82.

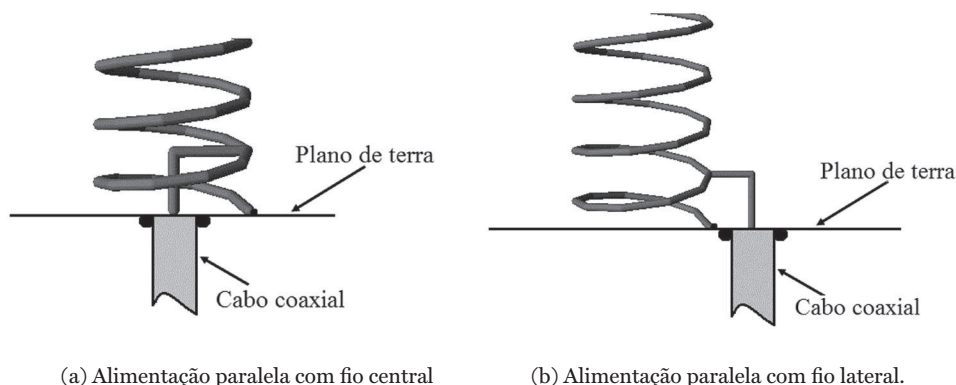


Figura 5.82

Para a configuração da Figura 5.82(a) consegue-se obter um SWR da ordem de 1.2 verificando-se uma ressonância para a frequência de 141MHz com $Z \approx 40 + j0\Omega$. Para a configuração da Figura 5.82(b) consegue-se obter um SWR da ordem de 1.1 verificando-se uma ressonância para a frequência de 137.3MHz com $Z \approx 55 + j0\Omega$. Em ambos os casos a largura de banda é muito estreita. Para se conseguir ajustar a ressonância à frequência desejada basta mudar o número de espiras. Por exemplo, para configuração da Figura 5.82(b) usando 37 espiras consegue-se atingir a ressonância à frequência de 145MHz.

Este tipo de antenas é muito usado em pequenos equipamentos de radio comunicações nas bandas de VHF e UHF quer por radioamadores quer por forças de segurança e de proteção civil. Normalmente a hélice é protegida por um revestimento semelhante a borracha tal como se ilustra na Figura 5.83. Na gíria da comunidade de radioamadores esta antena é conhecida por *rubber duck antenna*.

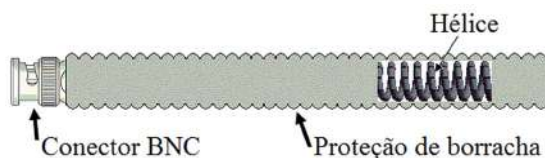


Figura 5.83 Antena *rubber duck*. Hélice protegida por um revestimento semelhante a borracha.

A antena *rubber duck* tem menor ganho do que um monopolo de $\lambda/4$ e, portanto, menos alcance, no entanto elas são usadas principalmente em transctores (*two way radios*) em aplicações para as quais um grande alcance não é muito importante. Como já se afirmou anteriormente a largura de banda destas antenas é muito estreita o que significa que quando a frequência se afasta da frequência central o seu SWR aumenta e a sua eficiência decresce rapidamente. Como, no entanto, os transctores geram um sinal forte e têm grande sensibilidade conseguem ultrapassar as deficiências deste tipo de antenas.

Exemplo 5.17

Como exemplo da utilização duma antena *rubber duck* a Figura 5.84 mostra os resultados da simulação duma antena com 45 espiras de 9.2mm de diâmetro, usando um fio com 0.5mm de diâmetro enrolado com um ângulo de passo de 7° , montada em cima duma caixa metálica com 20x40x100mm e alimentada como ilustrado na Figura 5.82(b).

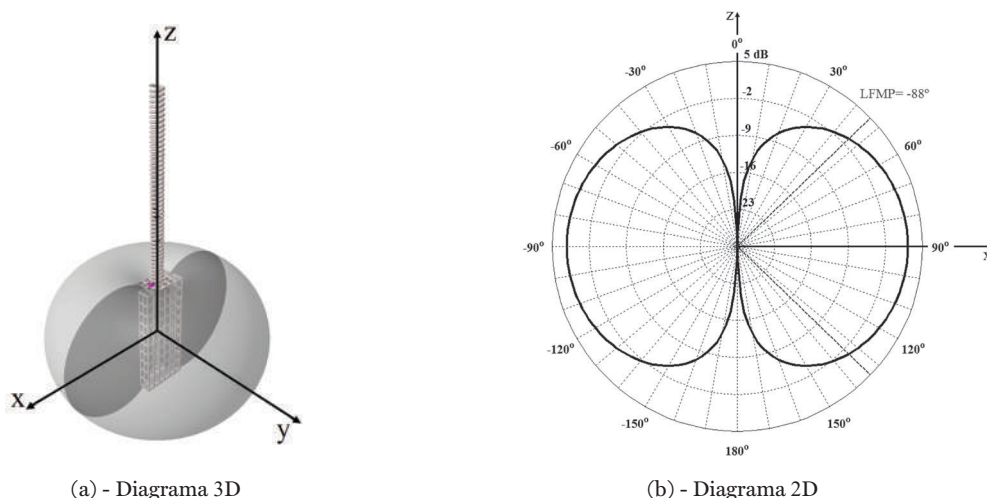


Figura 5.84 Diagramas de radiação do Exemplo 5.17 à frequência de 145MHz.

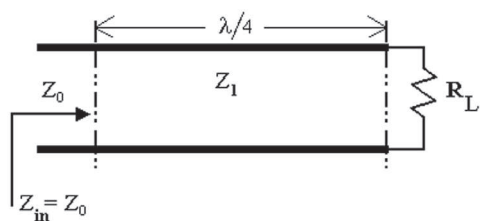
O diagrama de radiação é semelhante ao dum dipolo. À frequência de 147.5MHz ocorre o menor SWR com o valor de 1.38 a que corresponde uma impedância de $Z \approx 38 + j7\Omega$. Quando o equipamento está muito próximo do corpo a frequência de ressonância altera-se devido à capacidade do corpo, contudo normalmente os transdutores são usados junto à boca, ficando a antena pouco obstruída, o que minimiza esse efeito.

5.15 Alimentação e adaptação de antenas de condutores cilíndricos

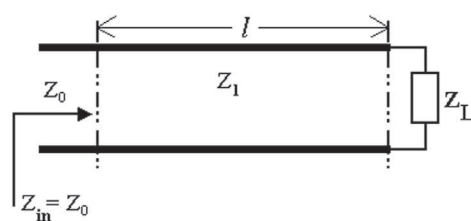
As antenas estudadas atrás apresentam aos seus terminais uma determinada impedância de entrada dependente da sua geometria e dos diâmetros dos condutores de que são feitas. Como qualquer impedância, é muito importante adaptá-la à impedância característica da linha que a alimenta para aproveitar ao máximo a potência que vem do gerador através da linha, no caso de a antena estar a transmitir ou, para transferir para o recetor também através da linha a potência que recebe quando está em receção.

Quando não há uma boa adaptação ocorrem reflexões ao longo da linha que se traduzem por um VSWR maior do que 1, sendo tanto maior quanto pior for a adaptação. Uma adaptação perfeita, isto é, um VSWR=1 é praticamente impossível de atingir. Considera-se normalmente aceitável um $VSWR \leq 2$. Quando o VSWR=2 já cerca de 89% da potência é transferida da linha para a antena.

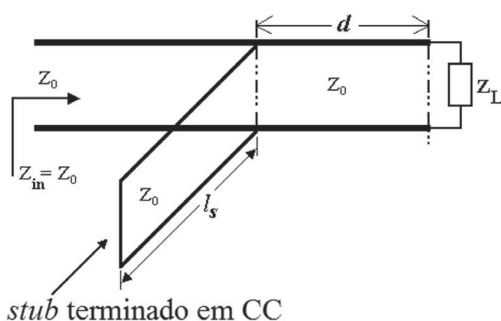
Como é do conhecimento do estudo das linhas de transmissão a adaptação duma carga à impedância característica da linha que a alimenta, pode ser conseguida intercalando entre a carga e a linha de transmissão uma malha de adaptação. As estruturas mais comuns estão ilustradas na Figura 5.85. Todas estas técnicas de adaptação de impedâncias são estudadas nos livros de texto que abordam o tema das linhas de transmissão, como por exemplo em [11]. A escolha da melhor solução depende da impedância em causa, da geometria da estrutura a adaptar e da tecnologia usada na sua implementação.



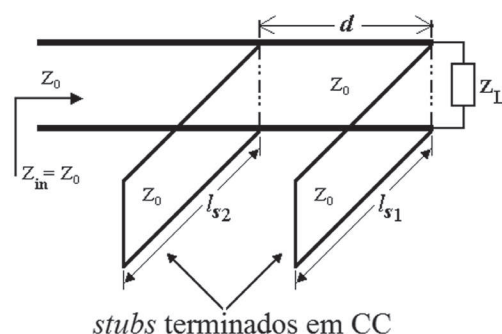
(a) - Transformador de $\lambda/4$



(b) - Secção de linha de transmissão



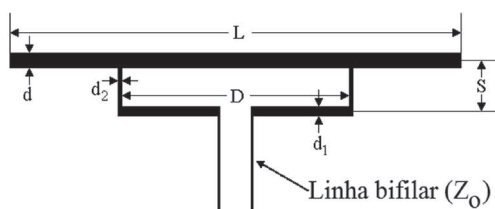
(c) - Adaptação com um *stub* em paralelo.



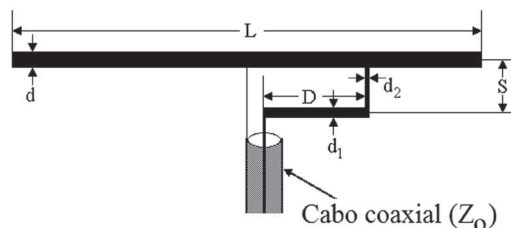
(d) - Adaptação com dois *stubs* em paralelo.

Figura 5.85 Malhas de adaptação mais comuns.

No caso particular dum dipolo, outra forma de se conseguir a adaptação é através da alimentação em paralelo, *shunt feed* na designação anglo saxónica, ilustrada na Figura 5.86. Quando a alimentação é feita por linha bifilar, a configuração designa-se por acoplamento em T, Figura 5.86(a) e quando a alimentação é feita por cabo coaxial, a configuração designa-se por acoplamento gama, Figura 5.86(b).



(a) - Acoplamento em T



(b) - Acoplamento gama

Figura 5.86 Alimentação em paralelo.

A configuração acoplamento em T é um caso geral dum dipolo dobrado. De facto, se o comprimento D for igual ao comprimento L, obtém-se um dipolo dobrado como o que já foi estudado anteriormente neste capítulo. Por esta razão, o acoplamento em T pode ser analisado pelo modelo linha de transmissão-antena dipolo. Uma análise mais detalhada deste acoplamento pode ser encontrada em [4]. A impedância de entrada desta configuração depende das distâncias D e S e dos diâmetros d, d1 e d2. Por vezes as ligações entre o dipolo e o braço paralelo são feitas com contactos deslizantes para permitir um ajustamento da impedância. O braço de comprimento D também radia, podendo degradar o diagrama original do dipolo.

Para ilustrar estas técnicas de adaptação, consideremos um dipolo de meia onda à frequência de 50MHz. O comprimento L do dipolo é, portanto 3m e vamos assumir que tem um diâmetro d=2cm. Simulando este

dipolo obtém-se uma impedância de entrada $Z \approx 90 + j50\Omega$. Supondo que o pretendemos alimentar com uma linha bifilar com uma impedância característica $Z_0 = 300\Omega$, então o VSWR será aproximadamente de 3.5 que é elevado. Vamos então adaptar este dipolo a esta linha bifilar, primeiro usando um *stub* terminado em CC em paralelo com a linha, ou seja, usando a malha ilustrada na Figura 5.85(c). Usando as funcionalidades de otimização do programa 4NEC2, otimizaram-se as dimensões d e l_s , tendo-se obtido os valores de $d = 2.55\text{m}$ e $l_s = 0.59\text{m}$ para os quais a impedância “vista” pela linha passou a ser $Z \approx 299 + j2.5\Omega$ a que corresponde um $\text{VSWR} \approx 1.01$. A diretividade da antena é de cerca de 1.12dBi cerca de 1dB abaixo da dum dipolo isolado. Para além disso a largura de banda, usando o critério de $\text{VSWR} \leq 2$, vai de 48.25 a 52MHz, isto é, cerca de 7.5%.

Adaptando o dipolo à linha bifilar usando a alimentação em T e otimizando as dimensões indicadas na Figura 5.86(a), obtém-se $D = 1.8\text{m}$, $d_1 = 2\text{cm}$, $d_2 = 1\text{cm}$ e $S = 9\text{cm}$. Com estes valores a impedância “vista” pela linha passou a ser $Z \approx 296 + j0.3\Omega$ a que corresponde um $\text{VSWR} \approx 1.01$. A diretividade da antena é de cerca de 1.48dBi cerca de 0.8dB abaixo da dum dipolo isolado. A largura de banda, usando o critério de $\text{VSWR} \leq 2$, vai de 46.25 a 55MHz, isto é, cerca de 17.5%. Por este exemplo verifica-se que o acoplamento em T dá melhores resultados do que o *stub*, sobretudo no que diz respeito à largura de banda.

Outra questão importante a ter em consideração é a do equilíbrio ou balanceamento das correntes nas antenas filiformes. Nas antenas estudadas neste capítulo, com a exceção da antena helicoidal, o ponto de alimentação é a entrada dum dipolo. Num dipolo, devido à sua geometria, é fácil entender que as correntes nos seus dois braços devem ser naturalmente equilibradas ou balanceadas. Se considerarmos uma linha de transmissão bifilar também se verifica que ambos os seus condutores estão equilibrados no que diz respeito ao ambiente em redor pelo que as correntes em ambos os condutores da linha são iguais, circulando na sua superfície exterior. Por estas razões e por forma a manter o equilíbrio das correntes, a melhor forma de alimentar um dipolo deverá ser através duma linha bifilar como se indica na Figura 5.87(a).



Figura 5.87

No entanto, muitas vezes é muito mais conveniente usar um cabo coaxial em vez duma linha bifilar pelo facto do cabo coaxial ter várias vantagens sobre a linha bifilar como é explicado em [11]. Contudo num cabo coaxial os seus condutores não estão equilibrados no que diz respeito ao ambiente em redor pois o condutor interior está blindado pelo condutor exterior. Por estas razões o cabo coaxial é considerado uma linha de transmissão não balanceada.

Em condições normais, num cabo coaxial a corrente circula no exterior do condutor interior e no interior do condutor exterior, isto é, não deve haver corrente no exterior do condutor exterior por vezes designado por malha. No entanto, devido a este não balanceamento, quando se alimenta um dipolo com um cabo coaxial pode aparecer uma corrente I_e no exterior do condutor exterior do cabo que vai dar origem a uma desigual distribuição de correntes nos braços do dipolo, como se ilustra na Figura 5.87(b).

Para evitar o aparecimento desta corrente deve-se usar uma estrutura que realize a adequada transição entre o dipolo, que é balanceado e o cabo, que é não balanceado. Uma estrutura que desempenha esta função designa-se por **BALUN** cujo nome deriva das palavras **BAL**anced e **UN**balanced.

Sabe-se que uma linha de transmissão com um comprimento de $\lambda/4$ terminada em CC apresenta à entrada uma impedância infinita, isto é, tem uma corrente de entrada nula. Aproveitando esta característica, se colocarmos no fim do cabo coaxial, em paralelo com a antena, uma linha como esta em que um dos seus condutores seja a malha exterior do cabo coaxial, então a corrente nessa malha deverá ser nula. Consegue-se assim o objetivo de eliminar a corrente I_e , no exterior do condutor exterior do cabo coaxial. Um dispositivo destes é portanto um *balun*.

Uma forma de realizar um destes *baluns* é ilustrada na Figura 5.88(a). Este *balun* é conhecido como *bazooka* ou de manga. A manga e o condutor exterior do cabo coaxial formam outra linha coaxial com impedância característica Z_{o1} , terminada em CC à distância de $\lambda/4$ da sua entrada nos terminais da antena.



Figura 5.88

Outro *balun* de fácil construção que pode ser designado por *balun* de linha bifilar, está ilustrado na Figura 5.88(b). À distância de $\lambda/4$ dos terminais da antena, liga-se a malha exterior do cabo coaxial principal a outro troço de malha idêntico ao do cabo principal, com de $\lambda/4$ de comprimento. Este troço de malha juntamente com a malha exterior do cabo coaxial principal, formam uma linha bifilar de $\lambda/4$ de comprimento, com impedância característica Z_{o2} , terminada em CC. À frequência central a impedância de entrada desta linha bifilar é infinita pelo que quando colocada em paralelo com a antena não altera a sua impedância. Estes *baluns* não alteram, portanto, a impedância terminal do cabo que continua a ser a impedância de entrada da antena.

Há, contudo, estruturas que além de desempenharem a função de *balun* também produzem uma transformação de impedâncias. Uma dessas estruturas está ilustrada na Figura 5.89 e designa-se por *balun* 4:1.

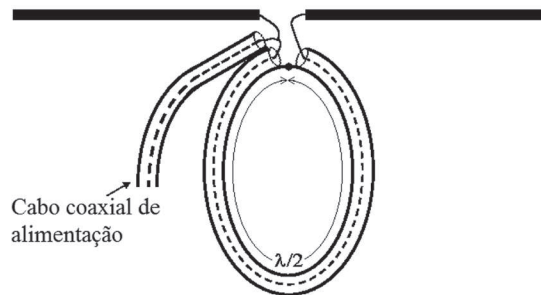
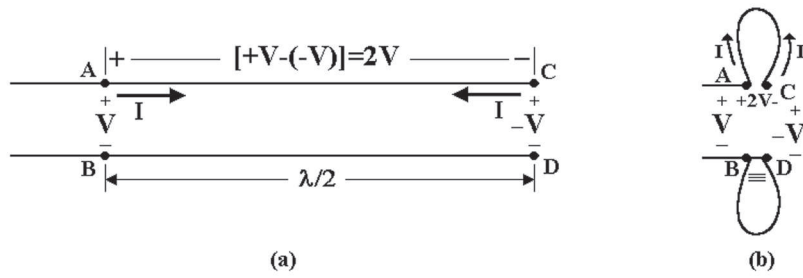


Figura 5.89 Balun de $\lambda/2$ que produz uma transformação de impedâncias de 4:1.

O funcionamento deste *balun* pode ser explicado recorrendo às figuras seguintes. Como se sabe numa linha de transmissão em dois planos separados de $\lambda/2$ as tensões e as correntes têm a mesma amplitude, mas fase invertida, tal como se mostra na Figura 5.90(a) para o caso duma linha bifilar. Na Figura 5.90(b) está ilustrada uma versão compacta da mesma situação.

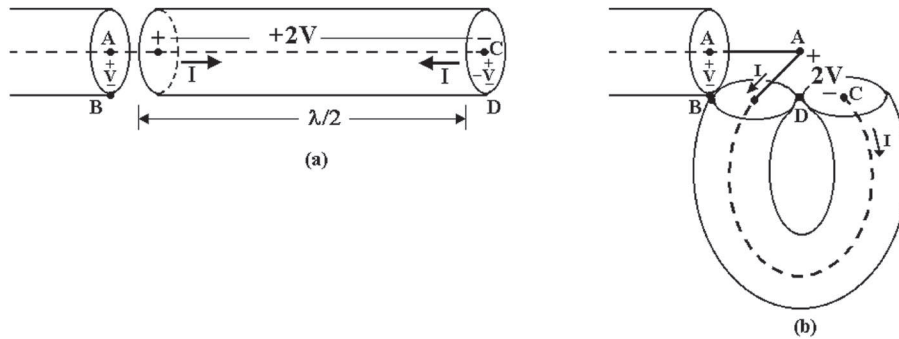


(a) Versão normal.

(b) Versão compacta.

Figura 5.90 Relação entre as tensões e correntes em dois planos duma linha de transmissão bifilar separados de $\lambda/2$.

Na Figura 5.91 está ilustrada uma versão equivalente da mesma situação para um cabo coaxial.

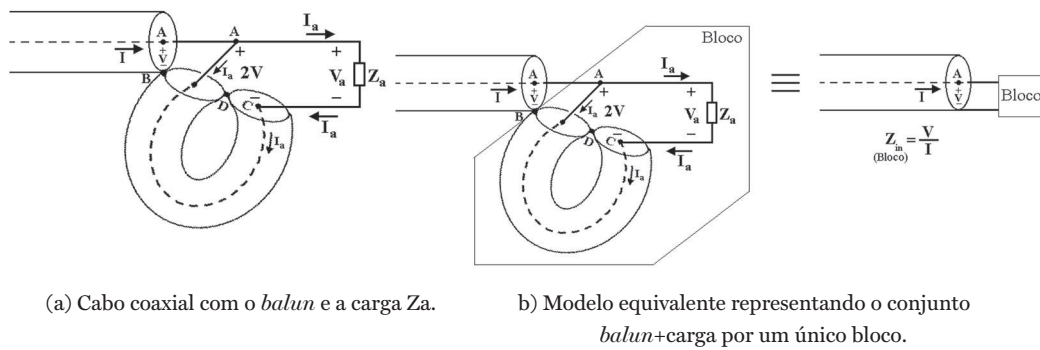


(a) Versão normal.

(b) Versão compacta.

Figura 5.91 Relação entre as tensões e correntes em dois planos dum cabo coaxial separados de $\lambda/2$.

Suponhamos que se liga entre os terminais A e C uma carga Z_a , por exemplo uma antena, tal como se mostra na Figura 5.92(a). Poderemos então afirmar que o cabo coaxial de alimentação “vê” uma impedância total Z_{in} .



(a) Cabo coaxial com o *balun* e a carga Z_a .

(b) Modelo equivalente representando o conjunto *balun*+carga por um único bloco.

Figura 5.92

Da Figura 5.92 pode-se vê-se que a impedância total Z_{in} é dada pela relação (5-112):

$$Z_{in} = \frac{V}{I} \quad (5-112)$$

Da mesma figura conclui-se que a corrente no cabo é dada pela relação (5-113):

$$I = I_a + I_a = 2I_a = 2 \frac{V}{Z_a} \quad (5-113)$$

Tendo em conta que a tensão aos terminais da carga Z_a é duas vezes a tensão do extremo do cabo, pode-se deduzir a relação (5-114) que mostra que o cabo coaxial de alimentação “vê” uma impedância total Z_{in} que é um quarto da impedância da carga.

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{V}{2I_a} Z_a = \frac{Z_a}{4} \quad (5-114)$$

Conclui-se assim que este *balun* para além de realizar esta função funciona como um transformador de impedâncias de 4 para 1. Quando se estudou o dipolo dobrado viu-se que a sua impedância de entrada é de cerca de 300Ω , com este *balun* consegue-se uma boa adaptação para um cabo de 75Ω .

Os *baluns* ilustrados anteriormente são dispositivos de banda estreita pelo facto de se basearem num funcionamento condicionado a comprimentos exatos de $\lambda/4$ e de $\lambda/2$ que ocorrem apenas a uma frequência. Para larguras de banda maiores ter-se-á que recorrer a estruturas especiais normalmente recorrendo a enrolamentos em toros de ferrite. Os *baluns* acima referidos podem ser implementados para frequências acima de VHF. Para frequências inferiores as suas dimensões começam a ser impraticáveis pelo que se recorre a componentes discretos como bobinas e condensadores para construir *baluns*.

Como nota final convém lembrar que a construção, a alimentação e a colocação em funcionamento das antenas estudadas neste capítulo dependem de pormenores práticos que podem ser muito importantes para o seu bom desempenho. Sendo assim, recomenda-se a colaboração de pessoas com experiência nesta área. A comunidade de radioamadores tem muita experiência pelo que se recomenda a consulta da referência [12] editada pela *American Radio Relay League* (ARRL) que contém muitas boas sugestões baseadas na longa experiência desta associação na construção de antenas de condutores cilíndricos sobretudo nas bandas de HF, VHF e UHF.

Referências

- [1] HARRINGTON, R. F., *Field Computation by Moment Methods*, IEEE Press, 1993.
- [2] ROCKWAY, J. and LOGAN, J., “Advances in MININEC”, *IEEE Ant. & Prop. Magazine*, Vol. 37, No. 4, pp. 7-12, August 1995.
- [3] KRAUS, J. D., *Antennas*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1988.
- [4] BALANIS, C. A., *Antenna Theory-Analysis and Design*. New York: Harper & Row, Publishers, 1982.
- [5] YAGI, H., “Beam Transmission of Ultra-Short Waves”, *Proc. IRE*, Vol. 16, June 1928, pp. 715-741.
- [6] VIEZBICKE, P. P., “Yagi Antenna Design”, NBS Technical Note 688, U.S. Government Printing Office, Washington, DC, Dec. 1976.
- [7] JASIK, H., Ed., *Antenna Engineering Handbook*. New York: McGraw-Hill, 1961, Sec. 3.3.
- [8] CARREL, Robert L., “*Analysis and Design of the Log-Periodic Dipole Antenna*”, Technical Report No. 52, Electrical Engineering Research Laboratory, Engineering Experiment Station. Urbana, Illinois: University of Illinois, 1960.
- [9] CARREL, Robert L. et al., “*Log Periodic Antenna Design Handbook*”, editor Carl E. Smith. Cleveland, OH: Smith Electronics, Inc., 1966.
- [10] STUTZMAN, Warren L.; THIELE, Gary A., *Antenna Theory and Design*. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [11] PINHO, Pedro; ROCHA, Armando; PEREIRA, José Rocha, *Propagação Guiada de Ondas Eletromagnéticas*. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- [12] *The ARRL Antenna Book for Radio Communications*. California: The American Radio Relay League, Inc., 2011, ISBN: 978-0-87259-694-8. <http://www.arrl.org/arrl-antenna-book>.

Exercícios

1- Considere um agregado transversal e uniforme de 3 dipolos de comprimento $\ell = \lambda/2$, colocados paralelamente lado a lado, separados de uma distância d .

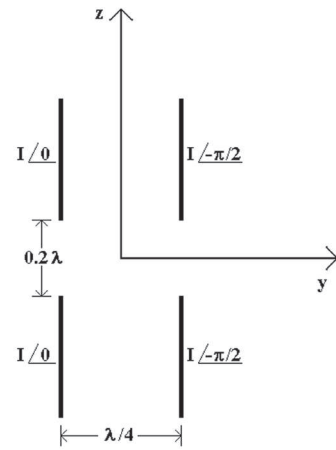
Considere que os dipolos não têm perdas e que a razão comprimento/diâmetro dos dipolos é $\ell/d = 60$.

- Determine a distância d que maximiza o ganho do agregado.
- Calcule o ganho do agregado em dBd.
- Esboce o diagrama de radiação no plano H (plano perpendicular aos dipolos).

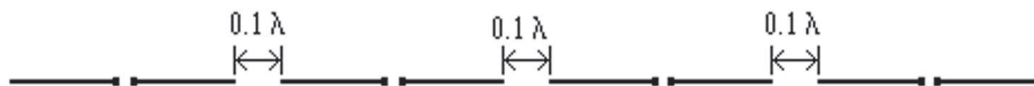
Nota: Se não conseguiu determinar a distância d , use $d=0.6\lambda$.

2- A figura seguinte representa uma antena de uma estação de radiodifusão. Os dipolos têm um comprimento $\ell = \lambda/2$ e um diâmetro $d = \ell/60$.

- Escreva a expressão do campo elétrico radiado a grande distância em função de r, θ, ϕ .
- Esboce o diagrama de radiação no plano E.
- Calcule o ganho do agregado supondo que a resistência de perdas de cada dipolo é 2Ω .



3- Considere a antena representada na figura seguinte, dimensionada para a frequência de 300MHz. Os dipolos são todos iguais e têm 500mm de comprimento e 8mm de diâmetro. Considere que eles não têm perdas e que só é significativa a impedância mútua entre dipolos adjacentes. Considere ainda que eles são alimentados com tensões iguais em amplitude e fase.



- Determine as razões entre as correntes nos dipolos.
- Escreva a expressão do campo radiado a grande distância.
- Determine o ganho da antena.

4- Considere uma antena formada por dois dipolos paralelos separados de 0.2λ . O dipolo 1 tem 0.46λ de comprimento e é alimentado com uma corrente $I_1 = 1A$. O dipolo 2 tem 0.48λ de comprimento e não é alimentado, tendo uma corrente induzida $I_2 = 0.84 \angle 159.84^\circ$.

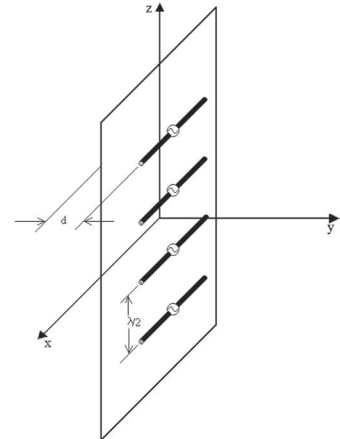
- Escreva a expressão do campo radiado a grande distância no plano perpendicular aos dipolos.
- Determine a amplitude do campo radiado a grande distância para ambos os lados do eixo que une o centro dos dipolos.
- Comparativamente à alínea b), que tipo de resultados obteria se o dipolo 2 fosse mais curto do que o dipolo 1?
- Que tipo de resultados obteria se considerasse uma antena formada por três dipolos paralelos equiespaçados, sendo o dipolo do centro o único que é alimentado e sendo os outros dois, um mais curto e outro mais comprido do que esse? Como é conhecida uma antena deste tipo?

5- Considere a antena representada na figura dimensionada para a frequência de 950MHz, constituída por 4 dipolos de 0.5λ alimentados com correntes com a mesma amplitude e a mesma fase e colocados em frente dum plano refletor.

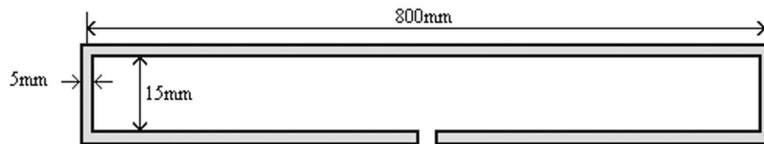
- Qual deve ser a distância d , entre o plano refletor e o plano que contem os dipolos, para que o máximo seja segundo o eixo dos yy ? Justifique.
- Escreva a expressão do campo elétrico radiado a grande distância em função de r, θ, ϕ .
- Determine o ganho da antena.
- O que teria de fazer para dirigir o máximo segundo a direção $\theta=100^\circ$; $\phi=90^\circ$?

Notas: Despreze as impedâncias mútuas entre dipolos separados de mais de 1.5λ .

Considere que a razão comprimento/diâmetro é cerca de 60.



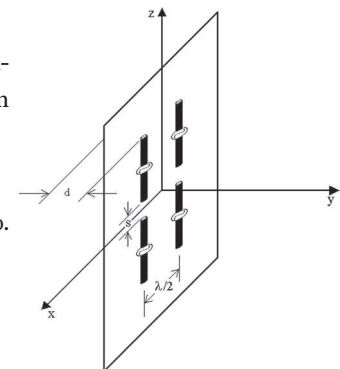
6- Calcule a impedância de entrada do dipolo dobrado representado na figura, à frequência de 300MHz.



7- Considere a antena representada na figura seguinte, dimensionada para a frequência de 950MHz, constituída por 4 dipolos de 0.5λ alimentados com correntes com a mesma amplitude e a mesma fase e colocados em frente dum plano refletor.

- Determine a distância s de modo que no plano $\phi=90^\circ$ a L.F.E.N. seja de 100° .
- Escreva a expressão do campo elétrico radiado a grande distância em função de r, θ, ϕ .
- Determine o ganho da antena.

Nota: Considere que a razão comprimento/diâmetro é cerca de 60.

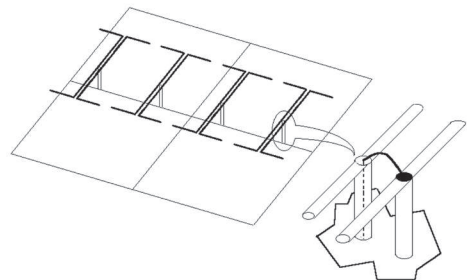


8- Considere um agregado uniforme e longitudinal constituído por 3 dipolos paralelos separados por uma distância de $\lambda/4$. O comprimento dos dipolos é de $\lambda/2$ à frequência de 300MHz. Os dipolos são feitos de tubo de alumínio com 8 mm de diâmetro ($\sigma=3.5 \times 10^7 \text{ S/m}$).

- Determine a diferença de fase entre as correntes nos dipolos.
- Calcule o ganho do agregado.

9- A figura representa uma antena duma estação base para rádio móvel destinada a funcionar com polarização vertical, à frequência de 950 MHz. A antena é um agregado uniforme de 4 subagregados. Cada subagregado é, por sua vez, um agregado uniforme de 2 dipolos de meia onda, separados de λ , ligados ao ponto de alimentação por uma linha bifilar de $\lambda/2$.

Cada subagregado está fixado ao plano refletor (plano xz) por *stubs*, que portanto estão terminados em c.c.. O pormenor desta fixação e do modo como os subagregados são alimentados, está representado na figura à direita.



- a) Explique o modo como os subagregados são alimentados e indique, justificando, qual o valor da distância dos dipolos ao plano refletor.
- b) Escreva a expressão do campo radiado a grande distância em função de r, θ, ϕ , considerando que os dipolos estão alinhados segundo o eixo dos zz .
- c) Admitindo que as correntes nos dipolos têm a mesma amplitude, determine o ganho do agregado supondo que a resistência de perdas de cada dipolo é 2Ω .

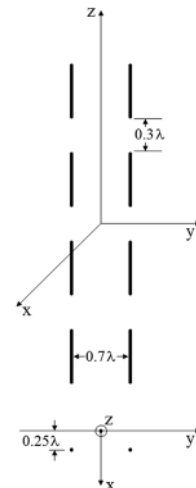
Nota: Considere que a razão comprimento/diâmetro é cerca de 60.

10- Considere a antenna representada na figura. A antenna é um agregado planar de 8 dipolos de meia onda, colocados em frente dum plano refletor, situado no plano yoz . Os dipolos são alimentados com correntes de igual amplitude e fase. As perdas são consideradas desprezáveis.

- a) Escreva a expressão do campo radiado a grande distância em função das coordenadas r, θ, ϕ .
- b) Calcule o ganho do agregado.

Nota: Tome em consideração apenas as impedâncias mútuas de dipolos colocados lado a lado a distâncias inferiores a 0.8λ e de dipolos colineares adjacentes.

- c) Esboce o diagrama de radiação no plano xoz (plano $\phi=0$).



11- Pretende-se construir uma antenna, que seja um agregado uniforme de dipolos de 0.5λ , para cobrir em polarização vertical essencialmente a região Norte. A antenna deve ter no entanto um nulo na direção SW.

- a) Projete uma antenna que satisfaça essas condições com o menor número de dipolos possível.
- b) Determine o ganho da antenna.

Nota: Considere que a razão comprimento/diâmetro é cerca de 60.

c) Depois de algum tempo em funcionamento, verificou-se ser necessário duplicar o campo elétrico, na direção do Norte, sem aumentar a potência radiada. Para resolver esta questão decidiu-se construir um novo agregado tendo por elemento base a antenna já existente. Este novo agregado não deve alterar a forma do diagrama de radiação no plano horizontal e no plano vertical deve dar origem a um lobo principal com uma largura entre nulos de aproximadamente 39° . Diga quantos elementos deve ter este agregado, admitindo que as impedâncias de entrada dos dipolos não se alteram.

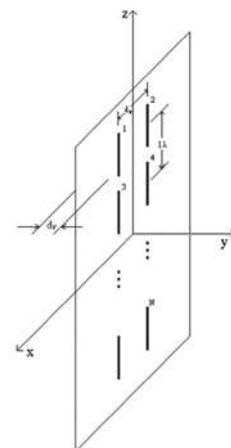
- d) Faça um esboço da estrutura deste novo agregado, evidenciando a sua colocação relativamente ao solo.
- e) Esboce os diagramas de radiação no plano horizontal e no plano vertical.

12- Considere a antenna representada na figura, formada por um agregado planar de N dipolos de 0.5λ colocado em frente dum plano refletor.

Pretende-se que a antenna tenha um diagrama de radiação no plano horizontal (plano H) com uma L.F.E.N. igual a 120° , o máximo na direção perpendicular ao plano (eixo dos yy) e um ganho de pelo menos 12 dBi.

Considerando apenas as impedâncias mútuas entre dipolos paralelos (lado alado) separados de menos de 1λ , e que a razão comprimento/diâmetro é cerca de 60:

- a) Determine a distância dx .
- b) Determine a distância dy entre o plano definido pelos dipolos e o plano refletor.
- c) Determine o número de dipolos.
- d) Calcule o ganho da antenna.
- e) Esboce os diagramas de radiação nos planos horizontal e vertical.

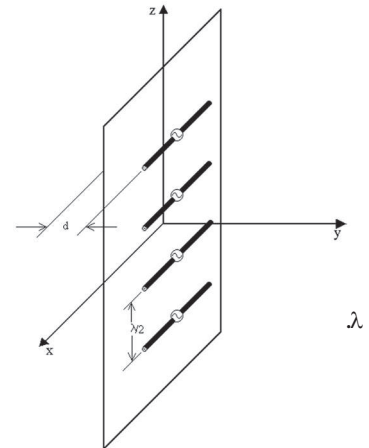


13- Considere a antena representada na figura seguinte, dimensionada para a frequência de 300MHz, constituída por 4 dipolos de 0.5λ colocados em frente dum plano refletor.

- Qual é a função do plano refletor?
- Qual deve ser a distância d , entre o plano refletor e o plano que contém os dipolos? Justifique.
- Admitindo que as correntes nos dipolos têm a mesma amplitude e a mesma fase, determine o ganho da antena.

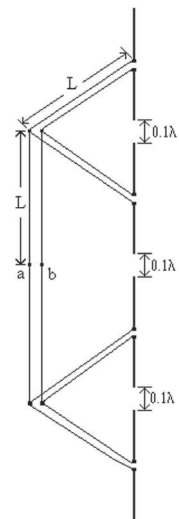
Notas: Despreze as impedâncias mútuas entre dipolos separados de mais de um λ .
Considere que a razão comprimento/diâmetro é cerca de 60.

- Escreva a expressão do campo elétrico radiado a grande distância em função de r, θ, ϕ .



14- Uma antena é constituída por 2 dipolos colocados paralelamente lado a lado, separados de 0.175λ . Um tem o comprimento de 0.485λ e é alimentado no centro, o outro tem 0.41λ e atua como elemento parasita. As perdas da antena são desprezáveis e a razão comprimento/diâmetro é cerca de 60.

- Que tipo de antena é esta?
- Sabendo que a impedância de entrada da antena é $Z_{in} = 50.5 + j23\Omega$, calcule a impedância mútua entre os dipolos.
- Determine a razão frente/trás da antena, em dB.



15- Considere a antena representada na figura dimensionada para a frequência de 300MHz. Os dipolos são todos iguais e têm 500mm de comprimento e 8mm de diâmetro. Considere que eles não têm perdas e que só é significativa a impedância mútua entre dipolos adjacentes. Os troços de linha são todos iguais e de comprimento $L = \lambda$.

- Mostre qualitativamente que os dipolos são todos alimentados com tensões iguais em amplitude e fase.
- Determine as razões entre as correntes nos dipolos.
- Determine o ganho da antena.

16- Uma antena é constituída por 2 dipolos finos de 0.5λ , colocados paralelamente lado a lado, separados por uma distância $d > 0.2\lambda$ e alimentados com correntes da mesma amplitude mas em oposição de fase.

- Otimize a distância d de modo que a parte imaginária da impedância de entrada seja a menor possível.
- Determine a direção de máxima radiação no plano perpendicular aos dipolos.
- Calcule a diretividade na direção obtida na alínea b).
- Esboce o diagrama de radiação no plano que contém os dipolos.

17- Uma antena para funcionar à frequência de 145MHz é constituída por 4 dipolos colocados paralelamente lado a lado. Um tem o comprimento de 1m e é alimentado no centro, os outros não são alimentados atuando como elementos parasitas. O maior tem 1.05m e dista 0.27m do dipolo alimentado. O terceiro tem 0.9m de comprimento, está à distância de 0.23m do dipolo alimentado, mas do lado oposto ao dipolo maior. Finalmente o quarto dipolo tem 0.8m de comprimento e está a seguir ao terceiro à distância de 0.23m.

Quando a antena é alimentada com uma tensão $V=1\angle 0^\circ$ (V) as correntes nos dipolos são as seguintes:

$$I_{(l=1.05m)} = 10\angle 100^\circ; I_{(l=1m)} = 30\angle -30^\circ; I_{(l=0.9m)} = 20\angle -150^\circ; I_{(l=0.8m)} = 10\angle 160^\circ; \text{ todas em mA.}$$

- Que tipo de antena é esta?
- Calcule a impedância de entrada da antena.
- Determine a razão frente/trás da antena, em dB.

18- Um agregado Dolph-Tschebyscheff transversal para funcionar à frequência de 300MHz é constituído por 4 dipolos com 50cm de comprimento e 8mm de diâmetro, separados de $\lambda/2$. O agregado foi projetado para ter lobos secundários 20dB abaixo do lobo principal. As correntes nos dipolos previstas pelo projeto são as seguintes: $I_1 = I_4$ e $I_2 = I_3 = 1.735 I_1$.

- Recorrendo às tabelas de impedância própria e de impedância mútua, determine as impedâncias de entrada de cada dipolo.
- Calcule o ganho do agregado.

Capítulo 6

Antenas de abertura

6.1 Introdução

Como se referiu no capítulo 1 fundamentalmente as antenas podem-se agrupar em dois grandes grupos: as antenas constituídas por fios condutores nos quais existem correntes elétricas e as antenas formadas por uma abertura onde existe uma determinada distribuição de campo eletromagnético. As antenas do primeiro grupo foram estudadas nos capítulos anteriores, as do segundo grupo serão estudadas neste capítulo.

A grande maioria das antenas usadas em micro-ondas são do tipo abertura. Como exemplo temos as cornetas eletromagnéticas que derivam de guias de onda, sendo as mais comuns as cornetas piramidais cuja abertura radiante é retangular e as cornetas cónicas cuja abertura radiante é circular. Embora possam existir aberturas não planas as mais comuns são planas pelo que limitaremos o nosso estudo a aberturas deste tipo. Além disso determinaremos os campos radiados a grande distância, isto é, usaremos nas deduções as habituais aproximações de campo distante.

Vimos no estudo das antenas constituídas por fios condutores que se obtinha o campo radiado a partir do conhecimento da distribuição da corrente ao longo dos fios. Contudo em muitos casos não é possível obter essa distribuição de corrente, tal como acontece nas antenas do tipo abertura, pelo que é necessário recorrer a métodos alternativos. Vamos dar ênfase à técnica cuja solução se baseia no conhecimento aproximado da distribuição dos campos eletromagnéticos na antena, por exemplo sobre a abertura. Esta técnica baseia-se no princípio da equivalência.

6.2 Princípio de equivalência: Princípio de Huygens

Este princípio consiste em substituir as fontes verdadeiras por outras equivalentes que produzam, na região de interesse, os mesmos campos que as fontes verdadeiras.

Consideremos que os campos fora duma superfície (imaginária) fechada podem ser obtidos colocando sobre essa superfície densidades de correntes elétricas e magnéticas adequadas de modo a satisfazerem as condições fronteira. Vamos escolher essas densidades de modo que os campos dentro dessa superfície sejam nulos e que fora dela sejam exatamente iguais aos produzidos pelas fontes verdadeiras. Na maior parte dos casos

faz-se coincidir esta superfície fechada com partes metálicas da estrutura da antena para que haja anulamento da componente tangencial do campo elétrico sobre a superfície, facilitando assim a integração. Na Figura 6.1 está ilustrado o princípio de equivalência.

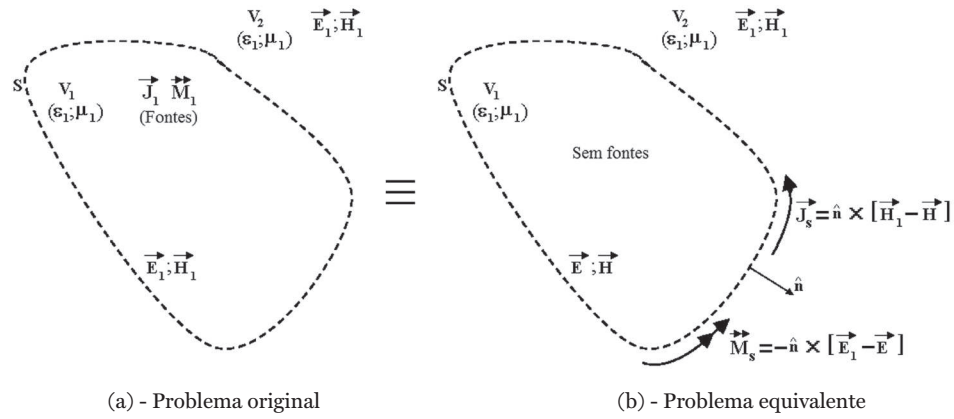


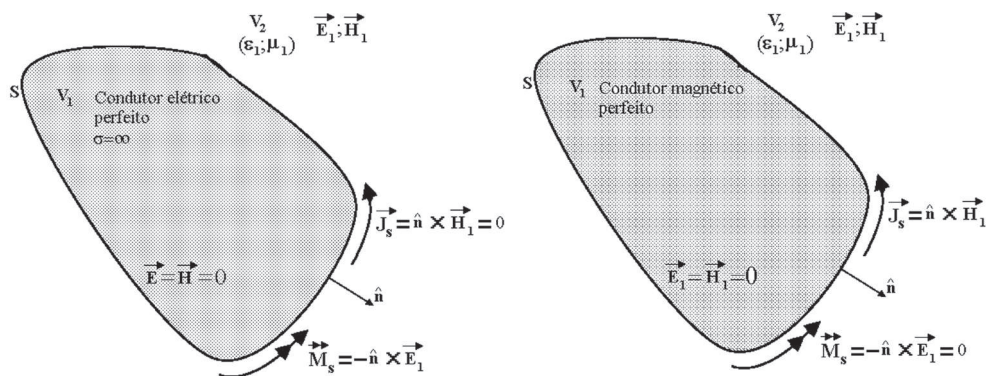
Figura 6.1 Princípio de equivalência.

Como os campos interiores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ dentro de S são arbitrários, podemos considerá-los nulos para facilitar a análise. Esta formulação de considerar nulos os campos interiores é conhecida como princípio de equivalência de Love. As densidades de corrente eléctrica e magnética sobre a superfície são então dadas pelas relações (6-1) e (6-2):

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times [\vec{H}_1 - \vec{H}]_{|H=0} = \hat{n} \times \vec{H}_1 \quad (6-1)$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times [\vec{E}_1 - \vec{E}]_{|E=0} = -\hat{n} \times \vec{E}_1 \quad (6-2)$$

Como os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ dentro de S são nulos podemos considerar que o volume V_1 é um condutor perfeito, isto é, que dentro de S $\sigma = \infty$. Isto vai influenciar a corrente $\vec{J}_s$ pois ela será curto-circuitada pelo condutor. Por outro lado, não poderemos utilizar as ferramentas que conhecemos pois estas só são válidas em meios ilimitados e homogêneos. De qualquer modo podemos considerar o modelo equivalente a esta situação representado na Figura 6.2(a). Embora não realizável fisicamente, conceptualmente podemos também considerar o modelo dual constituído por um condutor magnético perfeito dentro do volume V_1 . Neste caso é a corrente $\vec{M}_s$ que é curto-circuitada pelo condutor, tal como se ilustra na Figura 6.2(b).



(a) Modelo equivalente usando um condutor eléctrico perfeito (b) Modelo equivalente usando um condutor magnético perfeito

Figura 6.2

A questão do meio não ser homogêneo nos modelos anteriores pode ser resolvida se a superfície S for um plano. Nesse caso poderemos utilizar a teoria das imagens tal como se ilustra na Figura 6.3. Se a superfície não for

plana, mas o raio local de curvatura for grande, comparado com o comprimento de onda, ainda é razoável aplicar a teoria das imagens.

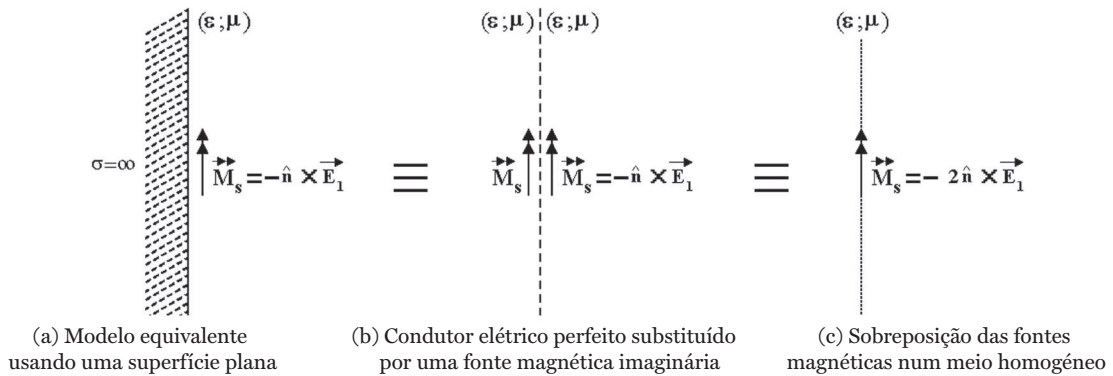


Figura 6.3

Depois destas considerações e da introdução destes modelos equivalentes podemos em resumo dizer que na maioria dos problemas eletromagnéticos é mais fácil fazer a análise recorrendo a modelos equivalentes. Para estabelecer um modelo equivalente seguiremos os seguintes passos:

- Escolher uma superfície imaginária que englobe as fontes;
- Colocar sobre esta superfície densidades de corrente elétrica $\vec{J}_s$ e magnética $\vec{M}_s$,
- Resolver o problema equivalente.

Se a superfície for plana e o meio V_1 um condutor perfeito podemos recorrer à teoria das imagens.

Exemplo 6.1

Consideremos um guia de onda retangular aberto num plano perfeitamente condutor, tal como se representa na Figura 6.4.

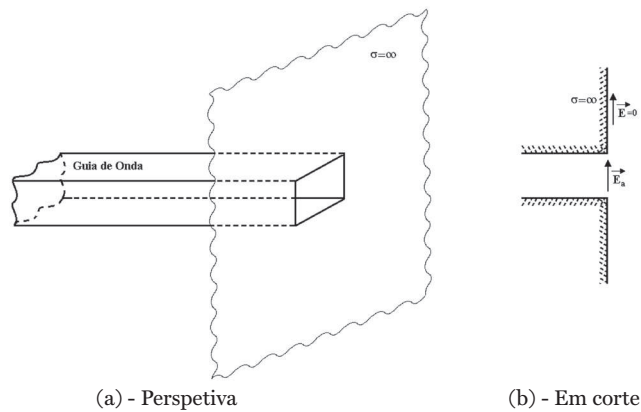


Figura 6.4 Guia de onda retangular aberto num plano condutor.

Admite-se que se conhece a distribuição dos campos elétrico $\vec{E}_a$ e magnético $\vec{H}_a$ na abertura do guia de onda, sendo $\vec{E}_a$ paralelo ao plano. Como este plano é perfeitamente condutor então em todo o plano, exceto na abertura, o campo $\vec{E}_a$ (componente tangencial) é nulo. Na Figura 6.5 mostra-se a evolução desde o problema original até ao modelo equivalente num meio homogéneo e ilimitado. Neste caso a superfície fechada imaginária que obviamente foi escolhida é um plano coincidente com o plano onde está a abertura. Pelo que foi dito atrás a densidade de corrente magnética $\vec{M}_s$ nesta superfície é nula, excepto na abertura.

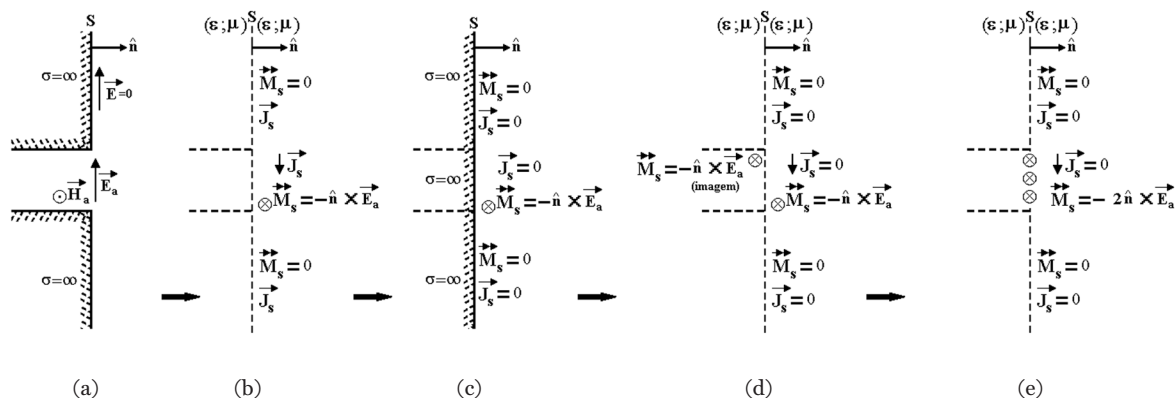


Figura 6.5 Evolução desde o problema original (a) até ao modelo equivalente num meio homogéneo e ilimitado (e).

Como se vê na Figura 6.5(c) fez-se com que o espaço à esquerda da superfície S fosse condutor perfeito, tapando a abertura com material condutor. Ao fazer isto provoca-se o anulamento da densidade de corrente elétrica $\vec{J}_s$ em todos os pontos do plano. Como se trata dum plano condutor perfeito podemos aplicar a teoria das imagens, substituindo esta situação por um modelo no qual o plano é substituído pela imagem da densidade de corrente magnética $\vec{M}_s$, Figura 6.5(d). Ao fazer isto passamos a ter um meio homogéneo no qual existe, num determinado local, uma densidade de corrente magnética $\vec{M}_s = -2\hat{n} \times \vec{E}_a$, a qual provoca em todo o meio em redor campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ que podem ser determinados a partir dos conceitos básicos já estudados válidos para meios homogéneos e isotrópicos.

6.3 Expressões do campo radiado a grande distância

Conhecendo as fontes que dão origem à radiação e assumindo que o meio que as rodeia é homogéneo é possível determinar os campos radiados. Tal com já foi explicado no capítulo 2, embora seja possível obter estes campos diretamente por integração das fontes $\vec{J}$ e $\vec{M}$ este método é raramente utilizado por ser matematicamente complexo. A alternativa mais comum é recorrer a funções auxiliares, os vetores potenciais: $\vec{A}$ (vetor potencial magnético) e $\vec{F}$ (vetor potencial elétrico) e a partir destes obter os campos radiados. Apesar deste método usar uma integração seguida duma diferenciação, é mesmo assim mais simples. Este método está ilustrado na Figura 6.6. Para mais detalhes consultar as referências [1] a [4].

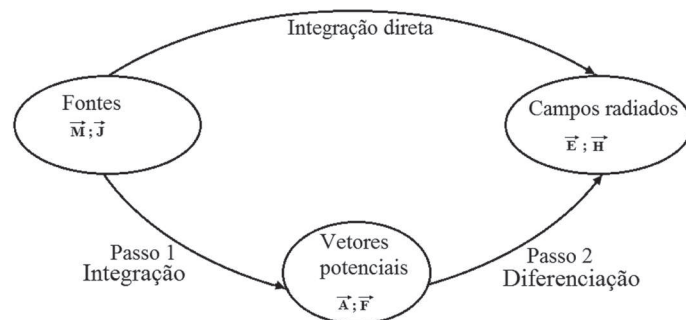


Figura 6.6 Diagrama esquemático dos processos de calcular os campos radiados por fontes elétricas e magnéticas.

Já vimos no capítulo 2 que o vetor potencial magnético $\vec{A}$ associado a uma fonte $\vec{J}$ é dado pela equação (6-3). Usando o conceito de dualidade podemos afirmar que o vetor potencial elétrico $\vec{F}$ associado a uma fonte $\vec{M}$ é dado pela equação (6-4):

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (6-3)$$

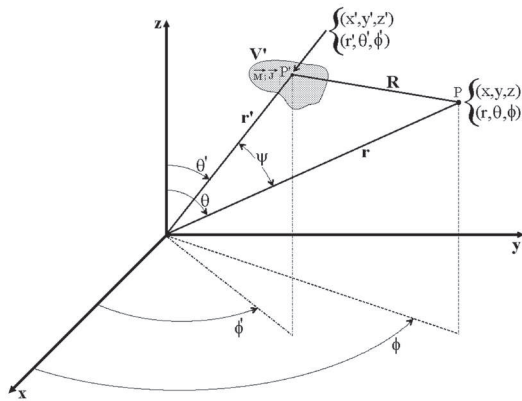
$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \vec{M} \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (6-4)$$

Destas funções podem-se obter os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ através das relações (6-5) e (6-6) tal como já vimos no capítulo 2.

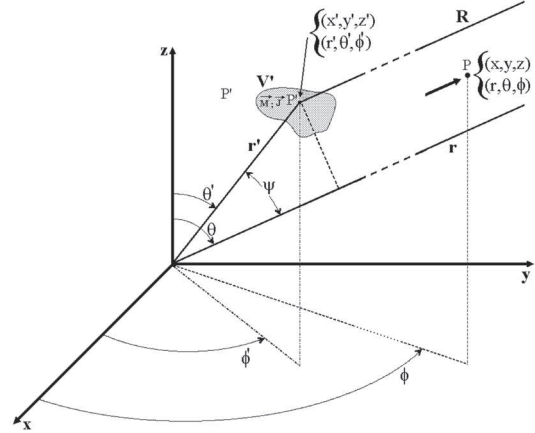
$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_F = \underbrace{-j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A})}_{\vec{E}_A} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{F}}_{\vec{E}_F} \quad (6-5)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_A + \vec{H}_F = \underbrace{\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}}_{\vec{H}_A} - \underbrace{j\omega\vec{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{F})}_{\vec{H}_F} \quad (6-6)$$

Estas relações estão baseadas no sistema de coordenadas ilustrado na Figura 6.7(a). No entanto o caso mais importante e que vamos analisar nesta secção é a determinação dos campos radiados a grande distância tal como se ilustra na Figura 6.7(b).



(a) Geometria usada para a obtenção do campo eletromagnético no ponto P gerado pelas fontes dentro do volume V'.



(b) Aproximação de campo distante.

Figura 6.7

Nestas condições usaremos as habituais aproximações de campo distante indicadas em (6-7).

$$\begin{aligned} R &\cong r - r' \cos \Psi \quad \text{para o expoente, isto é, para o termo da fase} \\ e & \\ R &\cong r \quad \text{para o denominador} \end{aligned} \quad (6-7)$$

Tendo em conta estas aproximações as equações (6-3) e (6-4) passam a ter a forma indicada em (6-8) e (6-9):

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \iiint_V \vec{\mathbf{J}} e^{jkr' \cos \Psi} dv' \quad (6-8)$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \iiint_V \vec{\mathbf{M}} e^{jkr' \cos \Psi} dv' \quad (6-9)$$

Recorrendo a uma notação mais abreviada podemos escrever as relações anteriores na forma indicada em (6-10) e (6-11):

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{\mathbf{N}} \quad \text{com} \quad \vec{\mathbf{N}} = \iiint_V \vec{\mathbf{J}} e^{jkr' \cos \Psi} dv' \quad (6-10)$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{\mathbf{L}} \quad \text{com} \quad \vec{\mathbf{L}} = \iiint_V \vec{\mathbf{M}} e^{jkr' \cos \Psi} dv' \quad (6-11)$$

Analisemos com mais detalhe o vetor potencial magnético $\vec{\mathbf{A}}$. Duma forma geral este vector pode ser escrito em coordenadas esféricas na forma indicada em (6-12):

$$\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{r}} \mathbf{A}_r(r, \theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{A}_\theta(r, \theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{A}_\phi(r, \theta, \phi) \quad \text{com:}$$

$$\mathbf{A}_r(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) \quad ; \quad (6-12)$$

$$\mathbf{A}_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_\theta(\theta, \phi);$$

$$\mathbf{A}_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_\phi(\theta, \phi)$$

Ou seja,

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{e^{-jkr}}{r} [\hat{\mathbf{r}} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{A}'_\theta(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{A}'_\phi(\theta, \phi)] \quad (6-13)$$

Vimos que a componente $\vec{\mathbf{E}}_A$ do campo $\vec{\mathbf{E}}$ é dada pela relação (6-14):

$$\vec{\mathbf{E}}_A = -j\omega \vec{\mathbf{A}} - j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) \quad (6-14)$$

Substituindo no primeiro termo de (6-14) $\vec{\mathbf{A}}$ por (6-13), podemos escrevê-lo como em (6-15):

$$-j\omega \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{r} \{-j\omega e^{-jkr} [\hat{\mathbf{r}} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{A}'_\theta(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{A}'_\phi(\theta, \phi)]\} \quad (6-15)$$

No segundo termo de (6-14) aparece o fator $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}$. Desenvolvendo este termo em coordenadas esféricas temos:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{A}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathbf{A}_\theta)}_{\mathbf{A}_\theta''(\theta, \phi)} + \frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{A}_\phi}{\partial \phi}}_{\mathbf{A}_\phi''(\theta, \phi)} \quad (6-16)$$

Desenvolvendo o primeiro termo de (6-16), obtém-se:

$$r^2 \mathbf{A}_r = r^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) = r e^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) \quad (6-17)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{A}_r) = e^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) - jkr e^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi)$$

Substituindo (6-17) em (6-16), obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} &= \frac{1}{r^2} e^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) - jk \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{A}''_{\theta}(\theta, \phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{A}''_{\phi}(\theta, \phi) \\ &= \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) \left(\frac{1}{r} - jk \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{A}''_{\theta}(\theta, \phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{A}''_{\phi}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (6-18)$$

No campo distante é aceitável assumir que $\frac{1}{r} \ll k$, pelo que se pode escrever:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{A}''_{\theta}(\theta, \phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{A}''_{\phi}(\theta, \phi) \quad (6-19)$$

Substituindo o fator $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}$, dado por (6-19), no termo $\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})$, obtém-se:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})}{\partial \phi} \quad (6-20)$$

Expandindo as derivadas parciais resultam as seguintes expressões:

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})}{\partial r} = -jk \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) \left(\frac{-jkr e^{-jkr} - e^{-jkr}}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\mathbf{A}''_{\theta}(\theta, \phi)}{\sin \theta} + \frac{\mathbf{A}''_{\phi}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \right) \right] \quad (6-21)$$

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})}{\partial r} = -k^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) + \frac{1}{r^2} (jke^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi)) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathbf{A}''_{\theta}(\theta, \phi)}{\sin \theta} + \frac{\mathbf{A}''_{\phi}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \right) \quad (6-22)$$

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \mathbf{A}^{\text{III}}(\theta, \phi) \quad (6-23)$$

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \mathbf{A}^{\text{IV}}(\theta, \phi) \quad (6-24)$$

Substituindo as expressões (6-21) a (6-24) em (6-20) obtém-se para o termo $\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}})$, a relação (6-25):

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) &= \\ \hat{\mathbf{r}} \left[-k^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) + \frac{1}{r^2} (jke^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi)) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathbf{A}''_{\theta}(\theta, \phi)}{\sin \theta} + \frac{\mathbf{A}''_{\phi}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \right) \right] &+ \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r^2} \mathbf{A}^{\text{III}}(\theta, \phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r^2} \mathbf{A}^{\text{IV}}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (6-25)$$

Substituindo (6-25) no segundo termo de (6-14), obtém-se a relação (6-26):

$$-j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left(\hat{a}_r \frac{-k^2 e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) \right) + \frac{1}{r^2} (\dots) \quad (6-26)$$

Como $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$, pode-se simplificar (6-26) obtendo-se (6-27):

$$-j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = \hat{r} \left(j \omega \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) \right) + \frac{1}{r^2} (\dots) \quad (6-27)$$

Ou ainda (6-28):

$$-j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{1}{r} [\hat{r} j \omega e^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi)] + \frac{1}{r^2} [\hat{r}(\dots) + \hat{\theta}(\dots) + \hat{\phi}(\dots)] \quad (6-28)$$

Como vamos limitar o nosso estudo ao campo distante é aceitável desprezar as componentes com dependência $\frac{1}{r^2}$ face às componentes com dependência $\frac{1}{r}$, pelo que (6-28) se pode escrever na forma simplificada (6-29):

$$-j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) \cong \frac{1}{r} [\hat{r} j \omega e^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi)] \quad (6-29)$$

Substituindo (6-15) e (6-29) em (6-14) obtém-se (6-30):

$$\vec{E} \cong \frac{1}{r} [-\hat{r} j \omega e^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) + \hat{r} j \omega e^{-jkr} \mathbf{A}'_r(\theta, \phi) - \hat{\theta} j \omega e^{-jkr} \mathbf{A}'_\theta(\theta, \phi) - \hat{\phi} j \omega e^{-jkr} \mathbf{A}'_\phi(\theta, \phi)] \quad (6-30)$$

Ou seja, atendendo às relações (6-12) a componente $\vec{E}_A$ do campo $\vec{E}$ é dada por (6-31):

$$\vec{E}_A \cong -\hat{\theta} j \omega \mathbf{A}_\theta(\theta, \phi) - \hat{\phi} j \omega \mathbf{A}_\phi(\theta, \phi) \quad (6-31)$$

Por dualidade a componente $\vec{H}_F$ do campo $\vec{H}$ é dada por (6-32):

$$\vec{H}_F \cong -\hat{\theta} j \omega \mathbf{F}_\theta(\theta, \phi) - \hat{\phi} j \omega \mathbf{F}_\phi(\theta, \phi) \quad (6-32)$$

A onda radiada associada a estes campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ é uma onda TEM e, portanto, estes campos são perpendiculares entre si e as suas componentes estão relacionadas de acordo com as expressões (6-33), onde η é a impedância característica do meio onde a onda se está a propagar.

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\theta} = \eta \Rightarrow H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta}; H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}; E_\theta = \eta H_\phi; E_\phi = -\eta H_\theta \quad (6-33)$$

Tendo em conta estas relações pode-se obter as componentes do campo $\vec{H}_A$ a partir das componentes do campo $\vec{E}_A$, dadas em (6-31), tal como se mostra em (6-34):

$$\begin{aligned} (H_A)_\theta &= -\frac{(E_A)_\phi}{\eta} = j \frac{\omega}{\eta} \mathbf{A}_\phi \\ (H_A)_\phi &= \frac{(E_A)_\theta}{\eta} = -j \frac{\omega}{\eta} \mathbf{A}_\theta \end{aligned} \quad (6-34)$$

Dum modo semelhante pode-se obter as componentes do campo $\vec{E}_F$ a partir das componentes do campo $\vec{H}_F$, dadas em (6-32), tal como se mostra em (6-35):

$$(\mathbf{E}_F)_\theta = \eta(\mathbf{H}_F)_\phi = -j\omega\eta\mathbf{F}_\phi \quad (6-35)$$

$$(\mathbf{E}_F)_\phi = -\eta(\mathbf{H}_F)_\theta = j\omega\eta\mathbf{F}_\theta$$

Em resumo podemos escrever as componentes dos campos $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{H}}$ tal como em (6-36):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &\cong 0 \\ \mathbf{E}_\theta &= (\mathbf{E}_A)_\theta + (\mathbf{E}_F)_\theta \cong -j\omega\mathbf{A}_\theta - j\omega\eta\mathbf{F}_\phi \\ \mathbf{E}_\phi &= (\mathbf{E}_A)_\phi + (\mathbf{E}_F)_\phi \cong -j\omega\mathbf{A}_\phi + j\omega\eta\mathbf{F}_\theta \\ \mathbf{H}_r &\cong 0 \\ \mathbf{H}_\theta &= (\mathbf{H}_A)_\theta + (\mathbf{H}_F)_\theta \cong j\frac{\omega}{\eta}\mathbf{A}_\phi - j\omega\mathbf{F}_\theta \\ \mathbf{H}_\phi &= (\mathbf{H}_A)_\phi + (\mathbf{H}_F)_\phi \cong -j\frac{\omega}{\eta}\mathbf{A}_\theta - j\omega\mathbf{F}_\phi \end{aligned} \quad (6-36)$$

Finalmente, tendo em conta as relações (6-10) e (6-11), podemos afirmar que as componentes dos campos $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{H}}$ radiados a grande distancia por fontes $\vec{\mathbf{J}}$ e $\vec{\mathbf{M}}$ podem ser escritas como em (6-37).

Para a dedução de (6-37) usaram-se ainda as relações $\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ e $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &\cong 0 \\ \mathbf{E}_\phi &\cong jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}(\mathbf{L}_\theta - \eta\mathbf{N}_\phi) \\ \mathbf{E}_\theta &\cong -jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}(\mathbf{L}_\phi + \eta\mathbf{N}_\theta) \\ \mathbf{H}_r &\cong 0 \\ \mathbf{H}_\theta &\cong jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\left(\mathbf{N}_\phi - \frac{\mathbf{L}_\theta}{\eta}\right) = -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} \\ \mathbf{H}_\phi &\cong -jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\left(\mathbf{N}_\theta + \frac{\mathbf{L}_\phi}{\eta}\right) = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta} \end{aligned} \quad (6-37)$$

Dum modo geral as fontes $\vec{\mathbf{J}}$ e $\vec{\mathbf{M}}$ são definidas em coordenadas retangulares como se mostra em (6-38):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}} &= J_x \hat{\mathbf{x}} + J_y \hat{\mathbf{y}} + J_z \hat{\mathbf{z}} \\ \vec{\mathbf{M}} &= M_x \hat{\mathbf{x}} + M_y \hat{\mathbf{y}} + M_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (6-38)$$

Como consequência desta representação e tendo em conta as relações (6-10) e (6-11), os vetores $\vec{\mathbf{L}}$ e $\vec{\mathbf{N}}$ serão expressos como em (6-39).

$$\vec{L} = L_x \hat{x} + L_y \hat{y} + L_z \hat{z} \text{ com}$$

$$L_x = \iiint_V \mathbf{M}_x e^{jkr' \cos \Psi} dv'; L_y = \iiint_V \mathbf{M}_y e^{jkr' \cos \Psi} dv'; L_z = \iiint_V \mathbf{M}_z e^{jkr' \cos \Psi} dv' \quad (6-39)$$

$$\vec{N} = N_x \hat{x} + N_y \hat{y} + N_z \hat{z}$$

$$N_x = \iiint_V I_x e^{jkr' \cos \Psi} dv'; N_y = \iiint_V I_y e^{jkr' \cos \Psi} dv'; N_z = \iiint_V I_z e^{jkr' \cos \Psi} dv'$$

Como vimos em (6-37) interessa-nos obter as componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$, radiados a grande distancia, em coordenadas esféricas pelo que é, portanto, necessário proceder à respetiva transformação, tal como indicada em (6-40) para o vetor $\vec{N}$.

$$N_r = N_x \cos \theta \cos \phi + N_y \cos \theta \sin \phi + N_z \cos \theta$$

$$N_\theta = N_x \cos \theta \cos \phi + N_y \cos \theta \sin \phi - N_z \sin \theta \quad (6-40)$$

$$N_\phi = -N_x \sin \phi + N_y \cos \phi$$

Dum modo semelhante obtém-se a transformação, para o vetor $\vec{L}$.

Substituindo (6-39) em (6-40) e nas homólogas do vetor $\vec{N}$, as componentes N_θ , N_ϕ , L_θ e L_ϕ , podem ser escritas como em (6-41). Não se apresenta as expressões para L_r e para N_r porque estas não constam em (6-37).

$$N_\theta = \cos \theta \cos \phi \iiint_V I_x e^{jkr' \cos \Psi} dv' + \cos \theta \sin \phi \iiint_V I_y e^{jkr' \cos \Psi} dv' - \sin \theta \iiint_V I_z e^{jkr' \cos \Psi} dv'$$

$$N_\phi = -\sin \phi \iiint_V I_x e^{jkr' \cos \Psi} dv' + \cos \phi \iiint_V I_y e^{jkr' \cos \Psi} dv' \quad (6-41)$$

$$L_\theta = \cos \theta \cos \phi \iiint_V \mathbf{M}_x e^{jkr' \cos \Psi} dv' + \cos \theta \sin \phi \iiint_V \mathbf{M}_y e^{jkr' \cos \Psi} dv' - \sin \theta \iiint_V \mathbf{M}_z e^{jkr' \cos \Psi} dv'$$

$$L_\phi = -\sin \phi \iiint_V \mathbf{M}_x e^{jkr' \cos \Psi} dv' + \cos \phi \iiint_V \mathbf{M}_y e^{jkr' \cos \Psi} dv'$$

6.4 Campo radiado por uma abertura plana situada num plano condutor perfeito

Consideremos uma abertura plana situada no plano xy que é suposto ser perfeitamente condutor, tal como se ilustra na Figura 6.8. Esta geometria é semelhante à já apresentada na Figura 6.5(a).

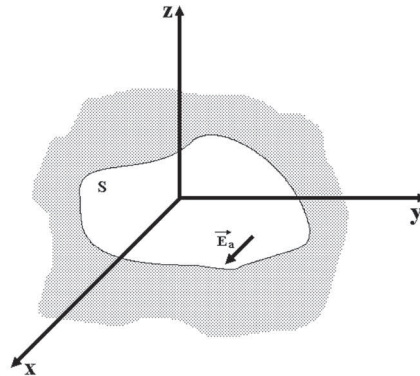


Figura 6.8 Abertura plana num condutor perfeito.

Vamos supor que na abertura há uma distribuição de campo eletromagnético caracterizado por um campo elétrico que tem apenas componente segundo o eixo dos xx . Este campo pode ser, portanto, descrito pela expressão (6-42):

$$\vec{E}_a = \hat{x}E_a(x',y') \text{ sendo } E_a(x',y') \text{ um fasor.} \quad (6-42)$$

À semelhança do que já se ilustrou na Figura 6.5, podemos substituir esta geometria por um modelo equivalente tal como se mostra na Figura 6.9.

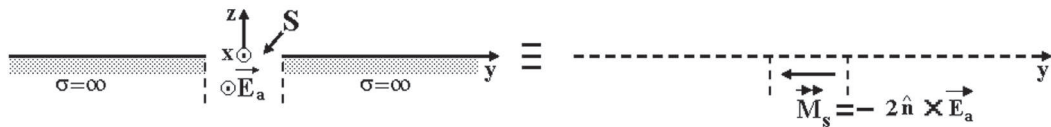


Figura 6.9 Abertura plana num condutor perfeito e respetivo modelo equivalente.

6.4.1 Equações do campo radiado a grande distância

O problema que vamos de seguida analisar é o de determinar as expressões do campo radiado a grande distância por uma superfície plana na qual há uma densidade de corrente magnética $\vec{M}_s = -2\hat{n} \times \vec{E}_a$ com $\hat{n} = \hat{z}$. A geometria a usar na análise deste problema está ilustrada na Figura 6.10.

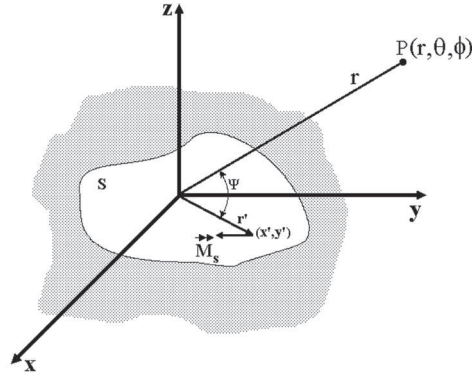


Figura 6.10 Geometria a usar na análise do problema da Figura 6.8.

Para determinar os campos radiados vamos usar as equações (6-37) combinadas com as expressões (6-41), tendo em conta que neste caso não há densidades de correntes volumétricas mas apenas uma densidade de corrente magnética $\vec{M}_S = -2\mathbf{E}_a(x', y')\hat{y}$, isto é, com $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_z = 0$ e $\mathbf{M}_y = -2\mathbf{E}_a(x', y')$. Sendo assim as expressões (6-41), passam a ser escritas como em (6-43):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\theta &= \cos\theta \sin\phi \iint_S [-2\mathbf{E}_a(x', y')] e^{jk r' \cos\Psi} ds' \\ \mathbf{N}_\theta &= \mathbf{N}_\phi = 0 \end{aligned} \quad (6-43)$$

$$\mathbf{L}_\phi = \cos\phi \iint_S [-2\mathbf{E}_a(x', y')] e^{jk r' \cos\Psi} ds'$$

O termo do expoente é dado por (6-44):

$$\begin{aligned} r' \cos\Psi &= \vec{r}' \cdot \hat{r} = (x'\hat{x} + y'\hat{y}) \cdot (\sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}) \\ r' \cos\Psi &= x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi \end{aligned} \quad (6-44)$$

Substituindo (6-44) em (6-43) obtém-se (6-45):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\theta &= -2 \cos\theta \sin\phi \iint_S \mathbf{E}_a(x', y') e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ \mathbf{L}_\phi &= -2 \cos\phi \iint_S \mathbf{E}_a(x', y') e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \end{aligned} \quad (6-45)$$

Substituindo (6-45) em (6-37), obtém-se as expressões (6-46) para o campo radiado a grande distância pela geometria da Figura 6.10.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &= j2k \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iint_S \mathbf{E}_a(x', y') e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ \mathbf{E}_\phi &= -j2k \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iint_S \mathbf{E}_a(x', y') e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ \mathbf{H}_\theta &= -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} ; \mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta} \end{aligned} \quad (6-46)$$

A amplitude do campo elétrico total é dada por (6-47):

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2} \quad (6-47)$$

$$|\mathbf{E}| = \left| \sqrt{(\cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi)} \frac{k}{2\pi r} \iint_S \mathbf{E}_a(x', y') e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} ds' \right|$$

Na região frontal da abertura, como θ é pequeno $\cos \theta \cong 1$ e, portanto, a amplitude do campo elétrico pode ser simplificada como em (6-48):

$$|\mathbf{E}| \cong \left| \frac{k}{2\pi r} \iint_S \mathbf{E}_a(x', y') e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} ds' \right| \quad (6-48)$$

6.4.2 Diretividade

Consideremos que a distribuição do campo elétrico na abertura tem fase uniforme, isto é, é descrita na forma fasorial por $\mathbf{E}_a(x', y') = E_a(x', y') \angle \Phi(x', y')$ com $\Phi(x', y') \equiv \text{constante}$. Então a distribuição do campo elétrico pode ser representada por (6-49):

$$\vec{\mathbf{E}}_a = \hat{\mathbf{x}} E_a(x', y') \quad (6-49)$$

Estando o campo na abertura em fase em todos os pontos, o campo radiado a grande distância será máximo segundo a normal à abertura, isto é, para $\theta = 0^\circ$. Com efeito pode-se entender a abertura S como formada por subaberturas todas com distribuições em fase. Os campos radiados por cada subabertura vão-se reforçar nos pontos distantes que estejam à mesma distância de cada subabertura. O lugar geométrico destes pontos é a reta normal à abertura, ou seja, o eixo dos zz , que é a direção $\theta = 0^\circ$. Podemos então usar (6-48) que para essa direção se escreve como (6-50):

$$|\mathbf{E}|_{\max} \cong \left| \frac{k}{2\pi r} \iint_S E_a(x', y') ds' \right| \quad (6-50)$$

A diretividade duma antena é dada por (6-51):

$$D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}} \quad (6-51)$$

em que a intensidade de radiação máxima $U_{\max}$ é dada por (6-52):

$$U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2 \quad (6-52)$$

e P_{rad} é a potência radiada pela antena. Considerando que não há perdas, esta potência será igual à potência que atravessa a abertura. Podemos calcular esta potência integrando ao longo de S a densidade média de potência que existe na abertura. Esta densidade média é dada como já se viu anteriormente por (6-53):

$$S_{av}(x', y') = \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}_a(x', y')|^2 = \frac{1}{2\eta} E_a^2(x', y') \quad (6-53)$$

Usando (6-53) a potência que atravessa a abertura é dada por (6-54):

$$P_{rad} = \iint_S \frac{1}{2\eta} E_a^2(x', y') ds' \quad (6-54)$$

Substituindo (6-52) e (6-54) em (6-51) e tendo em conta (6-50), a diretividade pode ser determinada por (6-55):

$$D = 4\pi \frac{r^2 \frac{1}{2\eta} \left| \frac{k}{2\pi r} \iint_S E_a(x', y') ds' \right|^2}{\iint_S \frac{1}{2\eta} E_a^2(x', y') ds'} \quad (6-55)$$

Simplificando esta expressão a diretividade pode ser expressa por (6-56):

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \iint_S E_a(x', y') ds' \right|^2}{\iint_S E_a^2(x', y') ds'} \quad (6-56)$$

Tendo em conta a definição de área efetiva dada no capítulo 1, o termo $\frac{\left| \iint_S E_a(x', y') ds' \right|^2}{\iint_S E_a^2(x', y') ds'}$ desta expressão representa a área efetiva da abertura.

Podemos concretizar melhor este aspeto recorrendo à desigualdade de Schwarz que se traduz em (6-57):

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \quad (6-57)$$

Aplicando esta desigualdade a (6-56), obtém-se (6-58):

$$\left| \iint_S E_a(x', y') ds' \right|^2 \equiv \left| \iint_S 1 E_a(x', y') ds' \right|^2 \leq \iint_S 1^2 ds' \iint_S E_a^2(x', y') ds' \quad (6-58)$$

Desta desigualdade resulta (6-59):

$$\frac{\left| \iint_S E_a(x', y') ds' \right|^2}{S \iint_S E_a^2(x', y') ds'} \leq 1 \quad (6-59)$$

Ou seja, (6-60):

$$\frac{\left| \iint_S E_a(x', y') ds' \right|^2}{\iint_S E_a^2(x', y') ds'} \leq S \quad (6-60)$$

A relação entre área efetiva duma abertura e a sua área física é $A_{ef} = e_{ab} A_f$, em que e_{ab} é designada por eficiência da abertura.

Sendo o termo $\frac{\left| \iint_S E_a(x', y') ds' \right|^2}{\iint_S E_a^2(x', y') ds'}$ a área efectiva da abertura e S a sua área física, podemos então concluir que a eficiência da abertura é dada por (6-61):

$$e_{ab} = \frac{1}{S} \frac{\left| \iint_S \mathbf{E}_a(\mathbf{x}', \mathbf{y}') d\mathbf{s}' \right|^2}{\iint_S E_a^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}') d\mathbf{s}'} \leq 1 \quad (6-61)$$

Desta relação vê-se que se a distribuição do campo na abertura for constante, isto é, se $\mathbf{E}_a$ for uniforme, a eficiência da abertura é máxima. Em conclusão, a máxima diretividade duma abertura com área física S é dada por (6-62) e acontece quando ao longo da abertura se impõe um campo uniforme.

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S \quad (6-62)$$

6.5 Campo radiado por uma abertura plana rectangular com distribuição uniforme

Consideremos uma abertura plana rectangular situada no plano xy que é suposto ser perfeitamente condutor, tal como se ilustra na Figura 6.11. Esta geometria é semelhante à já apresentada na Figura 6.10.

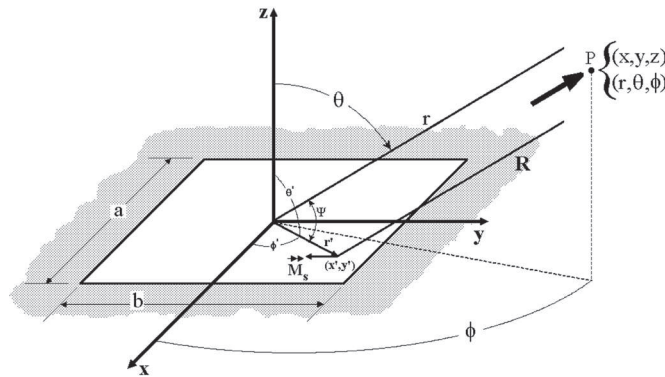


Figura 6.11 Abertura rectangular situada num plano perfeitamente condutor.

Vamos supor que na abertura há uma distribuição uniforme de campo eletromagnético caracterizado por um campo elétrico que tem apenas componente segundo o eixo dos xx . Este campo pode ser, portanto, descrito pela expressão (6-63):

$$\vec{\mathbf{E}}_a = \hat{\mathbf{x}} E_a(x', y') \quad \text{sendo } E_a(x', y') = E_0 \quad \text{com } E_0 \text{ constante.} \quad (6-63)$$

Tal como fizemos anteriormente podemos considerar o modelo equivalente constituído por uma superfície plana na qual há uma densidade de corrente magnética $\vec{\mathbf{M}}_S = -2\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}_a$ com $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, isto é, $\vec{\mathbf{M}}_S = -\hat{\mathbf{y}} 2E_0$ na abertura e nula em todo o resto da superfície. Em toda a superfície, incluindo a abertura, a densidade de corrente elétrica é nula, $\vec{\mathbf{J}}_S = 0$.

6.5.1 Equações do campo radiado a grande distância

Os campos radiados a grande distância são dados pelas equações (6-46) e (6-47). O integral que aparece nestas equações pode ser neste caso escrito como em (6-64):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \iint_S E_a(x', y') e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ &= E_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jkx' \sin\theta \cos\phi} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{jky' \sin\theta \sin\phi} dy' \end{aligned} \quad (6-64)$$

Resolvendo estes integrais obtém-se (6-65):

$$\mathbf{I} = E_0 \left[\frac{e^{jkx' \sin\theta \cos\phi}}{jk \sin\theta \cos\phi} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{e^{jky' \sin\theta \sin\phi}}{jk \sin\theta \sin\phi} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = E_0 \frac{2j \sin(k \frac{a}{2} \sin\theta \cos\phi)}{jk \sin\theta \cos\phi} \frac{2j \sin(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi)}{jk \sin\theta \sin\phi} \quad (6-65)$$

que pode ser escrita como (6-66):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= E_0 ab \frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi} \\ &= E_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi\right) \end{aligned} \quad (6-66)$$

Substituindo este integral nas equações (6-46) e (6-47) obtém-se para as componentes do campo elétrico radiado a grande distância por esta abertura as expressões (6-67):

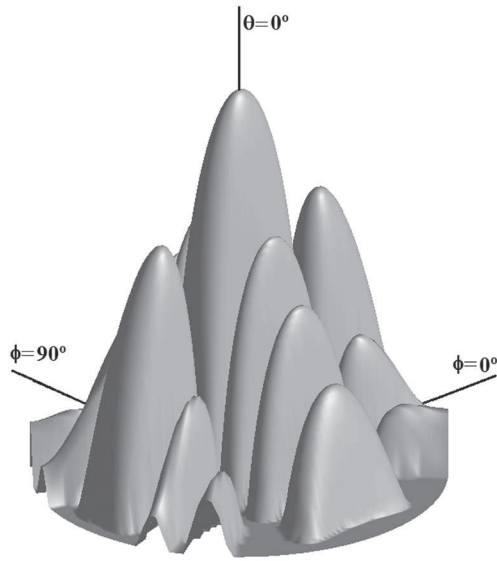
$$\mathbf{E}_\theta = j2k \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi\right) \quad (6-67)$$

$$\mathbf{E}_\phi = -j2k \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi\right)$$

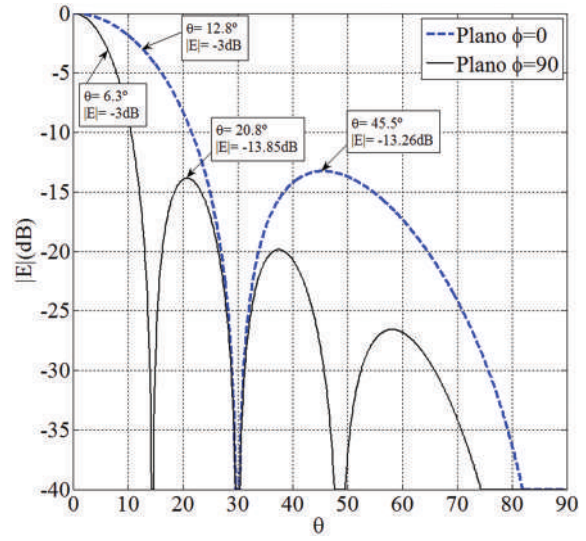
Sendo a amplitude do campo total dada por (6-68):

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{(\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi)} \frac{k}{2\pi r} E_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi\right) \quad (6-68)$$

Na Figura 6.12(a) está ilustrado o diagrama 3D, em dB, produzido pela abertura da Figura 6.11 com $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$.



(a) - Diagrama 3D



(b) - Diagramas 2D

Figura 6.12 Diagramas em dB da abertura retangular da Figura 6.11 com $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$.

Normalmente o que tem mais interesse são os cortes deste diagrama nos planos principais $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$. No plano $\phi = 0^\circ$ as componentes do campo são as dadas em (6-69):

$$\mathbf{E}_\theta = jk \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} E_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} \sin\theta\right) = jk \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} E_0 ab \frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta} \quad (6-69)$$

$$\mathbf{E}_\phi = 0$$

No plano $\phi = 90^\circ$ as componentes do campo são as dadas em (6-70):

$$\mathbf{E}_\theta = 0$$

$$\mathbf{E}_\phi = -jk \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \cos\theta E_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} \sin\theta\right) = -jk \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} E_0 ab \cos\theta \frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta} \quad (6-70)$$

Os diagramas nestes planos para a abertura da Figura 6.11 com $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$ estão representados na Figura 6.12(b).

6.5.1.1 Principais características do diagrama de radiação

- Direção do máximo

O máximo da função $\frac{\text{sen } x}{x}$ verifica-se para $x=0$. Portanto, quer no plano $\phi = 0^\circ$, quer no plano $\phi = 90^\circ$, o máximo do diagrama ocorre para $\theta = 0^\circ$.

- Direção dos mínimos

Os nulos ocorrem quando o argumento da função seno é igual a $n\pi$ com $n=1,2,3,\dots$. Sendo assim, os mínimos no plano $\phi = 0^\circ$ são dados pela expressão (6-71) e no plano $\phi = 90^\circ$ são dados pela expressão (6-72).

$$\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta_n = n\pi \quad \text{ou seja,} \quad \theta_n = \text{sen}^{-1} \left(n \frac{\lambda}{a} \right) \quad \text{com } n = 1, 2, 3 \dots \quad (6-71)$$

$$\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen} \theta_n = n\pi \quad \text{ou seja,} \quad \theta_n = \text{sen}^{-1} \left(n \frac{\lambda}{b} \right) \quad \text{com } n = 1, 2, 3 \dots \quad (6-72)$$

Para a abertura da Figura 6.11 com $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$ o primeiro mínimo, no plano $\phi = 0^\circ$, ocorre portanto para $\theta_1 = \text{sen}^{-1} \left(1 \frac{\lambda}{2\lambda} \right)$, isto é, para $\theta_1 = 30^\circ$ e no plano $\phi = 90^\circ$, ocorre para $\theta_1 = \text{sen}^{-1} \left(1 \frac{\lambda}{4\lambda} \right)$, isto é, para $\theta_1 = 14.47^\circ$ tal como se pode confirmar na Figura 6.12(b).

- Largura de feixe entre os primeiros nulos (LFPN)

Um dos parâmetros importantes dum diagrama de radiação é a largura de feixe entre os primeiros nulos (LFPN). Do ponto anterior decorre que no plano $\phi = 0^\circ$ a LFPN é dada pela expressão (6-73) e no plano $\phi = 90^\circ$ é dada pela expressão (6-74).

$$\text{LFPN} = 2 \theta_1 = 2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\lambda}{a} \right) \quad (6-73)$$

$$\text{LFPN} = 2 \theta_1 = 2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\lambda}{b} \right) \quad (6-74)$$

Para a abertura que temos vindo a considerar teremos, portanto, $\text{LFPN} = 60^\circ$ no plano $\phi = 0^\circ$ e $\text{LFPN} = 28.94^\circ$ e no plano $\phi = 90^\circ$.

- Largura de feixe a meia potência (LFMP)

Outro parâmetro importante dum diagrama de radiação é a direção θ_h para a qual a potência é metade da obtida na direcção de máximo.

Em termos de campo isso corresponde, em termos normalizados, ao valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Consultando uma tabela da função $\frac{\text{sen } x}{x}$ verifica-se que isso ocorre para $x \cong 1.391$.

Sendo assim, no plano $\phi = 0^\circ$, a direção para a qual a potência é metade da obtida na direcção de máximo é dada pela expressão (6-75):

$$\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta_h = 1.391 \quad \text{ou seja,} \quad \theta_h = \pm \text{sen}^{-1} \left(\frac{1.391 \lambda}{\pi a} \right) \quad (6-75)$$

A faixa angular dentro do lobo principal, compreendida entre as duas direções de meia potência é designada por largura de feixe a meia potência (LFMP), isto é, $LFMP = 2\theta_h$. No exemplo que estamos a considerar, no plano $\phi = 0^\circ$ a LFMP é dada pela expressão (6-76):

$$LFMP = 2\theta_h = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1.391}{\pi/2} \right) = 2 \times 12.79^\circ = 25.6^\circ \quad (6-76)$$

No plano $\phi = 90^\circ$ em rigor temos que ter em conta o termo $\cos \theta$, contudo nesta região da meia potência ele tem um valor próximo da unidade pelo que ainda podemos usar as expressões anteriores. Então, neste exemplo, no plano $\phi = 90^\circ$ a LFMP é dada aproximadamente pela expressão (6-77):

$$LFMP = 2\theta_h \cong 2 \sin^{-1} \left(\frac{1.391}{\pi/4} \right) = 2 \times 6.3^\circ = 12.6^\circ \quad (6-77)$$

Em dB, meia potência corresponde a -3dB. Na Figura 6.12(b) estão assinaladas marcas que correspondem a valores próximos de -3dB. No plano $\phi = 0^\circ$ a -3dB corresponde um ângulo de 12.8° , muito próximo do valor previsto por (6-76) e no plano $\phi = 90^\circ$ a -3dB corresponde um ângulo de 6.3° , igual ao valor previsto por (6-77).

- Direção e nível do primeiro lóbulo secundário

No plano $\phi = 0^\circ$, o diagrama é descrito pela função $\frac{\sin x}{x}$. Estudando esta da função, verifica-se que o primeiro lóbulo secundário ocorre para $x \cong 4.493$.

Sendo assim, no plano $\phi = 0^\circ$, a direção para a qual se verifica o primeiro máximo secundário é dada pela expressão (6-78):

$$\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta_s = 4.493 \quad \text{ou seja,} \quad \theta_s = \sin^{-1} \left(\frac{4.493 \lambda}{\pi a} \right) \quad (6-78)$$

No exemplo corrente, no plano $\phi = 0^\circ$ esta direção é dada pela expressão (6-79):

$$\theta_s = \sin^{-1} \left(\frac{4.493}{\pi/2} \right) = 45.65^\circ \quad (6-79)$$

O nível do primeiro lóbulo secundário é o valor dado em (6-80):

$$|E_\theta(\theta = \theta_s)| = \left| \frac{\sin(4.493)}{4.493} \right| = 0.217 \equiv 20 \log(0.217) = -13.26 \text{ dB} \quad (6-80)$$

Na Figura 6.12(b) estão assinaladas marcas que correspondem a valores próximos destes aqui deduzidos.

A direção para a qual se verifica o primeiro máximo secundário pode ser aproximadamente obtida considerando que ela coincide com o primeiro máximo do termo $\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta)$, depois da passagem pelo valor nulo, ou seja quando $\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta = \frac{3\pi}{2}$. Usando esta aproximação teremos $\theta_s = \sin^{-1} \left(\frac{3\lambda}{2a} \right)$, que no exemplo em causa corresponde ao valor dado em (6-81):

$$\theta_s = \sin^{-1} \left(\frac{3}{2 \times 2} \right) = 48.59^\circ \quad (6-81)$$

Pela mesma aproximação o nível do primeiro lóbulo secundário será o valor dado em (6-82):

$$|E_\theta(\theta = \theta_s)| = \left| \frac{2}{3\pi} \right| = 0.2122 \equiv 20 \log(0.2122) = -13.46 \text{ dB} \quad (6-82)$$

No plano $\phi = 90^\circ$ em rigor temos que ter em conta o termo $\cos \theta$, contudo ainda podemos usar a expressão (6-78), com a substituído por b, para obter um valor aproximado para a direção do primeiro máximo secundário, ou seja $\theta_s = \sin^{-1} \left(\frac{4.493 \lambda}{\pi b} \right) \theta_s = \sin^{-1} \left(\frac{4.493 \lambda}{\pi b} \right)$.

No exemplo que temos vindo a considerar isso corresponde ao valor dado em (6-83):

$$\theta_s = \sin^{-1}\left(\frac{4.493}{\pi 4}\right) = 20.95^\circ \quad (6-83)$$

Usando este ângulo, o nível do primeiro lóbulo secundário é o valor dado em (6-84):

$$|\mathbf{E}_\Phi(\theta = \theta_s)| = \cos(20.95^\circ) \left| \frac{\sin(4.493)}{4.493} \right| = 0.933 \times 0.217 = 0.202 \equiv -13.87\text{dB} \quad (6-84)$$

Na Figura 6.12(b) estão assinaladas marcas que correspondem a valores próximos destes aqui deduzidos.

6.6 Campo radiado por uma abertura plana retangular com distribuição cosinusoidal

Para o estudo deste caso vamos considerar uma abertura plana retangular situada no plano xy que é suposto ser perfeitamente condutor, tal como se ilustra na Figura 6.11, com uma distribuição de campo eletromagnético dada por $\mathbf{E}_a(x', y') = E_a(x', y') \angle \Phi(x', y')$ sendo $E_a(x', y') = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{b} y'\right)$ uma amplitude do tipo cossinusoidal e $\Phi(x', y') \equiv \text{constante}$, isto é, uma fase uniforme. Consideremos ainda que o campo elétrico tem apenas componente segundo o eixo dos xx , sendo, portanto, descrito pela expressão (6-85):

$$\vec{\mathbf{E}}_a = \hat{\mathbf{x}} E_a(x', y') \text{ sendo } E_a(x', y') = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{b} y'\right) \text{ com } E_0 \text{ constante.} \quad (6-85)$$

Tal como fizemos anteriormente podemos considerar o modelo equivalente constituído por uma superfície plana na qual há uma densidade de corrente magnética $\vec{\mathbf{M}}_S = -\hat{\mathbf{y}} 2E_a$ na abertura e nula em todo o resto da superfície. Em toda a superfície, incluindo a abertura, a densidade de corrente elétrica é nula, $\vec{\mathbf{J}}_S = 0$.

6.6.1 Equações do campo radiado a grande distância

Os campos radiados a grande distância são dados pelas equações (6-46) e (6-47). O integral que aparece nestas equações pode ser neste caso escrito como em (6-86):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \iint_S E_a(x', y') e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ &= E_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jkx' \sin\theta \cos\phi} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{b} y'\right) e^{jky' \sin\theta \sin\phi} dy' \end{aligned} \quad (6-86)$$

O primeiro destes integrais já foi resolvido anteriormente e dá a expressão (6-87):

$$\frac{2 \sin(k \frac{a}{2} \sin\theta \cos\phi)}{k \sin\theta \cos\phi} \quad (6-87)$$

Para resolver o segundo integral começemos por introduzir a constante $B = k \sin\theta \sin\phi$ e lembrar que

$$\cos\left(\frac{\pi}{b} y'\right) = \frac{e^{j\frac{\pi}{b} y'} + e^{-j\frac{\pi}{b} y'}}{2}.$$

Tendo isto em conta a função integranda pode ser escrita como (6-88):

$$\cos\left(\frac{\pi}{b} y'\right) e^{jBy'} = \frac{e^{j(B + \frac{\pi}{b})y'} + e^{-j(B - \frac{\pi}{b})y'}}{2} \quad (6-88)$$

O segundo integral fica assim desdobrado nos dois seguintes como se mostra em (6-89):

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{e^{j(B + \frac{\pi}{b})y'}}{2} dy' + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{e^{-j(B - \frac{\pi}{b})y'}}{2} dy' \quad (6-89)$$

que resolvidos dão (6-90):

$$\frac{1}{2} \left[\frac{e^{j(B + \frac{\pi}{b})y'}}{j(B + \frac{\pi}{b})} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-j(B - \frac{\pi}{b})y'}}{j(B - \frac{\pi}{b})} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{B + \frac{\pi}{b}} \sin\left(B \frac{b}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{B - \frac{\pi}{b}} \sin\left(B \frac{b}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (6-90)$$

Lembrando que $\sin\left(B \frac{b}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(B \frac{b}{2}\right)$ e que $\sin\left(B \frac{b}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(B \frac{b}{2}\right)$, substituindo em (6-90) obtém-se (6-91):

$$\cos\left(B \frac{b}{2}\right) \left(\frac{1}{B + \frac{\pi}{b}} - \frac{1}{B - \frac{\pi}{b}} \right) = \cos\left(B \frac{b}{2}\right) \left(-\frac{2 \frac{\pi}{b}}{B^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \right) \quad (6-91)$$

Após algumas manipulações pode-se obter para o segundo integral de (6-86), a expressão (6-92):

$$-\pi \frac{b}{2} \frac{\cos\left(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi\right)}{\left(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \quad (6-92)$$

Substituindo (6-87) e (6-92) no integral de (6-86), este passa a ser dado por (6-93):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \iint_S \mathbf{E}_a(x', y') e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ &= E_0 a \frac{\sin(k \frac{a}{2} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \left(-\pi \frac{b}{2} \right) \frac{\cos(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi)}{\left(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \end{aligned} \quad (6-93)$$

Substituindo este integral nas equações (6-46) e (6-47) obtém-se as componentes do campo elétrico radiado a grande distância por esta abertura, dadas pelas expressões (6-94):

$$\mathbf{E}_\theta(r, \theta, \phi) = -jk \frac{e^{-jkr}}{4r} E_0 ab \cos\phi \frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \frac{\cos(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi)}{\left(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \quad (6-94)$$

$$\mathbf{E}_\phi(r, \theta, \phi) = jk \frac{e^{-jkr}}{4r} E_0 ab \cos\theta \sin\phi \frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \frac{\cos(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi)}{\left(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2}$$

Sendo a amplitude do campo total dada por (6-95):

$$|\mathbf{E}| = \left| \sqrt{(\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi)} \frac{k}{4r} E_0 ab \frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \frac{\cos(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi)}{\left(k \frac{b}{2} \sin\theta \sin\phi \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \right| \quad (6-95)$$

6.6.1.1 Principais características do diagrama de radiação

Os diagramas nos planos principais $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$ têm como componentes do campo elétrico respectivamente, (6-96), (6-69) e (6-97).

$$\mathbf{E}_\theta(r, \theta) = -jk \frac{e^{-jkr}}{4r} E_0 ab \frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta} \frac{1}{-\left(\frac{\pi}{2} \right)^2}$$

Ou seja,

$$|\mathbf{E}_\theta(r, \theta)| = \frac{2E_0 ab}{\lambda \pi r} \left| \frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta} \right| \quad (6-96)$$

$$\mathbf{E}_\phi(r, \theta) = 0$$

$$\mathbf{E}_\theta = 0$$

$$\mathbf{E}_\phi(r, \theta) = jk \frac{e^{-jkr}}{4r} E_0 ab \cos\theta \frac{\cos\left(k \frac{b}{2} \sin\theta\right)}{\left(k \frac{b}{2} \sin\theta\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \quad (6-97)$$

Ou seja,

$$|\mathbf{E}_\phi(r, \theta)| = \frac{E_0 ab \pi}{2\lambda r} |\cos\theta| \left| \frac{\cos\left(k \frac{b}{2} \sin\theta\right)}{\left(k \frac{b}{2} \sin\theta\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right|$$

Os diagramas nestes planos, para uma abertura com $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$ estão representados na Figura 6.13.

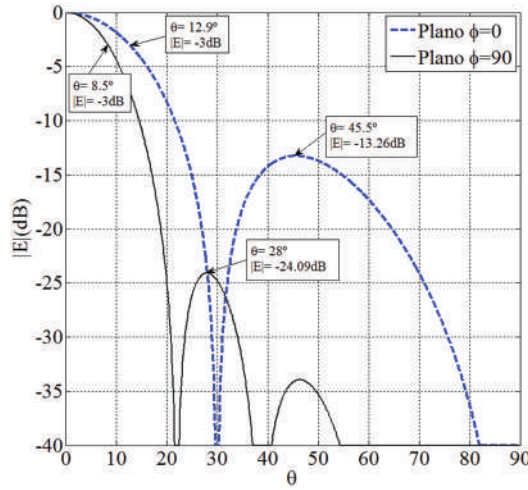


Figura 6.13 Diagramas duma abertura retangular com distribuição cossinusoidal. $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$.

- Direção do máximo

O máximo do diagrama ocorre para $\theta = 0^\circ$. O seu valor é $|\mathbf{E}|_{\max} = \frac{2E_0 ab}{\lambda \pi r}$ como se pode verificar pelas expressões quer no plano $\phi = 0^\circ$ quer no plano $\phi = 90^\circ$.

- Direção dos mínimos

Os mínimos no plano $\phi = 0^\circ$ são dados pela expressão (6-71). No plano $\phi = 90^\circ$ são dados pela expressão (6-98).

$$\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{ou seja,} \quad \theta_n = \sin^{-1} \left[(2n + 1) \frac{\lambda}{2b} \right] \quad \text{com } n = 1, 2, 3 \dots \quad (6-98)$$

- Largura de feixe entre os primeiros nulos (LFPN)

Do ponto anterior decorre que no plano $\phi = 0^\circ$ a LFPN é dada pela expressão (6-73). No plano $\phi = 90^\circ$ é dada pela expressão (6-99).

$$\text{LFPN} = 2 \theta_1 = 2 \sin^{-1} \left(\frac{3 \lambda}{2 b} \right) \quad (6-99)$$

Para a abertura que temos vindo a considerar teremos, portanto, $\text{LFPN} = 60^\circ$ no plano $\phi = 0^\circ$ e $\text{LFPN} = 44^\circ$ e no plano $\phi = 90^\circ$.

- Largura de feixe a meia potência (LFMP)

Tal como no caso anterior, no plano $\phi = 0^\circ$ a direcção para a qual a potência é metade da obtida na direcção de máximo é dada pela expressão (6-75) sendo, portanto, a LFMP dada pela expressão (6-76).

Para o plano $\phi = 90^\circ$ não é fácil deduzir uma fórmula exata para a LFMP. Nas referências [1] e [5] os autores dão como expressão aproximada (6-100):

$$\text{LFMP} = 2\theta_h \cong 68.8 \frac{\lambda}{b} (^\circ) \quad (6-100)$$

Em dB, meia potência corresponde a -3dB. Na Figura 6.13 estão assinaladas marcas que correspondem a valores próximos de -3dB. No plano $\phi = 0^\circ$ a -3dB corresponde um ângulo de 12.9° , ou seja, uma LFMP de 25.8° , próxima da prevista por (6-76). No plano $\phi = 90^\circ$ para -3dB corresponde um ângulo de 8.5° , isto é, uma LFMP de 17° , muito próxima da prevista por (6-100).

- Direcção e nível do primeiro lóbulo secundário

Tal como no caso anterior, no plano $\phi = 0^\circ$ a direcção para a qual se verifica o primeiro máximo secundário é dada pela expressão (6-78). O nível do primeiro lóbulo secundário é o valor dado em (6-80).

Para o plano $\phi = 90^\circ$ não é fácil deduzir uma fórmula exata para a direcção para a qual se verifica o primeiro máximo secundário. Nas referências [1] e [5] os autores dão como valor aproximado para o nível do primeiro lóbulo secundário -23dB.

Na Figura 6.13 estão assinaladas marcas que correspondem a valores destes parâmetros. No plano $\phi = 0^\circ$ a direcção para a qual se verifica o primeiro máximo secundário é 45.5° e o correspondente nível é de -13.26dB. No plano $\phi = 90^\circ$ a direcção para a qual se verifica o primeiro máximo secundário é 28° e o correspondente nível é de -24dB.

- Diretividade e eficiência de abertura

A diretividade duma antena é dada por $D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}}$, em que $U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2$. Como $|\mathbf{E}|_{\max} = \frac{2E_0 ab}{\lambda \pi}$, então a intensidade de radiação máxima $U_{\max}$ é dada por (6-101).

$$U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2 = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{ab}{\lambda}\right)^2 \frac{E_0^2}{\eta} \quad (6-101)$$

A potência radiada que é a que atravessa a abertura é dada por (6-102)

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2\eta} \iint_S \left[E_0 \cos\left(\frac{\pi}{b} y'\right) \right]^2 ds' = \frac{E_0^2}{2\eta} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{b} y'\right) \right]^2 dy' \quad (6-102)$$

ou ainda,

$$P_{\text{rad}} = \frac{E_0^2}{2\eta} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{b} y'\right) \right] dy' = \frac{E_0^2}{2\eta} a \frac{1}{2} b = \frac{E_0^2}{4\eta} ab \quad (6-103)$$

Substituindo (6-101) e (6-103) na fórmula da diretividade obtém-se (6-104).

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{8}{\pi^2} ab \quad (6-104)$$

Como já vimos anteriormente a diretividade é $D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{ef}}$, com $A_{\text{ef}} = e_{ab} A_f$. Como a área física desta abertura é $A_f = ab$, de (6-104) podemos concluir que a eficiência de abertura desta abertura é $e_{ab} = \frac{8}{\pi^2} \cong 81\%$.

Na Figura 6.14 mostra-se a comparação entre os diagramas de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ de duas aberturas semelhantes ambas com $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$ mas, tendo uma distribuição uniforme e outra distribuição cossinusoidal.

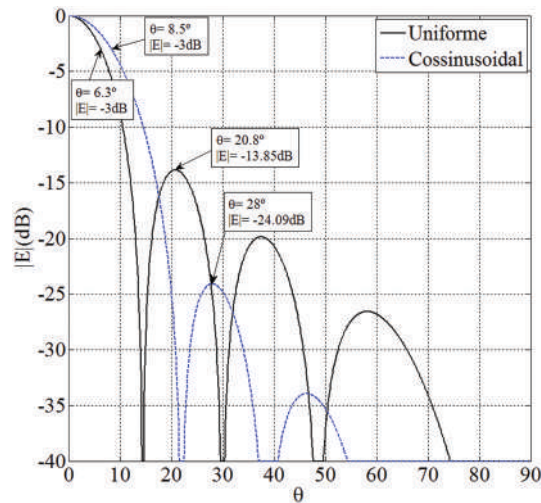


Figura 6.14 Comparação entre os diagramas de radiação no plano $\phi = 90^\circ$. $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$.

Como se pode ver da figura as diferenças fundamentais são a largura do lobo principal e o nível dos lóbulos secundários. A distribuição não uniforme produz um lobo principal mais largo o que significa menor diretividade do que a distribuição uniforme, mas em contrapartida dá origem a lóbulos secundários de nível mais baixo, neste caso cerca de 10dB abaixo. Em muitas aplicações pode valer a pena sacrificar a diretividade em favor dum nível mais baixo dos lóbulos secundários.

6.7 Campo radiado por uma abertura circular plana com distribuição uniforme

Consideremos uma abertura circular plana situada no plano xy que é suposto ser perfeitamente condutor, tal como se ilustra na Figura 6.15.

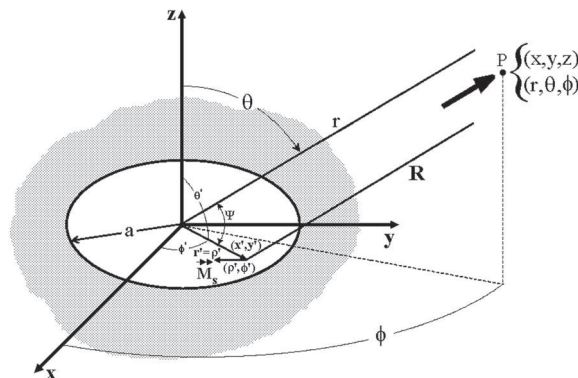


Figura 6.15 Abertura circular de raio a situada num plano perfeitamente condutor.

Tal como já fizemos para o caso da abertura retangular, vamos supor que na abertura há uma distribuição uniforme de campo eletromagnético caracterizado por um campo elétrico que tem apenas componente segundo o eixo dos xx . Dada a geometria circular desta abertura é mais conveniente usar coordenadas polares, sendo assim, o campo pode ser descrito pela expressão (6-105).

$$\vec{E}_a = \hat{x}E_a(\rho', \phi') \quad \text{sendo } E_a(\rho', \phi') = E_0 \text{ com } E_0 \text{ constante para } \rho' \leq a \quad (6-105)$$

Tal como fizemos anteriormente podemos considerar o modelo equivalente constituído por uma superfície plana na qual há uma densidade de corrente magnética $\vec{M}_s = -\hat{y}2E_0$ na abertura e nula em todo o resto da superfície. Em toda a superfície, incluindo a abertura, a densidade de corrente elétrica é nula, $\vec{J}_s = 0$.

6.7.1 Equações do campo radiado a grande distância

Os campos radiados a grande distância são dados pelas equações (6-46) e (6-47). Como se está a usar coordenadas polares verificam-se as relações (6-106):

$$x' = \rho' \cos \phi' ; y' = \rho' \sin \phi' \text{ e } ds' = \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-106)$$

O integral que aparece nestas equações pode ser neste caso escrito como em (6-107):

$$\mathbf{I} = \iint_S E_a(x', y') e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} ds' = E_0 \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \quad (6-107)$$

Pelas propriedades das funções de Bessel [5], sabe-se que se verifica (6-108):

$$\int_0^{2\pi} e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' = 2\pi J_0(k\rho' \sin \theta) \quad (6-108)$$

onde $J_0(x)$ é a função de Bessel do primeiro tipo e de ordem 0. Substituindo (6-108) em (6-107) obtém-se (6-109).

$$\mathbf{I} = E_0 \int_0^a \rho' 2\pi J_0(k\rho' \sin \theta) d\rho' \quad (6-109)$$

Usando novamente as propriedades das funções de Bessel [5], sabe-se que se verifica (6-110):

$$\int_0^1 h J_0(ah) dh = \frac{J_1(a)}{a} \quad (6-110)$$

Fazendo a mudança de variável $h = \frac{\rho}{a}$, e substituindo (6-110) em (6-109), obtém-se (6-111):

$$\mathbf{I} = 2\pi E_0 a^2 \frac{J_1(k a \sin \theta)}{k a \sin \theta} \quad (6-111)$$

Substituindo (6-111) em (6-46), obtém-se as expressões (6-112) para o campo radiado a grande distância pela geometria da Figura 6.15.

$$\mathbf{E}_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} 2\pi E_0 a^2 \cos\phi \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta}$$

$$\mathbf{E}_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} 2\pi E_0 a^2 \cos\theta \sin\phi \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \quad (6-112)$$

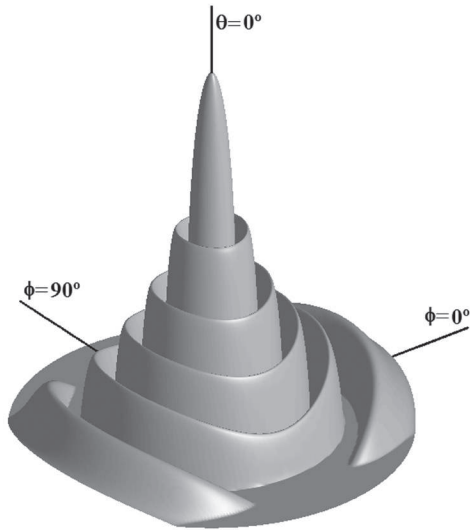
$$\mathbf{H}_\theta = -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} ; \mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

Sendo a amplitude do campo elétrico total dada por (6-113):

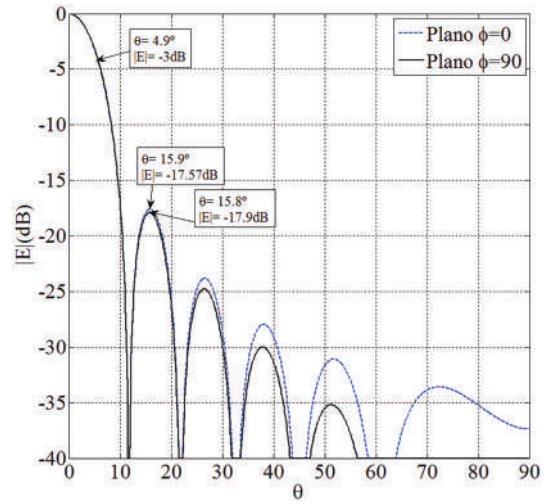
$$|\mathbf{E}| = \sqrt{|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2} \quad (6-113)$$

$$|\mathbf{E}| = \left| \sqrt{(\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi)} \frac{2\pi}{\lambda r} E_0 a^2 \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \right|$$

Na Figura 6.16(a) está ilustrado o diagrama 3D, em dB, produzido pela abertura circular da Figura 6.15 com raio $a=3\lambda$. Como se pode ver da Figura 6.16 o diagrama de radiação é aproximadamente de revolução em torno do eixo dos zz .



(a) - Diagrama 3D



(b) - Diagramas 2D

Figura 6.16 Diagramas em dB da abertura circular da Figura 6.15 com raio $a=3\lambda$.

6.7.1.1 Principais características do diagrama de radiação

Os diagramas nos planos principais $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$, representados na Figura 6.16(b) têm como componentes do campo respetivamente, (6-114) e (6-115):

$$\mathbf{E}_\theta(r, \theta) = j \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} 2\pi E_0 a^2 \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta}$$

Ou seja,

$$|\mathbf{E}_\theta(r, \theta)| = \frac{2\pi E_0 a^2}{\lambda r} \left| \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \right| \quad (6-114)$$

$$\mathbf{E}_\phi(r, \theta) = 0$$

$$\mathbf{E}_\theta = 0$$

$$\mathbf{E}_\phi(r, \theta) = -j \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} 2\pi E_0 a^2 \cos\theta \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \quad (6-115)$$

Ou seja,

$$|\mathbf{E}_\phi(r, \theta)| = \frac{2\pi E_0 a^2}{\lambda r} |\cos\theta| \left| \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \right|$$

- Direção do máximo

O máximo do diagrama ocorre para $\theta = 0^\circ$. Como $\frac{J_1(0)}{0} \cong 0.5$ o seu valor do máximo é $|\mathbf{E}|_{\max} = \frac{\pi E_0 a^2}{\lambda r}$ como se pode verificar pelas expressões quer no plano $\phi = 0^\circ$ quer no plano $\phi = 90^\circ$.

- Direção dos mínimos

Os mínimos em qualquer plano ϕ coincidem com os nulos da função $J_1(x)$. Os três primeiros ocorrem para os seguintes valores do argumento, $x_1=3.832$, $x_2=7.015$ e $x_3=10.173$. Tendo em conta estes valores pode-se deduzir os 3 primeiros mínimos do diagrama que são os indicados em (6-116):

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta_1 &= 3.832 \quad \text{ou seja,} \quad \theta_1 = \sin^{-1} \left[\frac{3.832 \lambda}{2\pi a} \right] \\ \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta_2 &= 7.015 \quad \text{ou seja,} \quad \theta_2 = \sin^{-1} \left[\frac{7.015 \lambda}{2\pi a} \right] \\ \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta_3 &= 10.173 \quad \text{ou seja,} \quad \theta_3 = \sin^{-1} \left[\frac{10.173 \lambda}{2\pi a} \right] \end{aligned} \quad (6-116)$$

Para o exemplo que estamos a considerar o raio é $a=3\lambda$ sendo então os 3 primeiros mínimos do diagrama os seguintes $\theta_1 = 11.73^\circ$; $\theta_2 = 21.85^\circ$ e $\theta_3 = 32.7^\circ$, tal como se pode ver na Figura 6.16(b).

- Largura de feixe entre os primeiros nulos (LFPN)

Do ponto anterior decorre que a LFPN é dada pela expressão (6-117):

$$\text{LFPN} = 2 \theta_1 = 2 \sin^{-1} \left[\frac{3.832 \lambda}{2\pi a} \right] \quad (6-117)$$

Para a abertura que temos vindo a considerar teremos, portanto, $\text{LFPN} \cong 23.5^\circ$.

- Largura de feixe a meia potência (LFMP)

A direcção θ para a qual a potência é metade da obtida na direcção de máximo corresponde em termos de campo a $\frac{|\mathbf{E}(r, \theta)|}{|\mathbf{E}|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. No plano $\phi = 0^\circ$, esta direcção é pela expressão (6-118):

$$\left| \frac{J_1(k a \sin \theta_h)}{k a \sin \theta_h} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (6-118)$$

Do estudo da função $\frac{J_1(x)}{x}$ pode ver-se que ela assume o valor $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ para $x=1.616$. Então a direcção θ_h é dada por $k a \sin \theta_h = 1.616$, decorrendo daí que a LFMP é dada por (6-119):

$$\text{LFMP} = 2 \theta_h = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1.616 \lambda}{2\pi a} \right] \quad (6-119)$$

Para a abertura que temos vindo a considerar teremos, portanto, $\text{LFMP} \cong 2 \times 4.91^\circ$, tal como se pode ver na Figura 6.16(b).

- Direcção e nível do primeiro lóbulo secundário

Embora os diagramas de radiação nos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$ sejam diferentes devido ao fator $|\cos \theta|$, na região do primeiro lóbulo secundário a diferença é muito pequena e o diagrama é essencialmente descrito pela função $\frac{J_1(x)}{x}$.

Do estudo desta função pode ver-se que ela assume o primeiro máximo secundário para $x=5.136$, então a direcção θ_1 é dada por $k a \sin \theta_1 = 5.136$, decorrendo daí que a direcção do primeiro lóbulo secundário é dada por (6-120):

$$\theta_1 = \sin^{-1} \left[\frac{5.136 \lambda}{2\pi a} \right] \quad (6-120)$$

Para a abertura que temos vindo a considerar teremos, portanto, $\theta_1 \cong 15.8^\circ$, tal como se pode ver na Figura 6.16(b).

Nas referências [1] e [5] os autores dão como valor aproximado para o nível do primeiro lóbulo secundário -17.6dB.

Na Figura 6.16(b) estão assinaladas marcas que correspondem a valores destes parâmetros. No plano $\phi = 0^\circ$ a direcção para a qual se verifica o primeiro máximo secundário é 15.8° e o correspondente nível é de -17.57dB. No plano $\phi = 90^\circ$ a direcção para a qual se verifica o primeiro máximo secundário é a mesma e o correspondente nível é de -17.9dB.

Para efeitos de comparação mostra-se na Figura 6.17 os diagramas de radiação de duas aberturas com a mesma área e distribuição uniforme. Uma é uma abertura quadrada de lado $a = 3\lambda$ e a outra é uma abertura circular de raio $a_1 = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \lambda$. Como se pode ver pela figura, a abertura quadrada produz um lobo principal um pouco mais estreito, mas em contrapartida dá origem a lóbulos secundários com um nível mais elevado.

Como a diretividade é $D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_f$ quando a distribuição na abertura é uniforme e como ambas têm a mesma área física, então podemos concluir que as aberturas têm a mesma diretividade.

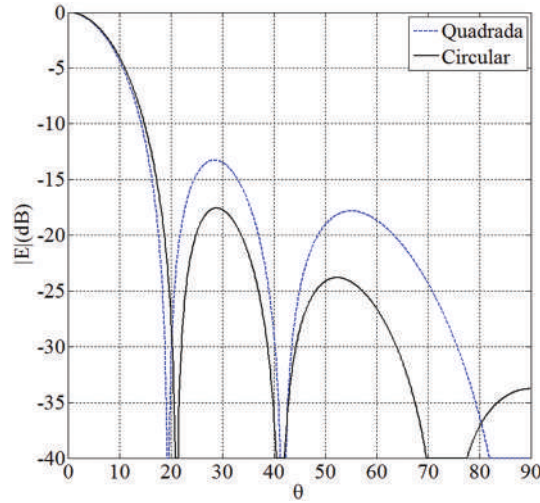


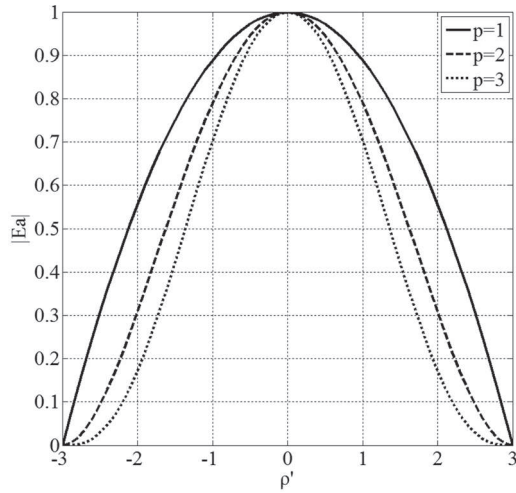
Figura 6.17 Comparação entre os diagramas de duas aberturas com a mesma área.

6.8 Campo radiado por uma abertura circular plana com distribuição não uniforme

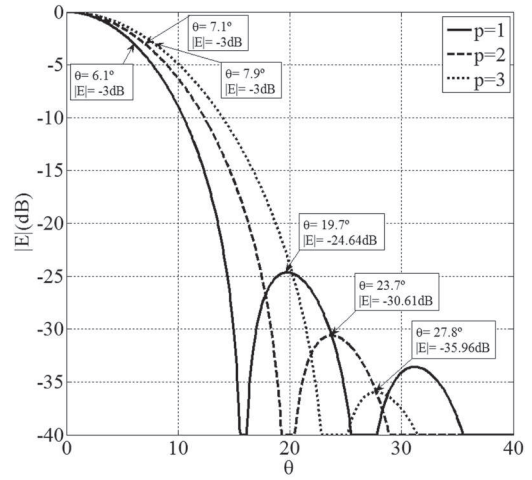
Tal como já vimos através da Figura 6.14, para uma abertura retangular, a distribuição não uniforme produz um lobo principal mais largo o que significa menor diretividade do que a distribuição uniforme, mas em contrapartida dá origem a lóbulos secundários de nível mais baixo. Em muitas aplicações pode valer a pena sacrificar a diretividade em favor dum nível mais baixo dos lóbulos secundários. O mesmo acontece com uma abertura circular. Para exemplificar este conceito, consideremos uma abertura circular com uma distribuição da forma expressa por (6-121):

$$\vec{E}_a = \hat{x} E_a(\rho', \phi') \quad \text{sendo} \quad E_a(\rho', \phi') = E_0 \left(1 - \frac{\rho'^2}{a^2}\right)^p \quad \text{para } \rho' \leq a \quad \text{com } E_0 \text{ constante} \quad (6-121)$$

Esta distribuição para três valores de p está representada na Figura 6.18(a). Como se pode ver a distribuição atenua-se do centro para a borda da abertura. Esta atenuação aumenta com p .



(a) Distribuições da forma (6-121) para 3 valores de p , duma abertura circular da com raio $a=3\lambda$.



(b) Correspondentes diagramas em dB.

Figura 6.18.

De acordo com [5], o campo radiado a grande distância é dado por (6-122):

$$|E| = \left| \frac{2\pi}{\lambda r} E_0 a^2 \frac{2^p p! J_{p+1}(k a \sin \theta)}{(k a \sin \theta)^{p+1}} \right| \quad (6-122)$$

Na Figura 6.18(b) estão representados os diagramas de radiação dados por (6-122), para três valores de p . Como se pode observar, quanto mais a distribuição se atenua do centro para a borda da abertura, mais o lobo principal se alarga e o nível dos lóbulos secundários se reduz. Na Figura 6.18(b) estão visíveis as marcas respeitantes ao nível -3dB e ao nível do primeiro lóbulo secundário, para cada diagrama.

6.9 Distribuições bidimensionais contínuas

No capítulo 3 mostrou-se que, à parte um fator multiplicativo, o campo radiado a grande distância e a distribuição de corrente que o provoca, formam um par de transformadas de Fourier. Trata-se neste caso duma distribuição unidimensional a que corresponde uma transformada de Fourier unidimensional. No presente capítulo estamos a analisar distribuições de corrente bidimensionais e naturalmente a estas distribuições deverão corresponder transformadas de Fourier bidimensionais.

Vimos anteriormente que os campos radiados a grande distância são dados pelas equações que contêm o integral dado em (6-123):

$$\iint_S E_a(x', y') e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} ds' \quad (6-123)$$

Fazendo as mudanças de variável (6-124):

$$\xi = \frac{x'}{\lambda} ; \zeta = \frac{y'}{\lambda} ; \sin \theta \cos \phi = s_1 ; \sin \theta \sin \phi = s_2 \quad (6-124)$$

e tendo em conta que fora da abertura a distribuição é nula, podemos escrever o integral como (6-125):

$$\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_a(\xi, \zeta) e^{j2\pi(\xi s_1 + \zeta s_2)} d\xi d\zeta \quad (6-125)$$

O integral $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_a(\xi, \zeta) e^{j2\pi(\xi s_1 + \zeta s_2)} d\xi d\zeta$ é formalmente a transformada de Fourier bidimensional da distribuição $E_a(\xi, \zeta)$ que designaremos por $E(s_1, s_2)$. Ver Bracewell [6].

Pode-se, portanto, afirmar que a distribuição ao longo duma abertura plana e o campo radiado por ela formam um par de transformadas de Fourier bidimensionais.

Substituindo (6-125) em (6-46), obtém-se as expressões (6-126) para as componentes do campo radiado a grande distância por uma abertura plana e a expressão (6-127) para a amplitude do campo elétrico total.

$$\begin{aligned} E_\theta &= j2k \cos \phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \lambda^2 E(s_1, s_2) \\ E_\phi &= -j2k \cos \theta \sin \phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \lambda^2 E(s_1, s_2) \end{aligned} \quad (6-126)$$

$$H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} ; H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}$$

$$|E| = \sqrt{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2} \quad (6-127)$$

$$|E| = \left| \sqrt{(\cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi)} \frac{k}{2\pi r} \lambda^2 E(s_1, s_2) \right|$$

6.9.1 Abertura retangular com distribuição uniforme

Consideremos a abertura plana retangular situada no plano xy representada na Figura 6.11. Vamos supor que na abertura há uma distribuição uniforme de campo eletromagnético caracterizado por um campo elétrico que tem apenas componente segundo o eixo dos xx. Nas variáveis ξ e ζ a distribuição assume a forma (6-128).

$$E_a(\xi, \zeta) = \begin{cases} E_0 & -\frac{a}{2\lambda} \leq \xi \leq \frac{a}{2\lambda} \quad \text{e} \quad -\frac{b}{2\lambda} \leq \zeta \leq \frac{b}{2\lambda} \\ 0 & |\xi| > \frac{a}{2\lambda} \quad \text{e} \quad |\zeta| > \frac{b}{2\lambda} \end{cases} \quad (6-128)$$

De acordo com Bracewell [6], podemos escrever $E_a(\xi, \zeta)$ como o produto de duas funções rect de variáveis separáveis como em (6-129) e tal como se ilustra na Figura 6.19.

$$E_a(\xi, \zeta) = {}^2\Pi\left[\frac{\xi}{a/\lambda}; \frac{\zeta}{b/\lambda}\right] = E_o \Pi\left[\frac{\xi}{a/\lambda}\right] \Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right] \quad (6-129)$$

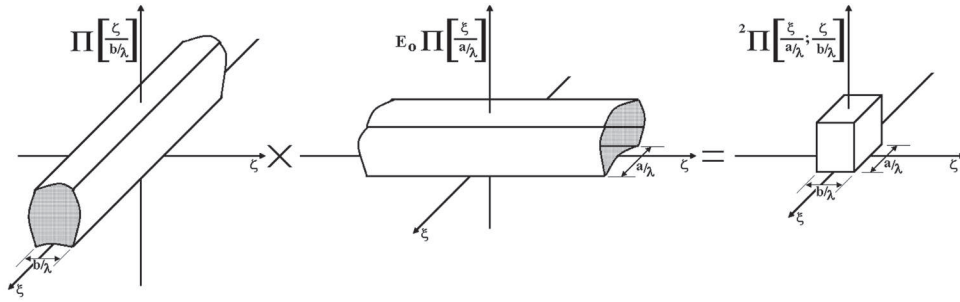


Figura 6.19 A função $E_a(\xi, \zeta)$ como o produto de duas funções rect de variáveis separadas.

Pelas propriedades da transformada de Fourier bidimensional, uma função bidimensional que é o produto de duas funções de variáveis separáveis, tem como transformada o produto das respectivas transformadas, como se indica em (6-130).

$$f(x)g(y) \leftrightarrow F(u)G(v) \quad (6-130)$$

Atendendo a esta propriedade podemos, portanto, concluir que a transformada de Fourier bidimensional da distribuição $E_a(\xi, \zeta)$ é $E(s_1, s_2) = E_1(s_1) E_2(s_2)$. Tendo em conta os pares de transformadas dados por (6-131).

$$E_o \Pi\left[\frac{\xi}{a/\lambda}\right] \leftrightarrow E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \quad \text{e} \quad \Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right] \leftrightarrow \frac{b}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} s_2\right) \quad (6-131)$$

A expressão para $E(s_1, s_2)$ é a (6-132).

$$E(s_1, s_2) = E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \frac{b}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} s_2\right) \quad (6-132)$$

Substituindo (6-132) em (6-126) e (6-127) e tendo em conta (6-124), obtém-se as expressões para o campo radiado a grande distância dadas por (6-133) e (6-134).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &= jk \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} E_o ab \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi\right) \text{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi\right) \\ \mathbf{E}_\phi &= -jk \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} E_o ab \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi\right) \text{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi\right) \end{aligned} \quad (6-133)$$

$$\mathbf{H}_\theta = -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} ; \quad \mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2} \quad (6-134)$$

$$|\mathbf{E}| = \left| \sqrt{(\cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi)} \frac{k}{2\pi r} E_o ab \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \phi\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda} \sin \theta \sin \phi\right) \right|$$

Após algumas simplificações obtém-se as expressões (6-67) e (6-68) anteriormente deduzidas por integração direta.

6.9.2 Abertura retangular com distribuição cossinusoidal

Consideremos agora uma abertura plana retangular situada no plano xy com uma distribuição cossinusoidal que, nas variáveis ξ e ζ assume a forma de (6-135):

$$E_a(\xi, \zeta) = \begin{cases} E_o \cos\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right) & -\frac{a}{2\lambda} \leq \xi \leq \frac{a}{2\lambda} \text{ e } -\frac{b}{2\lambda} \leq \zeta \leq \frac{b}{2\lambda} \\ 0 & |\xi| > \frac{a}{2\lambda} \text{ e } |\zeta| > \frac{b}{2\lambda} \end{cases} \quad (6-135)$$

Esta distribuição pode ser visualizada através duma figura semelhante à Figura 6.19, em que a distribuição que se estende uniformemente ao longo do eixo ξ tem um perfil segundo ζ que é o produto da função $\cos\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right)$ pela função $\Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right]$.

Podemos então escrever $E_a(\xi, \zeta)$ como o produto de duas funções de variáveis separáveis como em (6-136):

$$E_a(\xi, \zeta) = E_o \Pi\left[\frac{\xi}{a/\lambda}\right] \left\{ \Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right] \cos\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right) \right\} \quad (6-136)$$

Tal como já vimos atrás, uma função bidimensional que é o produto de duas funções de variáveis separáveis, tem como transformada o produto das respectivas transformadas, pelo que a transformada de Fourier bidimensional da distribuição $E_a(\xi, \zeta)$ é $E(s_1, s_2) = E_1(s_1) E_2(s_2)$.

Como a função $\left\{ \Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right] \cos\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right) \right\}$ é o produto função $\Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right]$ pela função $\cos\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right)$, que tem uma frequência de $\frac{\lambda}{2b}$, então a sua transformada é a convolução da transformada de $\Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right]$ com a transformada de $\cos\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right)$ ou seja a soma de duas funções sinc, uma centrada em $-\frac{\lambda}{2b}$ e outra em $\frac{\lambda}{2b}$, cada uma com a amplitude de $\frac{1}{2}$.

Temos, portanto, os seguintes pares de transformadas dados por (6-137):

$$\begin{aligned} E_o \Pi\left[\frac{\xi}{a/\lambda}\right] &\leftrightarrow E_o \frac{a}{\lambda} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \text{ e,} \\ \Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right] \cos\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right) &\leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{b}{\lambda} \operatorname{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 - \frac{\lambda}{2b}\right)\right] + \frac{1}{2} \frac{b}{\lambda} \operatorname{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 + \frac{\lambda}{2b}\right)\right] \end{aligned} \quad (6-137)$$

A expressão para $E(s_1, s_2)$ é, portanto (6-138):

$$E(s_1, s_2) = E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \left\{ \frac{1}{2\lambda} \text{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 - \frac{\lambda}{2b}\right)\right] + \frac{1}{2\lambda} \text{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 + \frac{\lambda}{2b}\right)\right] \right\} \quad (6-138)$$

Substituindo (6-138) em (6-126) e (6-127) obtém-se as expressões para o campo radiado a grande distância dadas por (6-139) e (6-140):

$$\mathbf{E}_\theta = j2k \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \lambda^2 E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \left\{ \frac{1}{2\lambda} \text{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 - \frac{\lambda}{2b}\right)\right] + \frac{1}{2\lambda} \text{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 + \frac{\lambda}{2b}\right)\right] \right\} \quad (6-139)$$

$$\mathbf{E}_\phi = -j2k \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \lambda^2 E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \left\{ \frac{1}{2\lambda} \text{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 - \frac{\lambda}{2b}\right)\right] + \frac{1}{2\lambda} \text{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 + \frac{\lambda}{2b}\right)\right] \right\}$$

$$\mathbf{H}_\theta = -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} ; \quad \mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2} \quad (6-140)$$

$$|\mathbf{E}| = \left| \sqrt{(\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi)} \frac{k}{2\pi r} \lambda^2 E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \left\{ \frac{1}{2\lambda} \text{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 - \frac{\lambda}{2b}\right)\right] + \frac{1}{2\lambda} \text{sinc}\left[\frac{b}{\lambda}\left(s_2 + \frac{\lambda}{2b}\right)\right] \right\} \right|$$

Após algumas simplificações semelhantes às usadas para obter (6-91), e tendo em conta (6-124), obtém-se as expressões (6-94) e (6-95) anteriormente deduzidas por integração direta.

6.9.3 Abertura retangular com distribuição cossinusoidal quadrada

Consideremos agora uma abertura plana retangular situada no plano xy com uma distribuição cossinusoidal quadrada que, nas variáveis ξ e ζ assume a forma de (6-141).

$$E_a(\xi, \zeta) = \begin{cases} E_o \cos^2\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right) & -\frac{a}{2\lambda} \leq \xi \leq \frac{a}{2\lambda} \quad \text{e} \quad -\frac{b}{2\lambda} \leq \zeta \leq \frac{b}{2\lambda} \\ 0 & |\xi| > \frac{a}{2\lambda} \quad \text{e} \quad |\zeta| > \frac{b}{2\lambda} \end{cases} \quad (6-141)$$

Esta distribuição pode ser visualizada através duma figura semelhante à Figura 6.19, em que a distribuição que se estende uniformemente ao longo do eixo ξ tem um perfil segundo ζ que é o produto da função $\cos^2\left(\frac{\pi}{b}\zeta\right)$ pela função $\Pi\left[\frac{\zeta}{b/\lambda}\right]$.

Podemos então escrever $E_a(\xi, \zeta)$ como o produto de duas funções de variáveis separáveis como em (6-142):

$$E_a(\xi, \zeta) = E_o \Pi \left[\frac{\xi}{a/\lambda} \right] \left\{ \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right] \cos^2 \left(\frac{\pi}{b} \zeta \right) \right\} \quad (6-142)$$

Tal como já vimos atrás, uma função bidimensional que é o produto de duas funções de variáveis separáveis, tem como transformada o produto das respectivas transformadas, pelo que a transformada de Fourier bidimensional da distribuição $E_a(\xi, \zeta)$ é $E(s_1, s_2) = E_1(s_1) E_2(s_2)$.

A função $\cos^2 \left(\frac{\pi}{b} \zeta \right) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(2 \frac{\pi}{b} \zeta \right) \right]$, então o termo $\left\{ \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right] \cos^2 \left(\frac{\pi}{b} \zeta \right) \right\}$ pode ser escrito como $\left\{ \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right] \cos^2 \left(\frac{\pi}{b} \zeta \right) \right\} = \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(2 \frac{\pi}{b} \zeta \right) \right]$ que por sua vez se desdobra nas duas seguintes partes $\frac{1}{2} \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right]$ e $\frac{1}{2} \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right] \cos \left(2 \frac{\pi}{b} \zeta \right)$.

Esta última parte é o produto da função $\frac{1}{2} \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right]$ pela função $\cos \left(2 \frac{\pi}{b} \zeta \right)$, que tem uma frequência de $\frac{\lambda}{b}$, então a sua transformada é a convolução da transformada de $\frac{1}{2} \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right]$ com a transformada de $\cos \left(2 \frac{\pi}{b} \zeta \right)$ ou seja a soma de duas funções sinc, uma centrada em $-\frac{\lambda}{b}$ e outra em $\frac{\lambda}{b}$, cada uma com a amplitude de 1/4.

Temos, portanto, os seguintes pares de transformadas dados por (6-143):

$$\begin{aligned} E_o \Pi \left[\frac{\xi}{a/\lambda} \right] &\leftrightarrow E_1(s_1) = E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc} \left(\frac{a}{\lambda} s_1 \right) \quad e, \\ \Pi \left[\frac{\zeta}{b/\lambda} \right] \cos^2 \left(\frac{\pi}{b} \zeta \right) &\leftrightarrow E_2(s_2) = \frac{1}{2} \frac{b}{\lambda} \text{sinc} \left(\frac{b}{\lambda} s_2 \right) + \frac{1}{4} \frac{b}{\lambda} \text{sinc} \left[\frac{b}{\lambda} \left(s_2 - \frac{\lambda}{b} \right) \right] + \frac{1}{4} \frac{b}{\lambda} \text{sinc} \left[\frac{b}{\lambda} \left(s_2 + \frac{\lambda}{b} \right) \right] \end{aligned} \quad (6-143)$$

Depois de algumas simplificações que o autor deixa ao cuidado dos leitores como exercício, obtém-se para $E_2(s_2)$ a expressão (6-144):

$$E_2(s_2) = \frac{b}{2\lambda} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{\lambda} s_2 \right)^2} \frac{\text{sen} \left(\pi \frac{b}{\lambda} s_2 \right)}{\pi \frac{b}{\lambda} s_2} \quad (6-144)$$

A expressão para $E(s_1, s_2)$ é portanto (6-145):

$$E(s_1, s_2) = E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc} \left(\frac{a}{\lambda} s_1 \right) \frac{b}{2\lambda} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{\lambda} s_2 \right)^2} \frac{\text{sen} \left(\pi \frac{b}{\lambda} s_2 \right)}{\pi \frac{b}{\lambda} s_2} \quad (6-145)$$

Substituindo (6-145) em (6-126) e (6-127) obtém-se as expressões para o campo radiado a grande distância dadas por (6-146) e (6-147):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &= j2k \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \lambda^2 E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \frac{b}{2\lambda} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{\lambda} s_2\right)^2} \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{b}{\lambda} s_2\right)}{\pi \frac{b}{\lambda} s_2} \\ \mathbf{E}_\phi &= -j2k \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \lambda^2 E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \frac{b}{2\lambda} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{\lambda} s_2\right)^2} \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{b}{\lambda} s_2\right)}{\pi \frac{b}{\lambda} s_2} \end{aligned} \quad (6-146)$$

$$\mathbf{H}_\theta = -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} ; \mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

$$|\mathbf{E}| = \left| \sqrt{(\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi)} \frac{k}{2\pi r} \lambda^2 E_o \frac{a}{\lambda} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda} s_1\right) \frac{b}{2\lambda} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{\lambda} s_2\right)^2} \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{b}{\lambda} s_2\right)}{\pi \frac{b}{\lambda} s_2} \right| \quad (6-147)$$

Tendo em conta (6-124), obtém-se as expressões para o campo radiado a grande distância dadas por (6-148) e (6-149):

$$\mathbf{E}_\theta = jk \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_o ab \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}\theta \cos\phi\right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}\theta \cos\phi} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)^2} \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi} \quad (6-148)$$

$$\mathbf{E}_\phi = -jk \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_o ab \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}\theta \cos\phi\right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}\theta \cos\phi} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)^2} \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi}$$

$$\mathbf{H}_\theta = -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} ; \mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2} \quad (6-149)$$

$$|\mathbf{E}| = \left| \sqrt{(\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi)} \frac{k}{4\pi r} E_o ab \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}\theta \cos\phi\right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}\theta \cos\phi} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)^2} \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen}\theta \text{sen}\phi} \right|$$

6.9.4 Abertura circular com distribuição uniforme

Consideremos uma abertura circular plana, de raio a , situada no plano ξ, ζ com uma distribuição uniforme de amplitude E_0 . Devido à simetria circular é mais conveniente usar a variável v definida em (6-150).

$$v^2 = \xi^2 + \zeta^2 \quad (6-150)$$

Nesta variável a distribuição uniforme é definida pela função $E_a(v) = E_0 \Pi\left(\frac{v}{2a/\lambda}\right)$ que está representada na Figura 6.20.

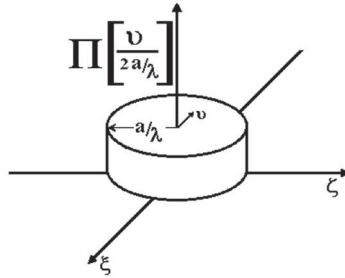


Figura 6.20 Distribuição uniforme com simetria circular $E_0 \Pi\left(\frac{v}{2a/\lambda}\right)$.

Nestes casos a transformada é expressa pela função de Hankel que é uma transformada unidimensional que tem como kernel uma função de Bessel. Verifica-se então o seguinte par de transformadas (6-151):

$$f(v) \leftrightarrow F(s) \quad \text{com} \quad s^2 = s_1^2 + s_2^2 \quad (6-151)$$

De acordo com Bracewell [6], a função $E_0 \Pi\left(\frac{v}{2a/\lambda}\right)$ tem por transformada a indicada em (6-152):

$$E_a(v) = E_0 \Pi\left(\frac{v}{2a/\lambda}\right) \leftrightarrow E(s) = E_0 \frac{a}{\lambda} \frac{J_1\left(2\pi \frac{a}{\lambda} s\right)}{s} \quad (6-152)$$

Substituindo (6-152) em (6-126) e (6-127) obtém-se as expressões para o campo radiado a grande distância dadas por (6-153) e (6-154).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &= j2k \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \lambda^2 E_0 \frac{a}{\lambda} \frac{J_1\left(2\pi \frac{a}{\lambda} s\right)}{s} \\ \mathbf{E}_\phi &= -j2k \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \lambda^2 E_0 \frac{a}{\lambda} \frac{J_1\left(2\pi \frac{a}{\lambda} s\right)}{s} \end{aligned} \quad (6-153)$$

$$\mathbf{H}_\theta = -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta}; \quad \mathbf{H}_\phi = \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2}$$

$$|\mathbf{E}| = \left| \sqrt{(\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi)} \frac{k}{2\pi r} \lambda^2 E_0 \frac{a}{\lambda} \frac{J_1\left(2\pi \frac{a}{\lambda} s\right)}{s} \right| \quad (6-154)$$

Atendendo a que $s_1 = \sin\theta\cos\phi$ e $s_2 = \sin\theta\sin\phi$, deduz-se a partir de (6-151) que $s = \sin\theta$. Substituindo esta última relação em (6-153) e (6-154) e fazendo algumas simplificações, obtém-se as expressões (6-112) e (6-113) já obtidas anteriormente por integração direta.

6.10 Campo radiado a grande distância por uma abertura plana em espaço livre

Consideremos uma abertura plana situada em espaço livre no plano xy, tal como se ilustra na Figura 6.21.

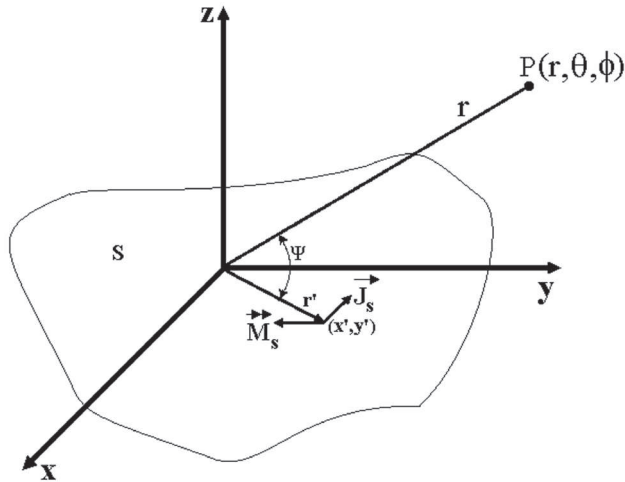


Figura 6.21 Abertura plana em espaço livre.

Vamos supor que somente há campo eletromagnético na abertura sendo, portanto $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{H}} \equiv 0$ em todos os outros pontos do plano. Embora seja uma aproximação, verifica-se que os campos radiados calculados deste modo são muito próximos dos obtidos por outros modelos mais exatos e por medições, pelo menos dentro da faixa angular que contém o lobo principal e os primeiros lóbulos secundários.

Considerando como superfície de integração o plano onde está a abertura, teremos então as distribuições de corrente dadas por (6-155) e (6-156), que são derivadas da distribuição de campo na abertura.

$$\vec{E}_a = \hat{x}E_a(x', y') \Rightarrow \vec{M}_S = -\hat{n} \times \vec{E}_a = -\hat{y}E_a(x', y') \Rightarrow \mathbf{M}_y = -E_a(x', y') \quad (6-155)$$

$$\vec{H}_a = \hat{y} \frac{E_a(x', y')}{\eta} \Rightarrow \vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}_a = -\hat{x} \frac{E_a(x', y')}{\eta} \Rightarrow \mathbf{J}_x = -\frac{E_a(x', y')}{\eta} \quad (6-156)$$

Substituindo estas correntes em (6-39), obtém-se (6-157) e (6-158):

$$\mathbf{L}_y = - \iint_S E_a(x', y') e^{jk r' \cos \Psi} ds' \quad (6-157)$$

e

$$\mathbf{N}_x = - \iint_S \frac{E_a(x', y')}{\eta} e^{jk r' \cos \Psi} ds' \quad (6-158)$$

Mudando para coordenadas esféricas teremos as relações (6-159):

$$\mathbf{L}_\theta = - \cos \theta \underbrace{\text{sen} \phi \iint_S E_a(x', y') e^{jk(x' \text{sen} \theta \cos \phi + y' \text{sen} \theta \text{sen} \phi)} ds'}_{\mathbf{I}} \quad (6-159)$$

$$\mathbf{L}_\phi = - \cos \phi \mathbf{I}$$

$$\mathbf{N}_\theta = - \cos \theta \cos \phi \frac{\mathbf{I}}{\eta}$$

$$\mathbf{N}_\phi = \text{sen} \phi \frac{\mathbf{I}}{\eta}$$

Substituindo (6-159) em (6-37) obtém-se para o campo radiado a grande distância as expressões (6-160):

$$\mathbf{E}_r \cong 0$$

$$\mathbf{E}_\theta \cong jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \cos \phi (1 + \cos \theta) \mathbf{I}$$

$$\mathbf{E}_\phi \cong -jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \text{sen} \phi (1 + \cos \theta) \mathbf{I} \quad (6-160)$$

$$\mathbf{H}_r \cong 0$$

$$\mathbf{H}_\theta \cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta}$$

$$\mathbf{H}_\phi \cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

6.10.1 Abertura retangular com distribuição uniforme em espaço livre

Consideremos uma abertura retangular em espaço livre com um lado de comprimento a segundo x' e um lado de comprimento b segundo y' e com uma distribuição de campo uniforme dada por (6-161).

$$\begin{cases} \vec{E}_a = \hat{x}E_0; \vec{H}_a = \hat{y}\frac{E_0}{\eta} & -\frac{a}{2} \leq x' \leq \frac{a}{2} \text{ e } -\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2} \\ 0 & |x'| > \frac{a}{2} \text{ e } |y'| > \frac{b}{2} \end{cases} \quad (6-161)$$

Para determinar o campo radiado a grande distância é necessário calcular o integral $\mathbf{I}$ definido na equação (6-159). Este integral pode assumir a forma (6-162):

$$\mathbf{I} = \iint_S E_0 e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' = E_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jkx' \sin\theta \cos\phi} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{jky' \sin\theta \sin\phi} dy' \quad (6-162)$$

Resolvendo estes integrais obtém-se (6-163):

$$\mathbf{I} = E_0 ab \frac{\frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi}}{\frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi}} \quad (6-163)$$

Substituindo em (6-160) obtém-se (6-164):

$$\mathbf{E}_r \cong 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \cos\phi (1 + \cos\theta) E_0 ab \frac{\frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi}}{\frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi}} \\ \mathbf{E}_\phi &\cong -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\phi (1 + \cos\theta) E_0 ab \frac{\frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\phi}}{\frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta \sin\phi}} \end{aligned} \quad (6-164)$$

$$\mathbf{H}_r \cong 0$$

$$\mathbf{H}_\theta \cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta}$$

$$\mathbf{H}_\phi \cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

Sendo a amplitude do campo elétrico total dada por (6-165):

$$|E| = \left| \sqrt{(\cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi)} \frac{k}{4\pi r} (1 + \cos \theta) E_0 ab \frac{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \phi)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \phi} \frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta \sin \phi)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta \sin \phi} \right| \quad (6-165)$$

Para pequenos valores de θ as estas expressões coincidem com as expressões (6-67) que dão o campo radiado a grande distância para uma abertura retangular situada num plano condutor perfeito.

Na Figura 6.22(a) mostra-se a comparação entre os diagramas de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ de duas aberturas rectangulares semelhantes ambas com $a=2\lambda$ e $b=4\lambda$ com distribuição uniforme, mas estando uma situada num plano condutor perfeito e outra em espaço livre. Na Figura 6.22(b) mostra-se idêntica comparação no plano $\phi = 90^\circ$.

Como se pode ver pela figura os diagramas são praticamente coincidentes no lobo principal, o que significa que as LFMP podem ser calculadas pelas expressões (6-75) e (6-76) usadas no caso da abertura estar situada num PCP. No plano $\phi = 0^\circ$ há uma diferença de cerca de 1° na localização do primeiro máximo secundário e pouco mais de 1dB nos respetivos níveis. No plano $\phi = 90^\circ$ só há diferenças significativas na região do segundo lóbulo sendo de cerca de 1dB nos respectivos níveis.

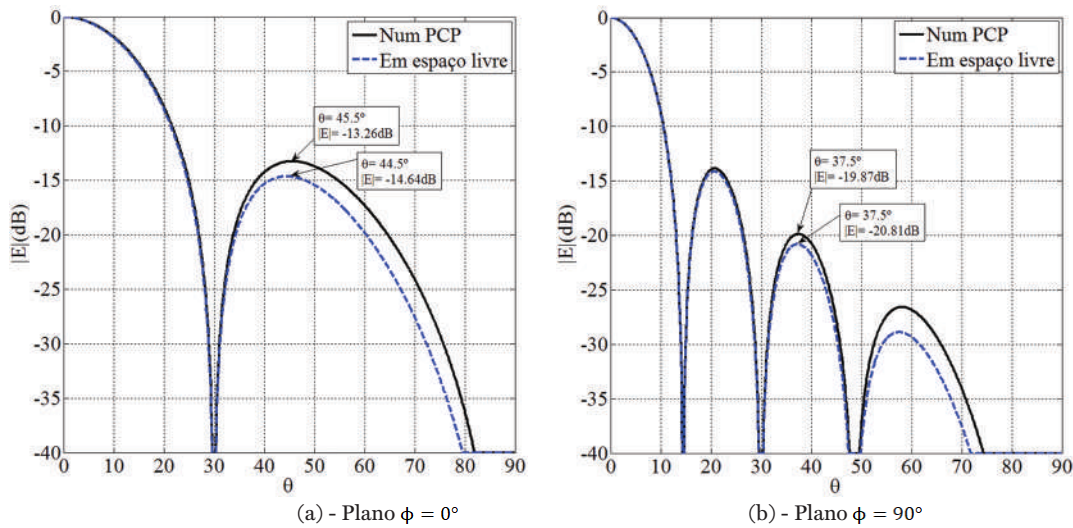


Figura 6.22. Comparação entre os diagramas de radiação de duas aberturas retangulares semelhantes com distribuição uniforme, uma num PCP e outra em espaço livre.

Na Tabela 6-1 estão resumidas as principais características do campo radiado a grande distância por aberturas retangulares com diferentes distribuições de campo na abertura, situadas num plano condutor perfeito e também numa abertura retangular com distribuição uniforme situada em espaço livre.

Tipo de distribuição	Campo distante	LFMP($2\theta_h$)	LFPN($2\theta_l$)	Direção do 1º lob. sec. θ_s	Nível 1º lob. sec. N(dB)
Uniforme 	Plano $\phi = 0^\circ$ $ E_\theta = \frac{E_0 ab}{\lambda r} \left \frac{\text{sen}(\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta)}{\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta} \right ; E_\phi = 0$ Plano $\phi = 90^\circ$ $ E_\phi = \frac{E_0 ab}{\lambda r} \left \cos \theta \frac{\text{sen}(\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen} \theta)}{\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen} \theta} \right ; E_\theta = 0$	Plano $\phi = 0^\circ$ $2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{1.391 \lambda}{\pi a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $\cong 2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{1.391 \lambda}{\pi b} \right)$	Plano $\phi = 0^\circ$ $2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\lambda}{a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\lambda}{b} \right)$	Plano $\phi = 0^\circ$ $\text{sen}^{-1} \left(\frac{4.493 \lambda}{\pi a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $\cong \text{sen}^{-1} \left(\frac{4.493 \lambda}{\pi b} \right)$	$\cong -13.26$
Unifor. espaço livre 	Plano $\phi = 0^\circ$ $ E_\theta = \frac{E_0 ab}{2 \lambda r} \left (1 + \cos \theta) \frac{\text{sen}(\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta)}{\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta} \right $ Plano $\phi = 90^\circ$ $ E_\phi = \frac{E_0 ab}{\lambda r} \left (1 + \cos \theta) \frac{\text{sen}(\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen} \theta)}{\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen} \theta} \right $	Plano $\phi = 0^\circ$ $\cong 50.6 \frac{\lambda}{a} (^\circ)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $\cong 50.6 \frac{\lambda}{b} (^\circ)$	Plano $\phi = 0^\circ$ $\cong 114.6 \frac{\lambda}{a} (^\circ)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $\cong 114.6 \frac{\lambda}{b} (^\circ)$	N/D	$\cong -13.26$
Cossinusoidal (Cos) 	Plano $\phi = 0^\circ$ $ E_\theta = \frac{2 E_0 ab}{\lambda \pi r} \left \frac{\text{sen}(\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta)}{\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta} \right ; E_\phi = 0$ Plano $\phi = 90^\circ$ $ E_\phi = \frac{E_0 ab \pi}{2 \lambda r} \cos \theta \left \frac{\cos(k \frac{b}{2} \text{sen} \theta)}{(k \frac{b}{2} \text{sen} \theta)^2 - (\frac{\pi}{2})^2} \right $	Plano $\phi = 0^\circ$ $2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{1.391 \lambda}{\pi a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $\cong 68.8 \frac{\lambda}{b} (^\circ)$	Plano $\phi = 0^\circ$ $2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\lambda}{a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{3 \lambda}{2 b} \right)$	Plano $\phi = 0^\circ$ $\text{sen}^{-1} \left(\frac{4.493 \lambda}{\pi a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ Não há fórmula	$\cong -23$
Cos ² 	Plano $\phi = 0^\circ$ $ E_\theta = \frac{E_0 ab}{2 \lambda r} \left \frac{\text{sen}(\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta)}{\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen} \theta} \right ; E_\phi = 0$ Plano $\phi = 90^\circ$ $ E_\phi = \frac{E_0 ab}{2 \lambda r} \left \frac{\cos \theta}{1 - (\frac{b}{\lambda} \text{sen} \theta)^2} \frac{\text{sen}(\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen} \theta)}{\pi \frac{b}{\lambda} \text{sen} \theta} \right $	Plano $\phi = 0^\circ$ $2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{1.391 \lambda}{\pi a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $\cong 83.2 \frac{\lambda}{b} (^\circ)$	Plano $\phi = 0^\circ$ $2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\lambda}{a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ $\cong 292.2 \frac{\lambda}{b} (^\circ)$	Plano $\phi = 0^\circ$ $\text{sen}^{-1} \left(\frac{4.493 \lambda}{\pi a} \right)$ Plano $\phi = 90^\circ$ Não há fórmula	$\cong -32$

Tabela 6-1 Resumo das principais características das aberturas retangulares.

Na Tabela 6-2 estão resumidas as principais características do campo radiado a grande distância por aberturas circulares com diferentes distribuições de campo na abertura, situadas num plano condutor perfeito.

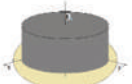
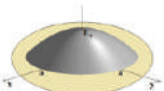
Tipo de distribuição	Campo distante	LFMP($2\theta_h$)	LFPN($2\theta_l$)	Direção do 1º lob. sec. θ_s	Nível 1º lob. sec. N(dB)
Uniforme 	Plano $\phi = 0^\circ$ $ E_\theta = \frac{2\pi E_0 a^2}{\lambda r} \left \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \right ; E_\phi = 0$ Plano $\phi = 90^\circ$ $ E_\phi = \frac{2\pi E_0 a^2}{\lambda r} \cos\theta \left \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \right $	$2\text{sen}^{-1} \left[\frac{1.616 \lambda}{2\pi a} \right]$	$2\text{sen}^{-1} \left[\frac{3.832 \lambda}{2\pi a} \right]$	$\text{sen}^{-1} \left[\frac{5.136 \lambda}{2\pi a} \right]$	$\cong -17.6$
Distribuição $(1 - \frac{\rho^2}{a^2})$ 	Plano $\phi = 0^\circ$ $ E_\theta = \frac{4\pi E_0 a^2}{\lambda r} \left \frac{J_2(k a \sin\theta)}{(k a \sin\theta)^2} \right ; E_\phi = 0$ Plano $\phi = 90^\circ$ $ E_\phi = \frac{4\pi E_0 a^2}{\lambda r} \cos\theta \left \frac{J_2(k a \sin\theta)}{(k a \sin\theta)^2} \right $	$\cong 36.3 \frac{\lambda}{a} (^\circ)$	$\cong 93.6 \frac{\lambda}{a} (^\circ)$	N/D	$\cong -24.6$
Distribuição $(1 - \frac{\rho^2}{a^2})^2$ 	Plano $\phi = 0^\circ$ $ E_\theta = \frac{16\pi E_0 a^2}{\lambda r} \left \frac{J_3(k a \sin\theta)}{(k a \sin\theta)^3} \right ; E_\phi = 0$ Plano $\phi = 90^\circ$ $ E_\phi = \frac{16\pi E_0 a^2}{\lambda r} \cos\theta \left \frac{J_3(k a \sin\theta)}{(k a \sin\theta)^3} \right $	$\cong 42.1 \frac{\lambda}{a} (^\circ)$	$\cong 116.2 \frac{\lambda}{a} (^\circ)$	N/D	$\cong -30.6$

Tabela 6-2 Resumo das principais características das aberturas circulares.

6.11 Cornetas eletromagnéticas

As cornetas eletromagnéticas são provavelmente as antenas mais usadas na banda das micro-ondas quer isoladamente, como por exemplo em feixes de micro-ondas em telecomunicações, quer como alimentadores de refletores parabólicos usados em radioastronomia e em comunicações via satélite.

As cornetas eletromagnéticas são antenas de abertura que resultam da modificação apropriada de guias de onda metálicos. Para efetuar a transição entre estes guias e o espaço livre aumenta-se progressivamente a secção do guia até às dimensões desejadas para a abertura radiante. No caso dos guias de onda retangulares se o aumento for apenas da menor dimensão, mantendo-se a maior, obtém-se uma corneta setorial aberta segundo o plano E, tal como se ilustra na Figura 6.23(a). Se o aumento for apenas da maior dimensão, mantendo-se a menor, obtém-se uma corneta setorial aberta segundo o plano H, tal como se ilustra na Figura 6.23(b). Se o aumento for feito simultaneamente nas duas dimensões do guia obtém-se uma corneta piramidal tal como se ilustra na Figura 6.23(c). No caso dos guias de onda circulares o aumento progressivo do seu raio dá origem a uma corneta cónica, tal como se ilustra na Figura 6.23(d).

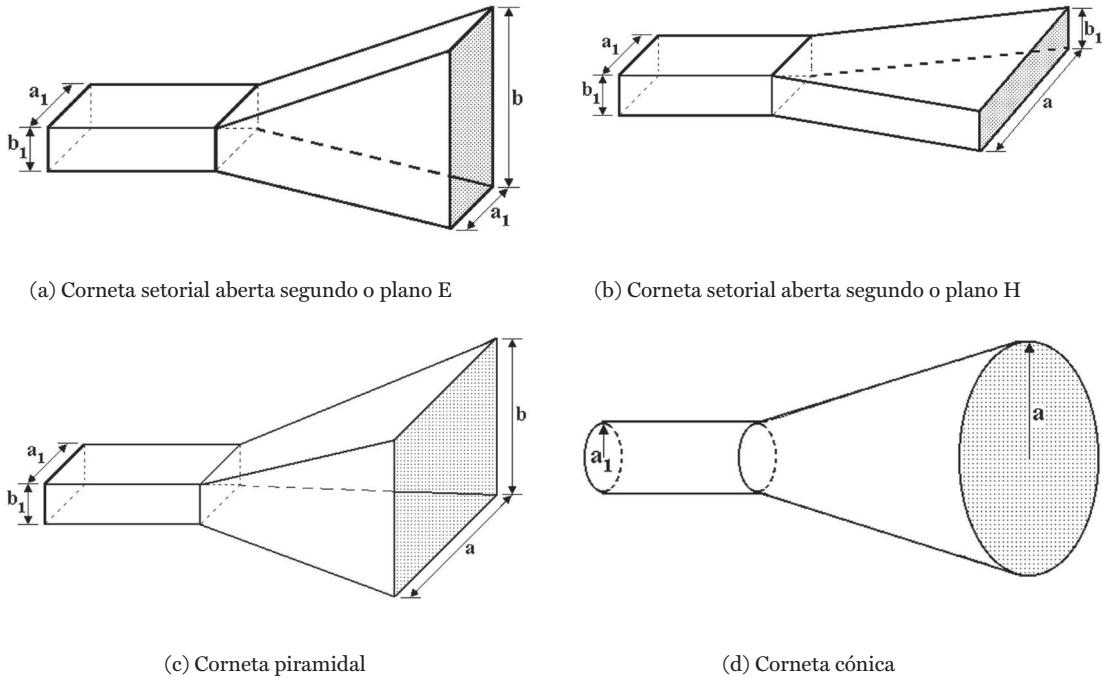


Figura 6.23.

6.11.1 Corneta setorial aberta segundo o plano E

Esta corneta resulta da modificação dum guia de onda retangular pelo aumento progressivo da menor dimensão do guia, b_1 , mantendo-se a maior, a_1 . Este processo resulta numa abertura com dimensões a_1 e b . Para a determinação dos campos radiados por esta abertura vamos assumir que o modo fundamental no guia, modo TE_{10} , é transposto para a abertura. Como se pode observar pela Figura 6.24(a), o aumento progressivo é feito

segundo o plano que contém o vetor $\vec{E}$, daí o nome desta corneta. Vamos ainda supor que a abertura se situa em espaço livre pelo que usaremos o método descrito na secção 6.10, aplicado à geometria ilustrada na Figura 6.24(b).

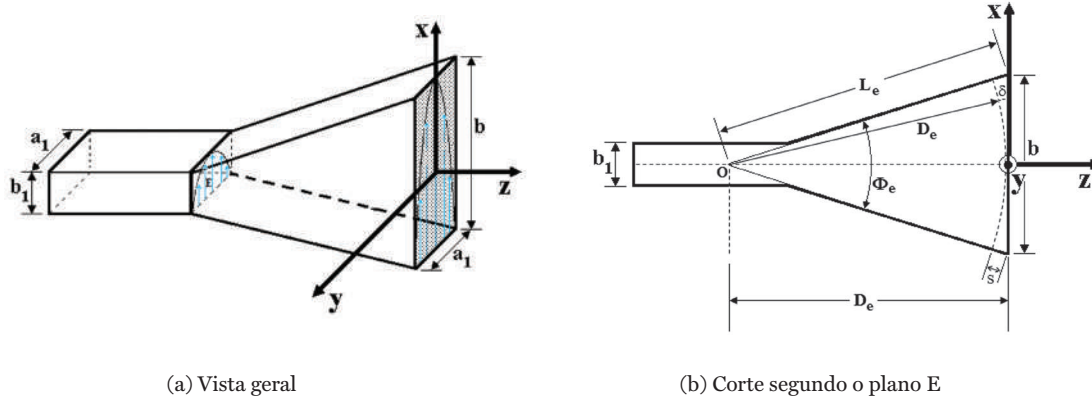


Figura 6.24 Corneta setorial aberta segundo o plano E

Observando a Figura 6.24(b), pode-se admitir que o ponto O é a origem de ondas esféricas que iluminam a abertura. O lugar geométrico da linha equifase está representada pelo arco de circunferência a tracejado. Ao longo da abertura a fase não é constante e varia de acordo com a diferença de percursos definida pela distância δ . Considerando que um ponto genérico da abertura tem as coordenadas (x', y') , então a distância δ não depende de y' , mas depende de x' através da relação (6-166) que foi simplificada pela aplicação do desenvolvimento em série do radical.

$$\delta(x') = -D_e + \sqrt{D_e^2 + (x')^2} \cong \frac{1}{2} \frac{x'^2}{D_e} \quad (6-166)$$

A máxima diferença de percursos definida pela distância s ocorre para $x' = \frac{b}{2}$ sendo dada pela relação (6-167).

$$s \cong \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{D_e} = \frac{b^2}{8D_e} \quad (6-167)$$

Para que a fase ao longo da abertura não varie muito, a distância s deve ser pequena comparada com o comprimento de onda. É óbvio que quanto mais comprida for a corneta, ou quanto menor for o ângulo de abertura Φ_e , menor será s . Isso implica contudo que para uma dada abertura, se possa ter uma corneta razoavelmente comprida o que significa que $D_e \cong L_e$ pelo que (6-167) se pode também escrever como $s \cong \frac{b^2}{8L_e}$.

6.11.1.1 Diagrama de radiação

Para determinar os campos radiados por esta abertura que, assumimos se situa em espaço livre, vamos usar o método descrito na secção 6.10, aplicado à geometria ilustrada na Figura 6.24. Como se pode ver pela figura as distribuições de campo na abertura derivam do modo TE_{10} , sendo, portanto, dadas por (6-168). Nos outros pontos do plano da abertura, as distribuições de campo consideram-se nulas.

$$\vec{E}_a(x', y') = \hat{x} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} y'\right) e^{-jk\delta(x')} \quad (6-168)$$

$$\vec{H}_a(x', y') = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} y'\right) e^{-jk\delta(x')} + \hat{z} jE_0 \frac{\pi\eta}{ka_1} \sin\left(\frac{\pi}{a_1} y'\right) e^{-jk\delta(x')}$$

Estas distribuição de campo dão origem às distribuições de corrente equivalentes dadas por (6-169) e (6-170):

$$\vec{E}_a = \hat{x} E_a(x', y') \Rightarrow \vec{M}_S = -\hat{n} \times \vec{E}_a = -\hat{y} M_y \Rightarrow M_y = -E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} y'\right) e^{-jk\delta(x')} \quad (6-169)$$

$$\vec{H}_a = \hat{y} H_{ay} + \hat{z} H_{az} \Rightarrow \vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}_a = -\hat{x} J_x \Rightarrow J_x = -\frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} y'\right) e^{-jk\delta(x')} \quad (6-170)$$

A densidade de corrente $\mathbf{J}_x$ dá origem às componentes $\mathbf{N}_\theta$ e $\mathbf{N}_\phi$ e a densidade de corrente $\mathbf{M}_y$ dá origem às componentes $\mathbf{L}_\theta$ e $\mathbf{L}_\phi$. Substituindo estas componentes em (6-37) obtém-se para o campo radiado a grande distância as expressões (6-171):

$$\begin{aligned} E_r &\cong 0 \\ E_\theta &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \cos\phi (1 + \cos\theta) \mathbf{I} \\ E_\phi &\cong -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\phi (1 + \cos\theta) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (6-171)$$

$$\begin{aligned} H_r &\cong 0 \\ H_\theta &\cong -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi &\cong \frac{E_\theta}{\eta} \end{aligned}$$

onde o integral $\mathbf{I}$ é definido por (6-172):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \iint_S E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} y'\right) e^{-jk\delta(x')} e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ &= E_0 \underbrace{\int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} y'\right) e^{jky' \sin\theta \sin\phi} dy'}_{\mathbf{I}_1} \underbrace{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{jk[x' \sin\theta \cos\phi - \delta(x')]} dx'}_{\mathbf{I}_2} \end{aligned} \quad (6-172)$$

Na secção 6.6 já foi resolvido um integral semelhante ao integral $\mathbf{I}_1$. Usando esses resultados o integral $\mathbf{I}_1$ pode ser escrito como (6-173):

$$\mathbf{I}_1 = -\pi \frac{a_1}{2} \frac{\cos\left(k \frac{a_1}{2} \sin\theta \sin\phi\right)}{\left(k \frac{a_1}{2} \sin\theta \sin\phi\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \quad (6-173)$$

Para o integral $\mathbf{I}_2$ pode-se deduzir uma expressão que pode ser encontrada nas referências [1] e [2]. Vamos designá-la por $\text{Fe}(\theta, \phi)$.

O campo radiado a grande distância por esta corneta é, portanto, dado pelas expressões (6-174):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_r &\cong 0 \\
\mathbf{E}_\theta &\cong -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 \cos\phi (1 + \cos\theta) \pi \frac{a_1}{2} \frac{\cos\left(k \frac{a_1}{2} \sin\theta \sin\phi\right)}{\left(k \frac{a_1}{2} \sin\theta \sin\phi\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \mathbf{Fe}(\theta, \phi) \\
\mathbf{E}_\phi &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 \sin\phi (1 + \cos\theta) \pi \frac{a_1}{2} \frac{\cos\left(k \frac{a_1}{2} \sin\theta \sin\phi\right)}{\left(k \frac{a_1}{2} \sin\theta \sin\phi\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \mathbf{Fe}(\theta, \phi) \\
\mathbf{H}_r &\cong 0 \\
\mathbf{H}_\theta &\cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} \\
\mathbf{H}_\phi &\cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}
\end{aligned} \tag{6-174}$$

No plano E, $\phi = 0$, o campo radiado a grande distância por esta corneta é dado pelas expressões (6-175):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_r &\cong 0 \\
\mathbf{E}_\theta &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 (1 + \cos\theta) \pi \frac{a_1}{2} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \mathbf{Fe}(\theta) \\
\mathbf{E}_\phi &= 0 \\
\mathbf{H}_r &\cong 0 \\
\mathbf{H}_\theta &= 0 \\
\mathbf{H}_\phi &\cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}
\end{aligned} \tag{6-175}$$

A função $\mathbf{Fe}(\theta)$ é semelhante a uma função sinc e será neste texto calculada por integração numérica.

No plano H, $\phi = 90$, o campo radiado a grande distância por esta corneta é dado pelas expressões (6-176):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_r &\cong 0 \\
\mathbf{E}_\theta &= 0 \\
\mathbf{E}_\phi &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 (1 + \cos\theta) \pi \frac{a_1}{2} \frac{\cos\left(k \frac{a_1}{2} \sin\theta\right)}{\left(k \frac{a_1}{2} \sin\theta\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \mathbf{Fe} \\
\mathbf{H}_r &\cong 0 \\
\mathbf{H}_\theta &\cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} \\
\mathbf{H}_\phi &= 0
\end{aligned} \tag{6-176}$$

em que $\mathbf{Fe}$ é uma constante.

É claro da Figura 6.24(b), que para a mesma dimensão da abertura segundo o plano E, isto é, mantendo b , se aumentarmos a dimensão D_e , o parâmetro s diminui e concomitantemente diminui a variação de fase ao longo da abertura. Inversamente, uma diminuição de D_e traduz-se num aumento do parâmetro s e por consequência um aumento da variação de fase ao longo da abertura. Obviamente estas variações têm implicações no diagrama de radiação que se tornam desfocados com o aumento do parâmetro s . Usando as expressões (6-175), pode-se traçar os diagramas gerais (*universal patterns*) no plano E. Estes diagramas estão representados na Figura 6.25. Estas curvas designam-se por gerais, pois a partir delas pode-se obter as características de qualquer corneta para um dado ângulo. De facto, depois de calculado o respetivo parâmetro s , por consulta da curva apropriada obtém-se o correspondente campo normalizado para o ângulo pretendido.

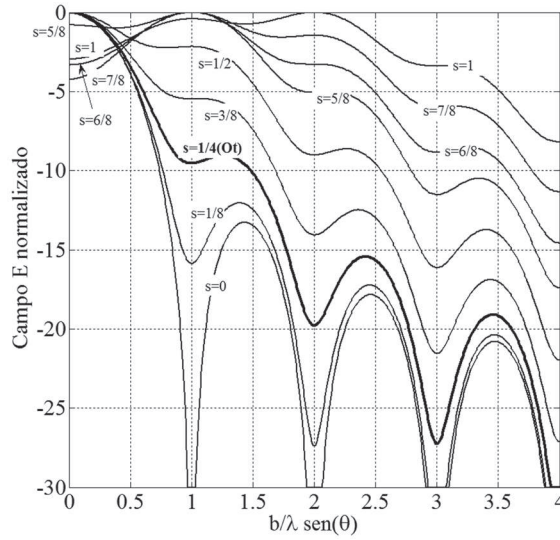


Figura 6.25. Diagramas de radiação gerais, no plano E, duma corneta setorial aberta por esse plano, para vários valores do parâmetro s expresso em comprimentos de onda.

6.11.1.2 Diretividade

A diretividade da antena é dada por $D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}}$, em que $U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2$, sendo $|\mathbf{E}|_{\max}$ dado por (6-177) para $\theta = 0$.

$$|\mathbf{E}|_{\max}^2 = |\mathbf{E}_\theta|_{\max}^2 + |\mathbf{E}_\phi|_{\max}^2 \quad (6-177)$$

Recorrendo às equações (6-174) facilmente se obtém o valor de $|\mathbf{E}|_{\max}^2$ dado por (6-178):

$$|\mathbf{E}|_{\max}^2 = E_0^2 \left(\frac{2a_1}{\pi\lambda r} \right)^2 |\mathbf{Fe}(\delta(x'))|^2 \quad (6-178)$$

Usando esta relação, obtém-se (6-179):

$$U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2 = E_0^2 \frac{2}{\eta} \left(\frac{a_1}{\pi\lambda} \right)^2 |\mathbf{Fe}(\delta(x'))|^2 \quad (6-179)$$

A potência radiada que é a que atravessa a abertura é dada por (6-180):

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \iint_S \text{Re}(\vec{E}_a \times \vec{H}_a^*) \cdot \hat{z} ds' \quad (6-180)$$

Substituindo nesta equação $\vec{E}_a$ e $\vec{H}_a$ dados por (6-168), obtém-se (6-181):

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \iint_S \text{Re}(\vec{E}_a \times \vec{H}_a^*) \cdot \hat{z} ds' = \frac{E_0^2}{2\eta} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx' \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{a_1} y'\right) \right]^2 dy' \quad (6-181)$$

Tal como no caso de (6-103) P_{rad} é dado por (6-182):

$$P_{\text{rad}} = \frac{E_0^2}{4\eta} a_1 b \quad (6-182)$$

Substituindo (6-179) e (6-182) na fórmula da directividade obtém-se (6-183):

$$D = \frac{32a_1}{\pi \lambda^2 b} |\text{Fe}(\delta(x'))|^2 \quad (6-183)$$

em que $|\text{Fe}(\delta(x'))|^2$ é dada por (6-184):

$$|\text{Fe}(\delta(x'))|^2 = \left| \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jk\delta(x')} dx' \right|^2 \quad (6-184)$$

Resolvendo numericamente (6-184) para vários valores da dimensão D_e e da dimensão b , pode-se traçar uma família de curvas de $(\lambda/a_1)D$ em função de b , tal como se ilustra na Figura 6.26.

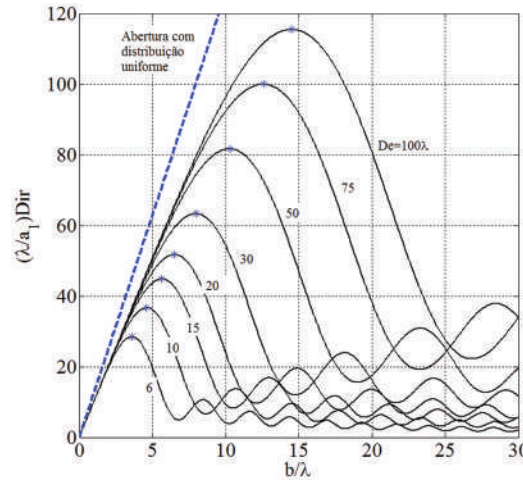


Figura 6.26. Directividade duma corneta setorial aberta segundo o plano E, em função da dimensão da abertura, para vários valores do seu comprimento.

Desta figura podemos tirar algumas conclusões importantes. Mantendo constante a dimensão b da abertura, pode-se aumentar a directividade aumentando a dimensão D_e , isto é, aumentando o comprimento da corneta. Note-se, no entanto, que nunca se atinge a directividade que a abertura teria se ela tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela. Mantendo constante a dimensão D_e e aumentando progressivamente a dimensão b observa-se que a directividade começa a aumentar até atingir um máximo começando a diminuir rapidamente apresentando depois um comportamento oscilatório. Depois de se atingir o máximo, a variação de fase ao longo da abertura começa a ser tão significativa que destrói claramente o diagrama de radiação. Também neste caso nunca se atinge a directividade que a abertura teria se ela tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela.

Os pontos de máxima diretividade correspondem a pares de valores $(D_e; b)$ que inseridos na relação (6-167), dão origem a valores do parâmetro $s \cong 0.25\lambda$. Por esta razão considera-se que uma corneta aberta segundo o plano E é ótima quando tem o parâmetro $s \cong 0.25\lambda$. Por este motivo a curva para $s = 1/4$ da Figura 6.25 está realçada. Dividindo a máxima diretividade de cada uma das curvas, com a correspondente diretividade que a abertura teria se tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela, obtém-se a eficiência da abertura. Para os valores da Figura 6.26, verifica-se que a eficiência média da abertura é aproximadamente 63.4%.

Na Figura 6.27 estão representados os diagramas de radiação duma corneta setorial ótima aberta segundo o plano E, à frequência de 10GHz. Esta corneta resulta do aumento progressivo da menor dimensão dum guia de ondas retangular WR-90 que tem como maior dimensão $a_1 = 0.9" \cong 2.286\text{cm}$ e como menor dimensão $b_1 = 0.4" \cong 1.016\text{cm}$. A abertura tem como dimensões a e $b = 15\text{cm}$.

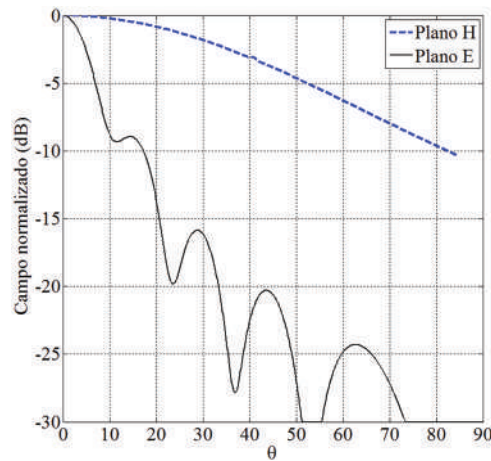


Figura 6.27. Diagramas de radiação duma corneta setorial ótima aberta segundo o plano E à frequência de 10GHz. As dimensões da abertura são $a_1 \cong 2.286\text{cm}$ e $b = 15\text{cm}$.

6.11.2 Corneta setorial aberta segundo o plano H

Esta corneta resulta da modificação dum guia de onda retangular pelo aumento progressivo da maior dimensão do guia, a_1 , mantendo-se a menor, b_1 . Este processo resulta numa abertura com dimensões a e b_1 . Para a determinação dos campos radiados por esta abertura vamos assumir, tal como no caso da corneta aberta segundo o plano E, que o modo fundamental no guia, modo TE_{10} , é transposto para a abertura. Como se pode observar pela Figura 6.28(a), o aumento progressivo é feito segundo o plano que contém o vetor $\vec{H}$, daí o nome desta corneta. Vamos ainda supor que a abertura se situa em espaço livre pelo que usaremos o método descrito na secção 6.10, aplicado à geometria ilustrada na Figura 6.28(b).

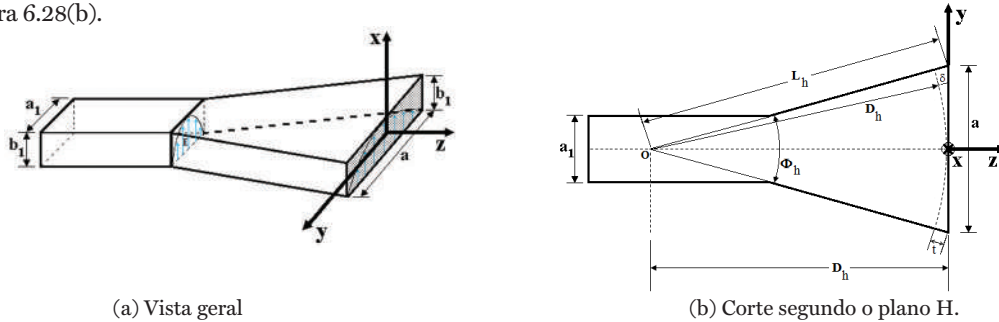


Figura 6.28 . Corneta setorial aberta segundo o plano H

Tal como no caso da corneta aberta segundo o plano E, observando a Figura 6.28(b), pode-se admitir que o ponto O é a origem de ondas esféricas que iluminam a abertura. O lugar geométrico da linha equifase está representada pelo arco de circunferência a tracejado. Ao longo da abertura a fase não é constante e varia de acordo com a diferença de percursos definida pela distância δ . Considerando que um ponto genérico da abertura tem as coordenadas (x', y') , então a distância δ não depende de x' , mas depende de y' através da relação (6-185) que foi simplificada pela aplicação do desenvolvimento em série do radical.

$$\delta(y') = -D_h + \sqrt{D_h^2 + (y')^2} \cong \frac{1}{2} \frac{y'^2}{D_h} \quad (6-185)$$

A máxima diferença de percursos definida pela distância t ocorre para $y' = \frac{a}{2}$ sendo dada pela relação (6-186).

$$t \cong \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{D_h} = \frac{a^2}{8D_h} \quad (6-186)$$

Para que a fase ao longo da abertura não varie muito, a distância t deve ser pequena comparada com o comprimento de onda. É óbvio que quanto mais comprida for a corneta, ou quanto menor for o ângulo de abertura Φ_h , menor será t . Isso implica, contudo, que para uma dada abertura, se possa ter uma corneta razoavelmente comprida o que significa que $D_h \cong L_h$ pelo que (6-186) se pode também escrever como $t \cong \frac{a^2}{8L_h}$.

6.11.2.1 Diagrama de radiação

Para determinar os campos radiados por esta abertura que, assumimos se situa em espaço livre, vamos usar o método descrito na secção 6.10, aplicado à geometria ilustrada na Figura 6.28. Como se pode ver pela figura as distribuições de campo na abertura derivam do modo TE_{10} , sendo, portanto, dadas por (6-187). Nos outros pontos do plano da abertura, as distribuições de campo consideram-se nulas.

$$\vec{E}_a(x', y') = \hat{x} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(y')} \quad (6-187)$$

$$\vec{H}_a(x', y') = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(y')} + \hat{z} jE_0 \frac{\pi\eta}{ka} \sin\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(y')}$$

Estas distribuição de campo dão origem às distribuições de corrente equivalentes dadas por (6-188) e (6-189):

$$\vec{E}_a = \hat{x} E_a(x', y') \Rightarrow \vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_a = -\hat{y} M_y \Rightarrow M_y = -E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(y')} \quad (6-188)$$

$$\vec{H}_a = \hat{y} H_{ay} + \hat{z} H_{az} \Rightarrow \vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_a = -\hat{x} J_x \Rightarrow J_x = -\frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(y')} \quad (6-189)$$

A densidade de corrente J_x dá origem às componentes N_θ e N_ϕ e a densidade de corrente M_y dá origem às componentes L_θ e L_ϕ . Substituindo estas componentes em (6-37) obtém-se para o campo radiado a grande distância as expressões (6-190):

$$\mathbf{E}_r \cong 0$$

$$\mathbf{E}_\theta \cong jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \cos\phi (1 + \cos\theta) \mathbf{I}$$

$$\mathbf{E}_\phi \cong -jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \sin\phi (1 + \cos\theta) \mathbf{I}$$

(6-190)

$$\mathbf{H}_r \cong 0$$

$$\mathbf{H}_\theta \cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta}$$

$$\mathbf{H}_\phi \cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

onde o integral $\mathbf{I}$ é definido por (6-191):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \iint_S E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(y')} e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ &= E_0 \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{jk[y' \sin\theta \sin\phi - \delta(y')]} dy'}_{\mathbf{I}_1} \underbrace{\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} e^{jkx' \sin\theta \cos\phi} dx'}_{\mathbf{I}_2} \end{aligned} \quad (6-191)$$

Na secção 6.5 já foi resolvido um integral semelhante ao integral $\mathbf{I}_2$. Usando esses resultados o integral $\mathbf{I}_2$ pode ser escrito como (6-192):

$$\mathbf{I}_2 = b_1 \frac{\sin(\pi \frac{b_1}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{b_1}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \quad (6-192)$$

Para o integral $\mathbf{I}_1$ pode-se deduzir uma expressão que pode ser encontrada nas referências [1] e [2]. Vamos designá-la por $\mathbf{Fh}(\theta, \phi)$. O campo radiado a grande distância por esta corneta é, portanto, dado pelas expressões (6-193):

$$\mathbf{E}_r \cong 0$$

$$\mathbf{E}_\theta \cong -jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} E_0 \cos\phi (1 + \cos\theta) b_1 \frac{\sin(\pi \frac{b_1}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{b_1}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \mathbf{Fh}(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{E}_\phi \cong jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} E_0 \sin\phi (1 + \cos\theta) b_1 \frac{\sin(\pi \frac{b_1}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{b_1}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \mathbf{Fh}(\theta, \phi) \quad (6-193)$$

$$\mathbf{H}_r \cong 0$$

$$\mathbf{H}_\theta \cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta}$$

$$\mathbf{H}_\phi \cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

No plano E, $\phi = 0$, o campo radiado a grande distância por esta corneta é dado pelas expressões (6-194):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_r &\cong 0 \\
\mathbf{E}_\theta &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 (1 + \cos\theta) b_1 \frac{\sin(\pi \frac{b_1}{\lambda} \sin\theta)}{\pi \frac{b_1}{\lambda} \sin\theta} \mathbf{Fh} \\
\mathbf{E}_\phi &= 0 \\
\mathbf{H}_r &\cong 0 \\
\mathbf{H}_\theta &= 0 \\
\mathbf{H}_\phi &\cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}
\end{aligned} \tag{6-194}$$

em que $\mathbf{Fh}$ é uma constante.

No plano H, $\phi = 90$, o campo radiado a grande distância por esta corneta é dado pelas expressões (6-195).

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_r &\cong 0 \\
\mathbf{E}_\theta &= 0 \\
\mathbf{E}_\phi &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 b_1 (1 + \cos\theta) \mathbf{Fh}(\theta) \\
\mathbf{H}_r &\cong 0 \\
\mathbf{H}_\theta &\cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} \\
\mathbf{H}_\phi &= 0
\end{aligned} \tag{6-195}$$

A função $\mathbf{Fh}(\theta)$ será neste texto calculada por integração numérica.

É claro da Figura 6.28(b), que para a mesma dimensão da abertura segundo o plano H, isto é, mantendo a, se aumentarmos a dimensão D_h , o parâmetro t diminui e concomitantemente diminui a variação de fase ao longo da abertura. Inversamente, uma diminuição de D_h , traduz-se num aumento do parâmetro t e por consequência um aumento da variação de fase ao longo da abertura. Obviamente estas variações têm implicações no diagrama de radiação que se tornam desfocados com o aumento do parâmetro t . Usando as expressões (6-195), pode-se traçar os diagramas gerais (*universal patterns*) no plano H. Estes diagramas estão representados na Figura 6.29.

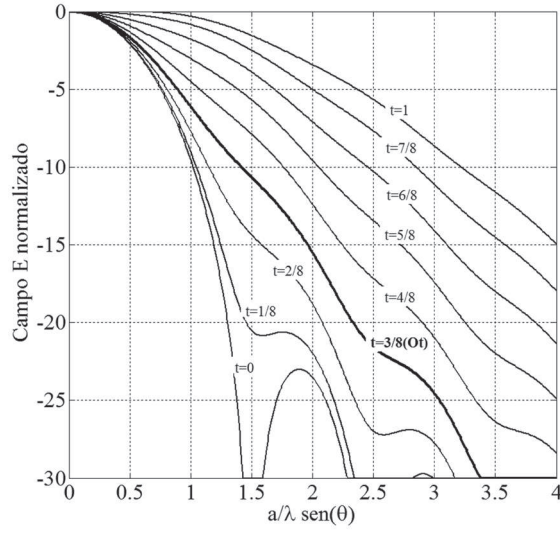


Figura 6.29. Diagramas de radiação gerais, no plano H, duma corneta setorial aberta segundo esse plano, para vários valores do parâmetro t expresso em comprimentos de onda.

6.11.2.2 Diretividade

A diretividade da antena é dada por $D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}}$, em que $U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2$, sendo $|\mathbf{E}|_{\max}$ dado por (6-196) para $\theta = 0$.

$$|\mathbf{E}|_{\max}^2 = |\mathbf{E}_\theta|_{\max}^2 + |\mathbf{E}_\phi|_{\max}^2 \quad (6-196)$$

Recorrendo às equações (6-193) facilmente se obtém o valor de $|\mathbf{E}|_{\max}^2$ dado por (6-197):

$$|\mathbf{E}|_{\max}^2 = E_0^2 \left(\frac{b_1}{\lambda r} \right)^2 |\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2 \quad (6-197)$$

Usando esta relação, obtém-se (6-198):

$$U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2 = \frac{E_0^2}{2\eta} \left(\frac{b_1}{\lambda} \right)^2 |\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2 \quad (6-198)$$

Procedendo como no caso da corneta setorial aberta no plano E, obtém-se P_{rad} dada por (6-199):

$$P_{\text{rad}} = \frac{E_0^2}{4\eta} ab_1 \quad (6-199)$$

Substituindo (6-198) e (6-199) na fórmula da diretividade obtém-se (6-200):

$$D = \frac{8\pi b_1}{a \lambda^2} |\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2 \quad (6-200)$$

em que $|\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2$ é dada por (6-201):

$$|\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2 = \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{a}y'\right) e^{-jk\delta(y')} dy' \right|^2 \quad (6-201)$$

Resolvendo numericamente (6-201) para vários valores da dimensão D_h e da dimensão a , pode-se traçar uma família de curvas de $(\lambda/b_1)D$ em função de a , tal como se ilustra na Figura 6.30.

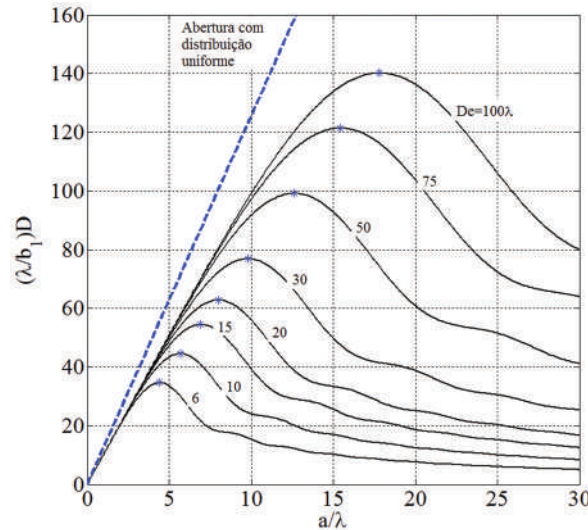


Figura 6.30. Diretividade duma corneta setorial aberta segundo o plano H, em função da dimensão da abertura, para vários valores do seu comprimento.

Como no caso da corneta setorial aberta segundo o plano E, também desta figura podemos tirar algumas conclusões importantes. Mantendo constante a dimensão a da abertura, pode-se aumentar a diretividade aumentando a dimensão D_h , isto é, aumentando o comprimento da corneta. Note-se, no entanto, que nunca se atinge a diretividade que a abertura teria se ela tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela. Mantendo constante a dimensão D_h e aumentando progressivamente a dimensão a observa-se que a diretividade começa a aumentar até atingir um máximo começando a diminuir rapidamente. Depois de se atingir o máximo, a variação de fase ao longo da abertura começa a ser tão significativa que destrói claramente o diagrama de radiação. Também neste caso nunca se atinge a diretividade que a abertura teria se ela tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela.

Os pontos de máxima diretividade correspondem a pares de valores $(D_h; a)$ que inseridos na relação (6-186), dão origem a valores do parâmetro $t \cong 0.38\lambda$. Por esta razão considera-se que uma corneta aberta segundo o plano H é ótima quando tem o parâmetro $t \cong 0.38\lambda$. Por este motivo a curva para $t = 3/8$ da Figura 6.29 está realçada.

Dividindo a máxima diretividade de cada uma das curvas, com a correspondente diretividade que a abertura teria se tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela, obtém-se a eficiência da abertura. Para os valores da Figura 6.30 verifica-se que a eficiência média da abertura é aproximadamente 62.7%.

Na Figura 6.31 estão representados os diagramas de radiação duma corneta setorial ótima aberta segundo o plano H, à frequência de 10GHz. Esta corneta resulta do aumento progressivo da maior dimensão dum guia de ondas retangular WR-90 que tem como maior dimensão $a_1 = 0.9" \cong 2.286\text{cm}$ e como menor dimensão $b_1 = 0.4" \cong 1.016\text{cm}$. A abertura tem como dimensões $a = 15\text{cm}$ e b_1 .

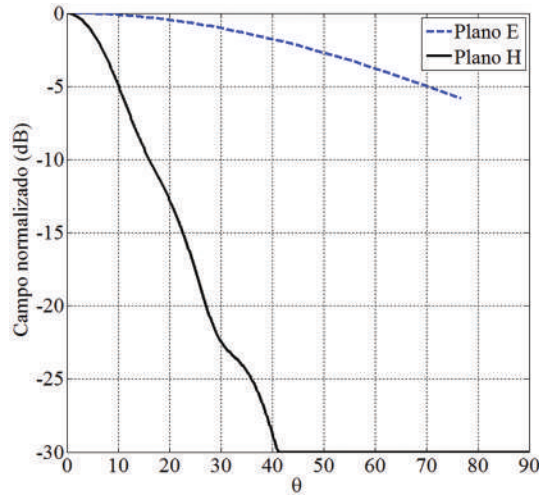


Figura 6.31. Diagramas de radiação duma corneta setorial ótima aberta segundo o plano H à frequência de 10GHz. As dimensões da abertura são $a = 15\text{cm}$ e $b_1 = 1.016\text{cm}$.

6.11.3 Corneta piramidal

Esta corneta resulta da modificação dum guia de onda retangular pelo aumento progressivo das dimensões do guia. Este processo resulta numa abertura com dimensões a e b . Esta corneta é conhecida por corneta piramidal devido à sua forma e é bastante utilizada como antena individual ou como alimentador de refletores, nas bandas das micro-ondas. Para a determinação dos campos radiados por esta abertura vamos assumir, tal como no caso das cornetas setoriais, que o modo fundamental no guia, modo TE_{10} , é transposto para a abertura como se pode observar pela Figura 6.32(a). Na Figura 6.32(b) está representado o corte desta corneta segundo o plano que contém o vetor $\vec{E}$ e na Figura 6.32(c) está representado o corte desta corneta segundo o plano que contém o vetor $\vec{H}$. O parâmetro p , que é a distância entre o plano da abertura e o plano final do guia de onda, é a altura da corneta. É importante frisar que esta altura tem que ser igual nos dois cortes para que a corneta seja realizável. Vamos ainda supor que a abertura se situa em espaço livre pelo que usaremos o método descrito na secção 6.10, aplicado às geometrias ilustradas nas figuras anteriores.

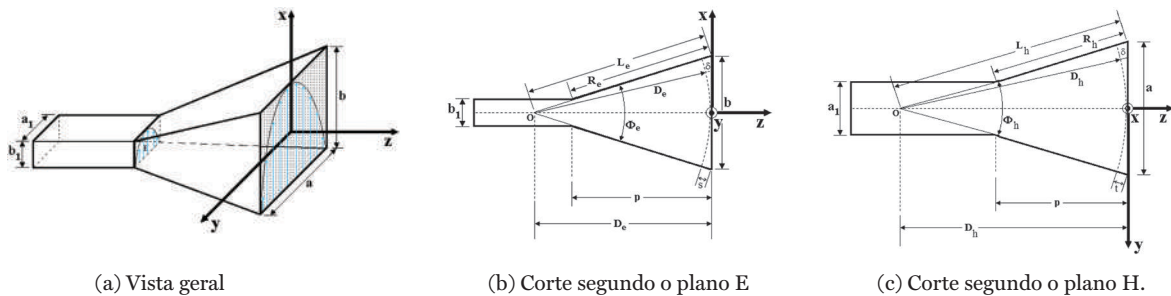


Figura 6.32. Corneta piramidal

6.11.3.1 Diagrama de radiação

As características de radiação desta corneta são fundamentalmente a combinação das características duma corneta setorial aberta segundo o plano E com as de uma corneta setorial aberta segundo o plano H. Como se pode ver pela Figura 6.32 ao longo da abertura a fase não é constante e varia de acordo com a diferença de percursos $\delta(x')$ que depende de x' através da relação (6-166) e $\delta(y')$ que depende de y' através da relação (6-185). As distribuições de campo na abertura derivam do modo TE_{10} , sendo, portanto, dadas por (6-202). Nos outros pontos do plano da abertura, as distribuições de campo consideram-se nulas.

$$\vec{E}_a(x', y') = \hat{x} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(x')} e^{-jk\delta(y')} \quad (6-202)$$

$$\vec{H}_a(x', y') = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(x')} e^{-jk\delta(y')} + \hat{z} jE_0 \frac{\pi\eta}{ka} \sin\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(x')} e^{-jk\delta(y')}$$

Estas distribuição de campo dão origem às distribuições de corrente equivalentes dadas por (6-203) e (6-204):

$$\vec{E}_a = \hat{x} E_a(x', y') \Rightarrow \vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_a = -\hat{y} M_y \Rightarrow M_y = -E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(x')} e^{-jk\delta(y')} \quad (6-203)$$

$$\vec{H}_a = \hat{y} H_{ay} + \hat{z} H_{az} \Rightarrow \vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_a = -\hat{x} J_x \Rightarrow J_x = -\frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(x')} e^{-jk\delta(y')} \quad (6-204)$$

A densidade de corrente J_x dá origem às componentes N_θ e N_ϕ e a densidade de corrente M_y dá origem às componentes L_θ e L_ϕ . Substituindo estas componentes em (6-37) obtém-se para o campo radiado a grande distância as expressões (6-205):

$$\begin{aligned} E_r &\cong 0 \\ E_\theta &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \cos\phi (1 + \cos\theta) I \\ E_\phi &\cong -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\phi (1 + \cos\theta) I \\ H_r &\cong 0 \\ H_\theta &\cong -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi &\cong \frac{E_\theta}{\eta} \end{aligned} \quad (6-205)$$

onde o integral I é definido por (6-206):

$$\begin{aligned} I &= \iint_S E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(x')} e^{-jk\delta(y')} e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} ds' \\ &= E_0 \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{jk[y' \sin\theta \sin\phi - \delta(y')]} dy'}_{I_1} \underbrace{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{jk[x' \sin\theta \cos\phi - \delta(x')]} dx'}_{I_2} \end{aligned} \quad (6-206)$$

Os integrais I_1 e I_2 podem ser dados por expressões que podem ser encontradas nas referências [1] e [2].

Designando a expressão de $\mathbf{I}_1$ por $\mathbf{Fh}(\theta, \phi)$ e a de $\mathbf{I}_2$ por $\mathbf{Fe}(\theta, \phi)$, o campo radiado a grande distância por uma corneta piramidal é dado pelas expressões (6-207):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &\cong 0 \\ \mathbf{E}_\theta &\cong -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 \cos\phi (1 + \cos\theta) \mathbf{Fh}(\theta, \phi) \mathbf{Fe}(\theta, \phi) \\ \mathbf{E}_\phi &\cong jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 \sin\phi (1 + \cos\theta) \mathbf{Fh}(\theta, \phi) \mathbf{Fe}(\theta, \phi) \\ \mathbf{H}_r &\cong 0 \\ \mathbf{H}_\theta &\cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta} \\ \mathbf{H}_\phi &\cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta} \end{aligned} \quad (6-207)$$

Resolvendo os integrais $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ numericamente, pode-se calcular os diagramas de radiação.

Na Figura 6.33 está ilustrado o diagrama de radiação, duma corneta piramidal com as seguintes dimensões. O guia de ondas retangular tem como maior dimensão $a_1 = 0.5\lambda$ e como menor dimensão $b_1 = 0.25\lambda$. A abertura tem como dimensões $a = 5.5\lambda$ e $b = 2.75\lambda$. A altura da corneta é $p = 5.5\lambda$.

Calculando os parâmetros s e t obtém-se $s = 0.156\lambda$ e $t = 0.625\lambda$. Estes valores são bastante diferentes dos óptimos anteriormente obtidos para as cornetas setoriais. Por esta razão esta corneta não é considerada ótima.

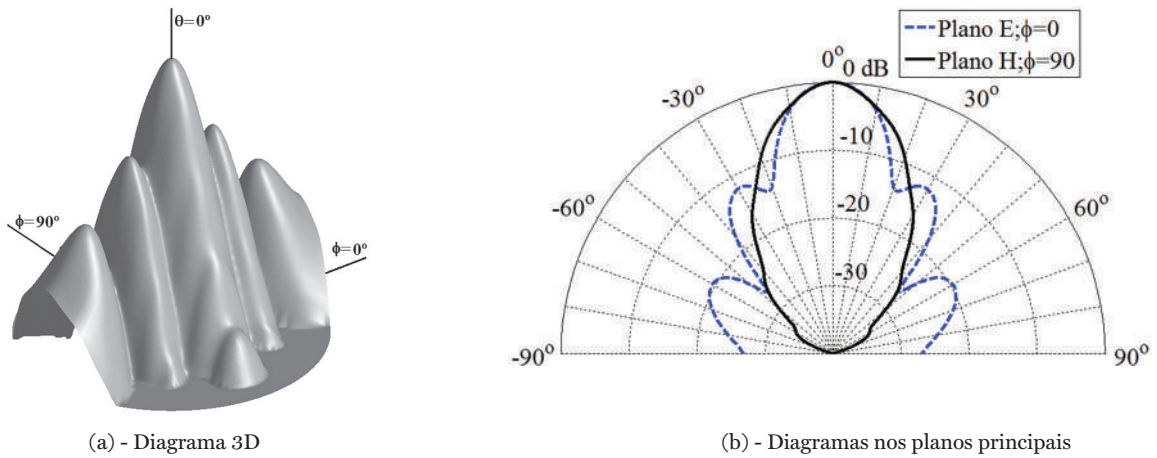
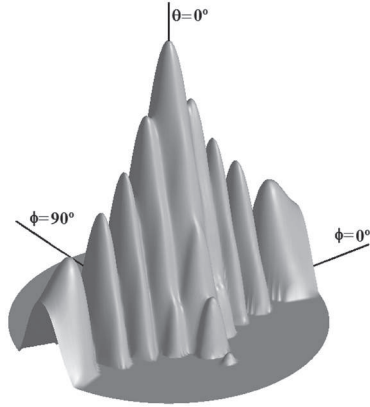


Figura 6.33. Diagrama de radiação duma corneta piramidal com as seguintes dimensões

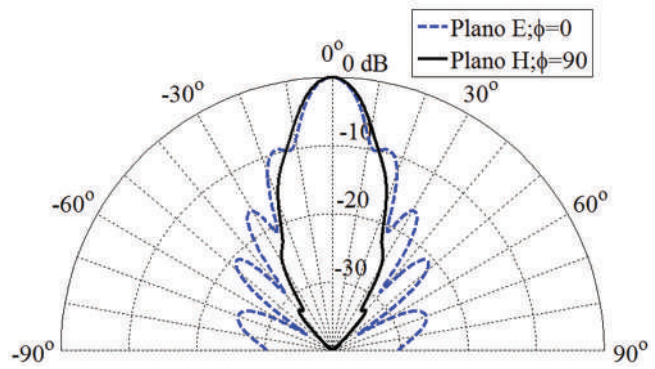
$$a_1 = 0.5\lambda; b_1 = 0.25\lambda; a = 5.5\lambda; b = 2.75\lambda; p = 5.5\lambda$$

Na Figura 6.34 está ilustrado o diagrama de radiação, à frequência de 10GHz, duma corneta piramidal com as seguintes dimensões. O guia de ondas retangular é o WR-90 que tem como maior dimensão $a_1 = 0.9" \cong 2.286\text{cm}$ e como menor dimensão $b_1 = 0.4" \cong 1.016\text{cm}$. A abertura tem como dimensões $a = 18\text{cm}$ e $b = 12.525\text{cm}$. A altura da corneta é $p = 32.1\text{cm}$.

Calculando os parâmetros s e t obtém-se $s = 0.24\lambda$ e $t = 0.366\lambda$. Estes valores são bastante próximos dos ótimos anteriormente obtidos para as cornetas setoriais. Por esta razão esta corneta é considerada ótima.



(a) - Diagrama 3D



(b) - Diagramas nos planos principais

Figura 6.34. Diagrama de radiação duma corneta piramidal com as seguintes dimensões

$$a_1 = 0.762\lambda; b_1 = 0.339\lambda; a = 6\lambda; b = 4.175\lambda; p = 10.7\lambda.$$

6.11.3.2 Diretividade

A diretividade da antena é dada por $D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}}$, em que $U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2$, sendo $|\mathbf{E}|_{\max}$ dado por $|\mathbf{E}|_{\max}^2 = |\mathbf{E}_\theta|_{\max}^2 + |\mathbf{E}_\phi|_{\max}^2$ para $\theta = 0$.

Recorrendo às equações (6-207) facilmente se obtém o valor de $|\mathbf{E}|_{\max}^2$ dado por (6-208):

$$|\mathbf{E}|_{\max}^2 = E_0^2 \left(\frac{1}{\lambda r} \right)^2 |\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2 |\mathbf{Fe}(\delta(x'))|^2 \quad (6-208)$$

Usando esta relação, obtém-se (6-209):

$$U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2 = \frac{E_0^2}{2\eta} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 |\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2 |\mathbf{Fe}(\delta(x'))|^2 \quad (6-209)$$

Substituindo (6-209) e $P_{\text{rad}} = \frac{E_0^2}{4\eta} ab$ na fórmula da diretividade obtém-se (6-210):

$$D = \frac{8\pi}{ab\lambda^2} |\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2 |\mathbf{Fe}(\delta(x'))|^2 \quad (6-210)$$

Em que $|\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2$ é dada por (6-211) e $|\mathbf{Fe}(\delta(x'))|^2$ é dado por (6-212).

$$|\mathbf{Fh}(\delta(y'))|^2 = \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{a} y'\right) e^{-jk\delta(y')} dy' \right|^2 \quad (6-211)$$

$$|\mathbf{Fe}(\delta(x'))|^2 = \left| \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jk\delta(x')} dx' \right|^2 \quad (6-212)$$

Resolvendo numericamente (6-211) e (6-212), pode-se calcular a diretividade duma corneta piramidal usando (6-210).

Fazendo estes cálculos para o exemplo da Figura 6.33 obtém-se uma diretividade $D = 19\text{dBi}$ e uma eficiência da abertura $e_{ab} = 41.8\%$. Para o exemplo da Figura 6.34 obtém-se uma diretividade $D = 22.7\text{dBi}$ e uma eficiência da abertura $e_{ab} = 53.3\%$. Estes resultados mostram que uma corneta ótima tem uma melhor eficiência de abertura pelo que ao projetar uma corneta piramidal se deve procurar atingir este objetivo.

Considerando uma dada corneta piramidal, é evidente que se mantivermos as dimensões da abertura e aumentarmos progressivamente a sua altura, teremos menos erros de fase na abertura e, portanto, uma distribuição mais uniforme. Isso vai dar origem a um aumento da diretividade e da eficiência de abertura. Aplicando este conceito ao exemplo da Figura 6.34 obtém-se as curvas da Figura 6.35. Como se pode ver pelas Figura 6.35(a) e Figura 6.35(b) quando se começa a aumentar a altura p a diretividade e a eficiência de abertura aumentam bastante, mas a partir dum dado valor de p o aumento é bastante suave. Atendendo a que uma altura grande significa uma corneta demasiado comprida e possivelmente impraticável, somos levados a concluir que se deve optar por uma solução de compromisso entre umas dimensões praticáveis e um desempenho aceitável. Essa solução de compromisso consiste em procurar que a corneta tenha os parâmetros s e t óptimos. Como se pode ver pela Figura 6.35(c) para este exemplo isso conduz a uma altura $p \cong 10\lambda$. Para esta altura a diretividade é aproximadamente 22.5dBi e a eficiência de abertura é cerca de 52% .

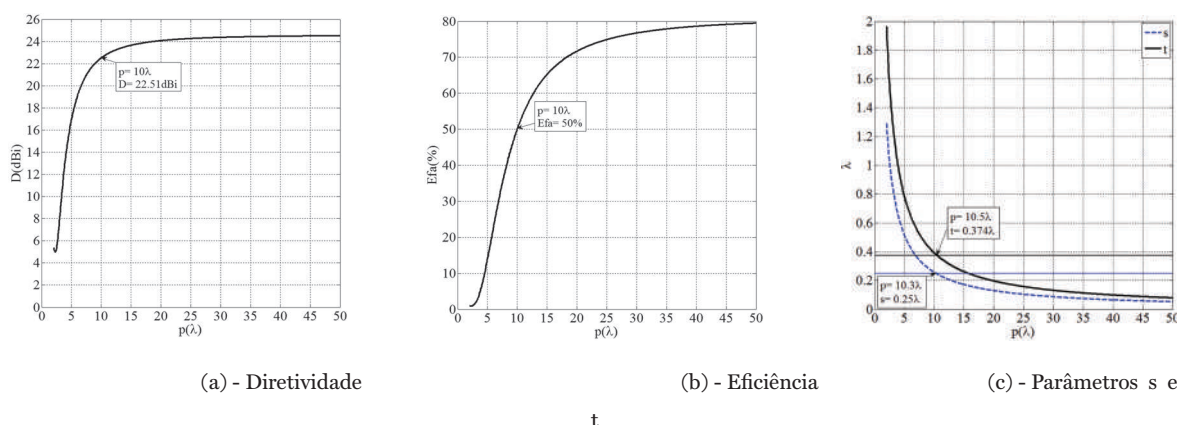


Figura 6.35. Corneta piramidal com as seguintes dimensões da abertura: $a = 6\lambda$; $b = 4.175\lambda$.

6.11.3.3 Projeto duma corneta piramidal ótima

Vamos assumir que se pretende projetar uma corneta piramidal ótima de modo que tenha um determinado ganho a uma dada frequência. A corneta será alimentada por um guia de ondas retangular apropriado à frequência. Sendo assim, os dados de entrada são as dimensões do guia, o ganho pretendido e a frequência.

Começemos por ter em conta as seguintes considerações.

- Para qualquer antenna a relação entre o ganho e a diretividade é dada por $G = e_A D$ em que e_A é a eficiência da antenna relacionada com as perdas nos condutores, nos dielétricos e com a eventual desadaptação ao guia de alimentação. Para uma antenna deste tipo sendo bem construída é de presumir uma eficiência elevada de cerca de 95% .

Por outro lado, a diretividade é dada por $D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ef} = \frac{4\pi}{\lambda^2} e_{ab} A_{física}$, em que e_{ab} é a eficiência da abertura. Vimos atrás que a eficiência de abertura é cerca de 52%. Conjugando estas duas eficiências pode-se considerar como um bom ponto de partida para este projeto a relação (6-213).

$$G \cong 0.95 \frac{4\pi}{\lambda^2} 0.52 A_{física} \cong 0.5 \frac{4\pi}{\lambda^2} ab \quad (6-213)$$

- Os parâmetros s e t devem ser ótimos, isto é, $s \cong \frac{1}{4}\lambda$ e $t \cong \frac{3}{8}\lambda$.

$$\text{Atendendo às relações (6-167) e (6-186) obtém-se } a \cong \sqrt{\frac{3}{8}\lambda 8D_h} = \sqrt{3D_h\lambda} \text{ e } b \cong \sqrt{\frac{1}{4}\lambda 8D_e} = \sqrt{2D_e\lambda}.$$

É certo que as dimensões D_e e D_h são diferentes entre si e diferentes da altura p da corneta, no entanto como primeira aproximação considerando que D_e e D_h são iguais à altura p , temos como ponto de partida a relação (6-214).

$$G \cong 0.5 \frac{4\pi}{\lambda^2} \sqrt{3p\lambda} \sqrt{2p\lambda} \Rightarrow p \cong 0.065 G \lambda \quad (6-214)$$

Tendo em conta as considerações anteriores, para a realização deste projeto pode-se estabelecer então o seguinte roteiro.

1. Inserindo o ganho pretendido na relação (6-214), começa-se por determinar a altura p ;
2. Da geometria da corneta obtém-se as relações $D_h = p \frac{a}{a-a_1}$ e $D_e = p \frac{b}{b-b_1}$. Por outro lado, $a \cong \sqrt{3D_h\lambda}$ e $b \cong \sqrt{2D_e\lambda}$.

Substituindo estas expressões nas relações anteriores e resolvendo a primeira em ordem a a e a segunda em ordem a b , pode-se obter uma primeira estimativa das dimensões da abertura pelas expressões $a = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4x3p\lambda}}{2}$ e $b = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4x2p\lambda}}{2}$.

3. A partir destes valores de a , de b e de p , determina-se novos valores de D_e e D_h através das relações $D_h = p \frac{a}{a-a_1}$ e $D_e = p \frac{b}{b-b_1}$.
4. Com estes valores pode-se calcular numericamente a diretividade da corneta piramidal usando (6-210). O ganho é estimado por $G = 0.95 D$.
5. Calcula-se a diferença DG entre o ganho pretendido e este novo valor. Se este ganho for menor do que o pretendido, aumenta-se o ganho pretendido de DG e volta-se ao ponto 1. Se este ganho for maior do que o pretendido, diminui-se o ganho pretendido de DG e volta-se também ao ponto 1.
6. Repete-se o processo até se obter uma diferença DG inferior a um valor estipulado.

O autor desenvolveu um programa em Matlab baseado neste procedimento e que pode ser usado no projeto destas cornetas.

Exemplo 6.2

Pretende-se calcular uma corneta piramidal ótima com um ganho de 16dBi à frequência 10GHz. O guia de onda que se vai usar é o WR-90 cujas dimensões são, $a_1 \cong 22.86\text{mm}$ e $b_1 \cong 10.16\text{mm}$.

Usando esse programa obtém-se os seguintes resultados:

DADOS DE ENTRADA

Ganho pretendido de 16dBi à frequência de 10GHz

Guia de onda

Lado maior, $a_1 = 22.86\text{mm}$

Lado menor, $b_1 = 10.16\text{mm}$

RESULTADOS

Dimensões da corneta

Abertura:

Dimensão segundo o plano H, $a = 86.19\text{mm}$

Dimensão segundo o plano E, $b = 65.62\text{mm}$

Altura, $p = 60.66\text{mm}$

Faces (são dois pares de trapézios)

Faces perpendiculares ao plano H

Base maior, $b = 65.62\text{mm}$

Base menor, $b_1 = 10.16\text{mm}$

Altura, $R_h = 68.43\text{mm}$

Faces perpendiculares ao plano E

Base maior, $a = 86.19\text{mm}$

Base menor, $a_1 = 22.86\text{mm}$

Altura, $R_e = 66.69\text{mm}$

Características da corneta

Valores de s e t em comprimentos de onda

$s = 0.24$

$t = 0.35$

A diretividade da corneta é 16.24dBi

A eficiência da abertura é 0.533, isto é 53.3%

O ganho estimado da corneta é 16.02dBi

Na Figura 6.36 estão representados os diagramas de radiação nos planos principais e a variação do ganho em função da frequência, da corneta piramidal do Exemplo 6.2.

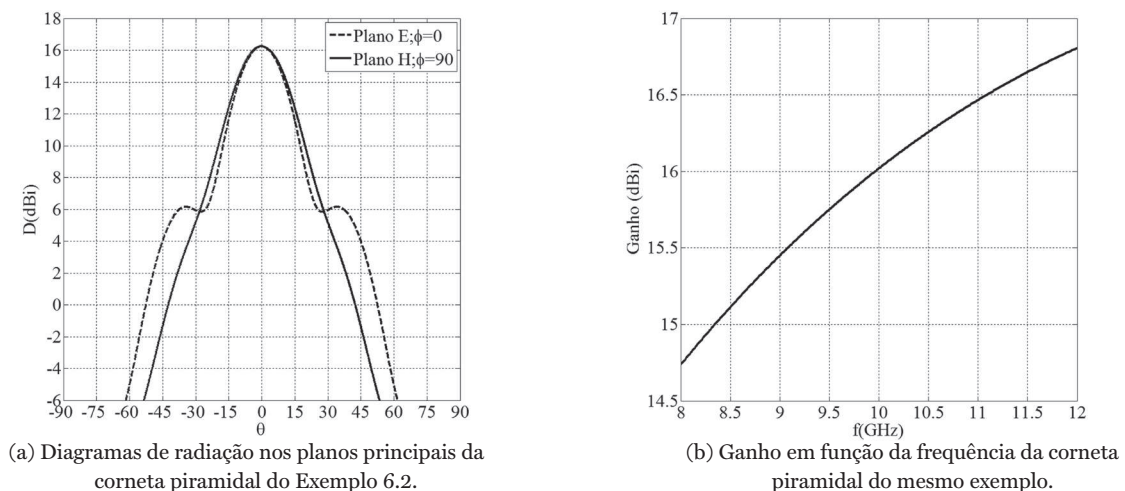


Figura 6.36.

6.11.4 Corneta cónica

Esta corneta resulta da modificação dum guia de onda circular pelo aumento progressivo do raio do guia a_1 . Este processo resulta numa abertura circular de raio a , tal como se ilustra na Figura 6.37(a). Para a determinação dos campos radiados por esta abertura vamos assumir que o modo fundamental no guia, modo TE_{11} , é transposto para a abertura. Vamos ainda supor que a abertura se situa em espaço livre pelo que usaremos o método descrito na secção 6.10, aplicado à geometria ilustrada na Figura 6.37(b).

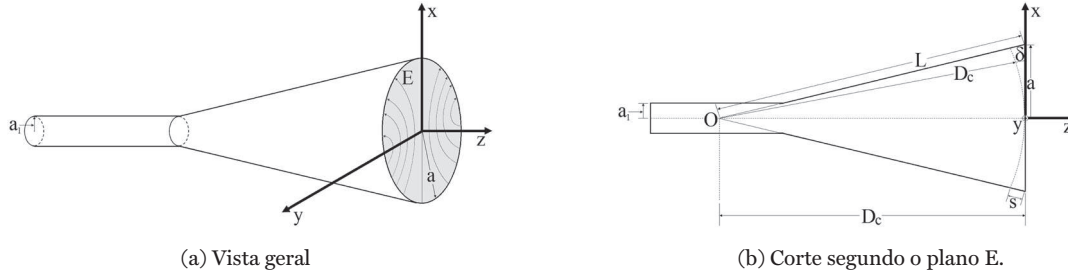


Figura 6.37. Corneta cónica no modo TE_{11}

Observando a Figura 6.37 (b), pode-se admitir que o ponto O é a origem de ondas esféricas que iluminam a abertura. O lugar geométrico da linha equifase está representada pelo arco de circunferência a tracejado. Ao longo da abertura a fase não é constante e varia de acordo com a diferença de percursos definida pela distância δ . Considerando que um ponto genérico da abertura tem as coordenadas (ρ', ϕ') , então a distância δ depende de ρ' através da relação (6-215) que foi simplificada pela aplicação do desenvolvimento em série do radical.

$$\delta(\rho') = -Dc + \sqrt{Dc^2 + (\rho')^2} \cong \frac{1}{2} \frac{\rho'^2}{Dc} \quad (6-215)$$

A máxima diferença de percursos definida pela distância s ocorre para $\rho' = a$ sendo dada pela relação (6-216):

$$s \cong \frac{1}{2} \frac{a^2}{Dc} = \frac{a^2}{2Dc} \quad (6-216)$$

Para que a fase ao longo da abertura não varie muito, a distância s deve ser pequena comparada com o comprimento de onda. É óbvio que quanto mais comprida for a corneta, menor será s . Isso implica, contudo, que para uma dada abertura, se possa ter uma corneta razoavelmente comprida o que significa que $Dc \cong L$ pelo que (6-216) se pode também escrever como $s \cong \frac{a^2}{2L}$.

6.11.4.1 Diagrama de radiação

Para determinar os campos radiados por esta abertura que assumimos se situa em espaço livre, vamos usar o método descrito na secção 6.10, aplicado à geometria ilustrada na Figura 6.37. Como se pode ver pela figura as distribuições de campo na abertura derivam do modo TE_{11} , sendo, portanto, dadas por (6-217). Nos outros pontos do plano da abertura, as distribuições de campo consideram-se nulas.

$$\vec{E}_a(\rho', \phi') = \hat{\rho} \frac{E_0}{\rho'} J_1(h\rho') \cos\phi' e^{-jk\delta(\rho')} - \hat{\phi} E_0 h J_1'(h\rho') \sin\phi' e^{-jk\delta(\rho')} \quad (6-217)$$

$$\vec{H}_a(\rho', \phi') = \hat{\rho} \left(-\frac{E_\phi}{Z} \right) + \hat{\phi} \frac{E_\rho}{Z}$$

Em que $h = \frac{1.8412}{a}$ sendo 1.8412 a primeira raiz da função $J_1'(x)$ e $Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$ sendo $\gamma = \sqrt{h^2 - \omega^2\mu\epsilon}$.

Passando de coordenadas polares para coordenadas cartesianas obtém-se as expressões (6-218):

$$E_{ax}(\rho', \phi') = E_\rho \cos\phi' - E_\phi \sin\phi'$$

$$E_{ay}(\rho', \phi') = E_\rho \sin\phi' + E_\phi \cos\phi'$$

$$H_{ax}(\rho', \phi') = -\frac{E_\phi}{Z} \cos\phi' - \frac{E_\rho}{Z} \sin\phi' \quad (6-218)$$

$$H_{ay}(\rho', \phi') = -\frac{E_\phi}{Z} \sin\phi' + \frac{E_\rho}{Z} \cos\phi'$$

Estas distribuições de campo dão origem às distribuições de corrente equivalentes dadas por (6-219) e (6-220):

$$\vec{M}_S = -\hat{n} \times \vec{E}_a = -\hat{z} \times (\hat{x}E_{ax} + \hat{y}E_{ay}) = -\hat{y}E_{ax} + \hat{x}E_{ay} \Rightarrow \mathbf{M}_x = E_{ay}; \mathbf{M}_y = -E_{ax} \quad (6-219)$$

$$\vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}_a = \hat{z} \times (\hat{x}H_{ax} + \hat{y}H_{ay}) = \hat{y}H_{ax} - \hat{x}H_{ay} \Rightarrow \mathbf{J}_x = -H_{ay}; \mathbf{J}_y = H_{ax} \quad (6-220)$$

As densidades de corrente $\mathbf{J}_x$ e $\mathbf{J}_y$, de acordo com (6-39) dão origem às componentes $\mathbf{N}_x$ e $\mathbf{N}_y$. Desenvolvendo $\mathbf{N}_x$ obtém-se (6-221):

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_x &= - \iint_S \left(-\frac{E_\phi}{Z} \sin\phi' + \frac{E_\rho}{Z} \cos\phi' \right) e^{jk\rho' \cos\Psi} ds' = \\ &= -\frac{E_0}{Z} \iint_S h J_1'(h\rho') \sin\phi' e^{-jk\delta(\rho')} \sin\phi' e^{jk\rho' \cos\Psi} ds' \\ &\quad - \frac{E_0}{Z} \iint_S \frac{J_1(h\rho')}{\rho'} \cos\phi' e^{-jk\delta(\rho')} \cos\phi' e^{jk\rho' \cos\Psi} ds' \end{aligned} \quad (6-221)$$

Recorrendo a (6-44) e atendendo a que $x' = \rho' \cos\phi'$ e $y' = \rho' \sin\phi'$, pode-se escrever $\rho' \cos\Psi = \rho' \sin\theta(\cos\phi' \cos\phi + \sin\phi' \sin\phi) = \rho' \sin\theta \cos(\phi - \phi')$. Substituindo estas relações em (6-221) obtém-se (6-222):

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_x &= -\frac{E_0}{Z} \iint_S h J_1'(h\rho') \sin^2\phi' e^{jk[\rho' \sin\theta \cos(\phi - \phi') - \delta(\rho')]} ds' \\ &\quad - \frac{E_0}{Z} \iint_S \frac{J_1(h\rho')}{\rho'} \cos^2\phi' e^{jk[\rho' \sin\theta \cos(\phi - \phi') - \delta(\rho')]} ds' \end{aligned} \quad (6-222)$$

que se pode desenvolvida pode tomar a forma de (6-223):

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_x = & -\frac{E_0}{Z} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{J_1(h\rho')}{\rho'} \cos^2 \phi' e^{jk[\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi') - \delta(\rho')]} \rho' d\rho' d\phi' - \\ & -\frac{E_0}{Z} h \int_0^a \int_0^{2\pi} J_1'(h\rho') \sin^2 \phi' e^{jk[\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi') - \delta(\rho')]} \rho' d\rho' d\phi' \end{aligned} \quad (6-223)$$

Para simplificar vamos definir os integrais $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ respetivamente pelas relações (6-224) e (6-225):

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{J_1(h\rho')}{\rho'} \cos^2 \phi' e^{jk[\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi') - \delta(\rho')]} \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-224)$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_1'(h\rho') \sin^2 \phi' e^{jk[\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi') - \delta(\rho')]} \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-225)$$

Usando esta notação $\mathbf{N}_x$ é dado por (6-226):

$$\mathbf{N}_x = -\frac{E_0}{Z} (\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2) \quad (6-226)$$

Procedendo de igual modo com $\mathbf{N}_y$, obtém-se (6-227):

$$\mathbf{N}_y = -\frac{E_0}{Z} (\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4) \quad (6-227)$$

onde os integrais $\mathbf{I}_3$ e $\mathbf{I}_4$ são definidos respetivamente pelas relações (6-228) e (6-229):

$$\mathbf{I}_3 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{J_1(h\rho')}{\rho'} \sin \phi' \cos \phi' e^{jk[\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi') - \delta(\rho')]} \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-228)$$

$$\mathbf{I}_4 = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_1'(h\rho') \sin \phi' \cos \phi' e^{jk[\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi') - \delta(\rho')]} \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-229)$$

Convertendo $\mathbf{N}_x$ e $\mathbf{N}_y$ para coordenadas esféricas usando (6-40) obtém-se $\mathbf{N}_\theta$ e $\mathbf{N}_\phi$ dados por (6-230) e (6-231) respetivamente:

$$\mathbf{N}_\theta = -\frac{E_0}{Z} (\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2) \cos \theta \cos \phi - \frac{E_0}{Z} (\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4) \cos \theta \sin \phi \quad (6-230)$$

$$\mathbf{N}_\phi = \frac{E_0}{Z} (\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2) \sin \phi - \frac{E_0}{Z} (\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4) \cos \phi \quad (6-231)$$

Analogamente, as densidades de corrente $\mathbf{M}_x$ e $\mathbf{M}_y$, de acordo com (6-39) dão origem às componentes $\mathbf{L}_x$ e $\mathbf{L}_y$. Procedendo da mesma forma que se fez para o caso de $\mathbf{J}_x$ e $\mathbf{J}_y$, obtém-se $\mathbf{L}_\theta$ e $\mathbf{L}_\phi$ dados por (6-232) e (6-233) respetivamente:

$$\mathbf{L}_\theta = E_0 (\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4) \cos \theta \cos \phi - E_0 (\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2) \cos \theta \sin \phi \quad (6-232)$$

$$\mathbf{L}_\phi = -E_0 (\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4) \sin \phi - E_0 (\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2) \cos \phi \quad (6-233)$$

Substituindo estas componentes em (6-37) obtém-se para o campo radiado a grande distância as expressões (6-234):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_r &\cong 0 \\
 \mathbf{E}_\theta &\cong \mathbf{C} \left\{ [(\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4)\text{sen}\phi + (\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2)\text{cos}\phi] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\eta}{\mathbf{Z}} [(\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2)\text{cos}\theta \text{cos}\phi + (\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4)\text{cos}\theta \text{sen}\phi] \right\} \\
 \mathbf{E}_\phi &\cong \mathbf{C} \left\{ [(\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4)\text{cos}\theta \text{cos}\phi - (\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2)\text{cos}\theta \text{sen}\phi] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\eta}{\mathbf{Z}} [(\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2)\text{sen}\phi - (\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4)\text{cos}\phi] \right\} \\
 \text{com } \mathbf{C} &= jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0
 \end{aligned} \tag{6-234}$$

$$\mathbf{H}_r \cong 0$$

$$\mathbf{H}_\theta \cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta}$$

$$\mathbf{H}_\phi \cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

No plano E, $\phi = 0$, o campo radiado a grande distância por esta corneta é dado pelas expressões (6-235):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_r &\cong 0 \\
 \mathbf{E}_\theta &\cong \mathbf{C} \left[(\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2) \left(1 + \frac{\eta}{\mathbf{Z}} \text{cos}\theta \right) \right] \\
 \mathbf{E}_\phi &\cong \mathbf{C} \left[(\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4) \left(\frac{\eta}{\mathbf{Z}} + \text{cos}\theta \right) \right] \\
 |\mathbf{E}| &= \sqrt{|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2}
 \end{aligned} \tag{6-235}$$

$$\mathbf{H}_r \cong 0$$

$$\mathbf{H}_\theta \cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta}$$

$$\mathbf{H}_\phi \cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

No plano H, $\phi = 90$, o campo radiado a grande distância por esta corneta é dado pelas expressões (6-236):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_r &\cong 0 \\
 \mathbf{E}_\theta &\cong \mathbf{C} \left[(\mathbf{I}_3 - h\mathbf{I}_4) \left(1 + \frac{\eta}{\mathbf{Z}} \text{cos}\theta \right) \right] \\
 \mathbf{E}_\phi &\cong -\mathbf{C} \left[(\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2) \left(\frac{\eta}{\mathbf{Z}} + \text{cos}\theta \right) \right] \\
 |\mathbf{E}| &= \sqrt{|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2}
 \end{aligned} \tag{6-236}$$

$$\mathbf{H}_r \cong 0$$

$$\mathbf{H}_\theta \cong -\frac{\mathbf{E}_\phi}{\eta}$$

$$\mathbf{H}_\phi \cong \frac{\mathbf{E}_\theta}{\eta}$$

Tal como já se viu nas cornetas setoriais, é claro da Figura 6.37(b), que para a mesma dimensão da abertura, isto é, mantendo a , se aumentarmos a dimensão D_c , o parâmetro s diminui e concomitantemente diminui a variação de fase ao longo da abertura. Inversamente, uma diminuição de D_c traduz-se num aumento do parâmetro s e por consequência um aumento da variação de fase ao longo da abertura. Obviamente estas variações têm implicações no diagrama de radiação que se tornam desfocados com o aumento do parâmetro s .

Resolvendo numericamente as expressões (6-235) e (6-236) pode-se traçar os diagramas gerais (*universal patterns*) duma corneta cônica nos planos E e H. Estes diagramas estão representados na Figura 6.38.

Esta figura confirma que um aumento do parâmetro s tem por consequência um aumento da variação de fase ao longo da abertura que se traduz em diagramas de radiação mais desfocados.

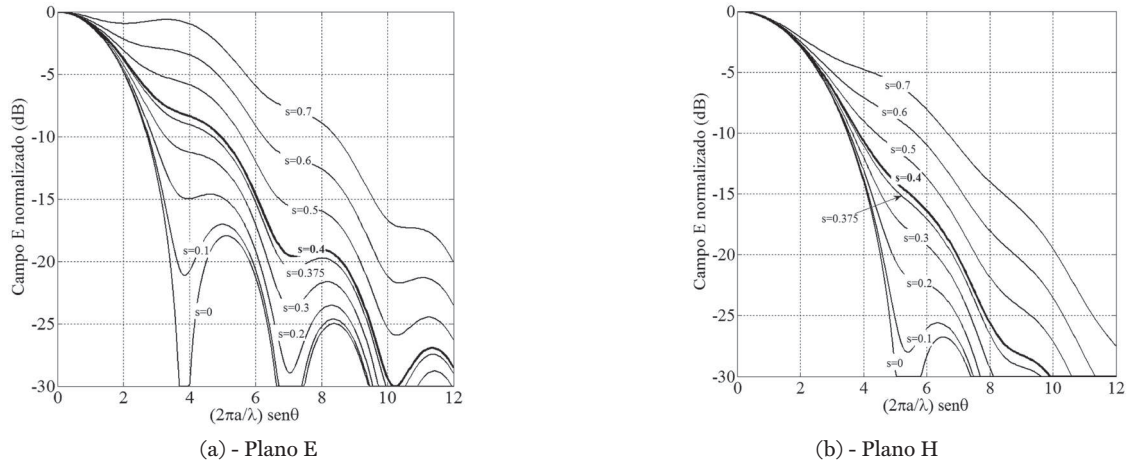


Figura 6.38. Diagramas de radiação gerais duma corneta cônica no modo TE_{11} para vários valores do parâmetro s expresso em comprimentos de onda.

6.11.4.2 Diretividade

A diretividade da antena é dada por $D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}}$, em que $U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2$, sendo $|\mathbf{E}|_{\max}$ dado por (6-237) para $\theta = 0$.

$$|\mathbf{E}|_{\max}^2 = |\mathbf{E}_\theta|_{\max}^2 + |\mathbf{E}_\phi|_{\max}^2 \quad (6-237)$$

Recorrendo às equações (6-235) ou (6-236) resolvidas para $\theta = 0$, após alguma manipulação matemática obtém o valor de $|\mathbf{E}|_{\max}^2$ dado por (6-238):

$$|\mathbf{E}|_{\max}^2 = E_0^2 |C|^2 \left(1 + \frac{\eta}{|Z|}\right)^2 [|\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2|^2 + |h\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3|^2] \quad (6-238)$$

Usando esta relação e tendo em conta que $|C|^2 = \left(\frac{1}{2\lambda r}\right)^2$, obtém-se (6-239):

$$U_{\max} = r^2 \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}|_{\max}^2 = E_0^2 \frac{1}{8\lambda^2 \eta} \left(1 + \frac{\eta}{|Z|}\right)^2 [|\mathbf{I}_1 + h\mathbf{I}_2|^2 + |h\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3|^2] \quad (6-239)$$

A potência radiada que é a que atravessa a abertura é dada por (6-240):

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \iint_S \text{Re}(\vec{E}_a \times \vec{H}_a^*) \cdot \hat{z} ds' \quad (6-240)$$

Substituindo nesta equação $\vec{E}_a$ e $\vec{H}_a$ dados por (6-217), obtém-se (6-241):

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \iint_S \text{Re}(\vec{E}_a \times \vec{H}_a^*) \cdot \hat{z} ds' = \frac{1}{2} \iint_S \text{Re} \left[\hat{z} \left(\frac{|\mathbf{E}_\rho|^2}{Z^*} + \frac{|\mathbf{E}_\phi|^2}{Z^*} \right) \right] \cdot \hat{z} ds' \quad (6-241)$$

Desenvolvendo esta relação, P_{rad} pode ser dado por (6-242):

$$P_{\text{rad}} = \frac{E_0^2}{2 |Z|} \left[\underbrace{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{J_1(h\rho')}{\rho'} \cos\phi' \right)^2 \rho' d\rho' d\phi'}_{IP_1} + \underbrace{\int_0^a \int_0^{2\pi} (h J_1'(h\rho') \sin\phi')^2 \rho' d\rho' d\phi'}_{IP_2} \right] \quad (6-242)$$

Resolvendo numericamente (6-239) e (6-242), calcula-se a diretividade.

Fazendo este cálculo para vários valores da dimensão D_c e do diâmetro da abertura, $2a$, pode-se traçar uma família de curvas de D em função de $2a/\lambda$, tal como se ilustra na Figura 6.39.

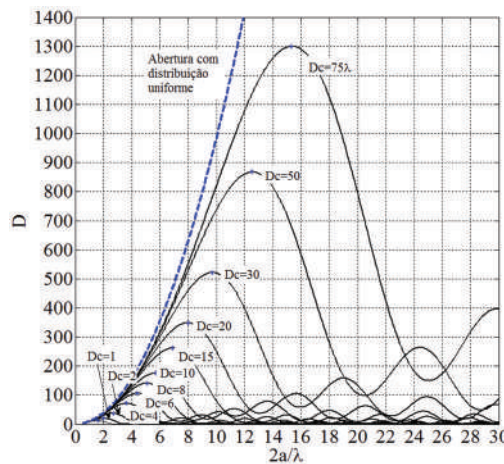


Figura 6.39. Diretividade numa corneta cônica, em função da dimensão da abertura, para vários valores do comprimento D_c .

Tal como no caso das cornetas setoriais, também desta figura podemos tirar algumas conclusões importantes. Mantendo constante a dimensão a da abertura, pode-se aumentar a directividade aumentando a dimensão D_c , isto é, aumentando o comprimento da corneta. Note-se, no entanto, que nunca se atinge a directividade que a abertura teria se ela tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela. Mantendo constante a dimensão D_c e aumentando progressivamente a dimensão a observa-se que a directividade começa a aumentar até atingir um máximo começando a diminuir rapidamente. Depois de se atingir o máximo, a variação de fase ao longo da abertura começa a ser tão significativa que destrói claramente o diagrama de radiação. Também neste caso nunca se atinge a directividade que a abertura teria se ela tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela.

Os pontos de máxima directividade correspondem a pares de valores $(D_c; a)$ que inseridos na relação (6-216), dão origem a valores do parâmetro $s \cong 0.4\lambda$. Por esta razão considera-se que uma corneta cônica é ótima quando tem o parâmetro $s \cong 0.4\lambda$. Por este motivo as curvas para $s = 0.4$ da Figura 6.38 estão realçadas.

Dividindo a máxima directividade de cada uma das curvas, com a correspondente directividade que a abertura teria se tivesse uma distribuição uniforme ao longo dela, obtém-se a eficiência da abertura. Para os valores da Figura 6.39 verifica-se que a eficiência média da abertura é aproximadamente 56%.

6.11.4.3 Projeto duma corneta cônica ótima

Vamos assumir que se pretende projetar uma corneta cônica ótima de modo que tenha um determinado ganho à frequência central duma determinada banda. Sendo assim, os dados de entrada são o ganho pretendido e a banda de frequências.

Começemos por ter em conta as seguintes considerações.

- Para qualquer antena a relação entre o ganho e a diretividade é dada por $G = e_A D$ em que e_A é a eficiência da antena relacionada com as perdas nos condutores, nos dielétricos e com a eventual desadaptação ao guia de alimentação. Para uma antena deste tipo sendo bem construída é de presumir uma eficiência elevada de cerca de 95%.

Por outro lado, a diretividade é dada por $D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ef} = \frac{4\pi}{\lambda^2} e_{ab} A_{física}$, em que e_{ab} é a eficiência da abertura. Vimos atrás que a eficiência de abertura é cerca de 56%. Conjugando estas duas eficiências pode-se considerar como um bom ponto de partida para este projeto a relação (6-243).

$$G \cong 0.95 \frac{4\pi}{\lambda^2} 0.56 A_{física} \cong 0.53 \frac{4\pi}{\lambda^2} \pi a^2 \quad (6-243)$$

Como o parâmetro s deve ser ótimo, isto é, $s \cong 0.4\lambda$, atendendo à relação (6-216) temos que $D_c = \frac{a^2}{2 \times 0.4\lambda}$. Introduzindo aqui (6-243) podemos considerar como ponto de partida a relação (6-244).

$$D_c \cong \frac{0.5896}{\pi^2} G \lambda \quad (6-244)$$

- Um guia de onda circular, ao contrário do guia de onda retangular, tem uma faixa muito mais reduzida de frequências em que se propaga apenas o modo fundamental TE_{11} . Os modos seguintes são o modo TM_{01} , com uma frequência de corte 30% superior (difícilmente excitável devido à configuração dos campos) e o modo TE_{21} , com frequência de corte 65% superior. Ao contrário dos guias retangulares, para os guias circulares não existe um padrão, isto é, não há guias padronizados. A corneta terá que ser alimentada por um guia de ondas circular apropriado à banda de frequências pretendida. Recomenda-se que o raio do guia seja tal que produza uma frequência de corte para o modo fundamental que seja cerca de 80% da frequência inferior dessa banda.

Tendo em conta as considerações anteriores, para a realização deste projeto pode-se estabelecer então o seguinte roteiro.

1. Usando a expressão que dá a frequência de corte para o modo fundamental TE_{11} e assumindo que esta frequência é 80% da frequência inferior dessa banda, f_1 (GHz), então o raio do guia recomendado é dado por (6-245).

$$a_1 \geq \frac{1.8412}{2\pi} \frac{300}{0.8 f_1 (\text{GHz})} (\text{mm}) \quad (6-245)$$

2. Inserindo o ganho pretendido na relação (6-244) determina-se a primeira estimativa da dimensão D_c ;
3. Atendendo à relação (6-216) temos que $a = \sqrt{0.8 \lambda D_c}$.
4. Com estes valores de D_c , a e a_1 pode-se calcular a diretividade da corneta resolvendo numericamente (6-239) e (6-242).
5. O ganho é estimado por $G = 0.95 D$.
6. Calcula-se a diferença DG entre o ganho pretendido e este novo valor. Se este ganho for menor do que o pretendido, aumenta-se o ganho pretendido de DG e volta-se ao ponto 2. Se este ganho for maior do que o pretendido, diminui-se o ganho pretendido de DG e volta-se também ao ponto 2.
7. Repete-se o processo até se obter uma diferença DG inferior a um valor estipulado.

O autor desenvolveu um programa em Matlab baseado neste procedimento e que pode ser usado no projeto destas cornetas.

Exemplo 6.3

Pretende-se calcular uma corneta cônica ótima com um ganho de 18dBi à frequência 11GHz.

Usando esse programa obtém-se os seguintes resultados:

DADOS DE ENTRADA

Ganho pretendido de 18dBi à frequência central de 11GHz

Banda de frequências pretendida, 9.9 a 12.1GHz. (20%)

RESULTADOS

Guia de onda sugerido:

Raio do guia de onda, $a_1 = 11.1\text{mm}$

ATENÇÃO

O modo TM₀₁ pode-se propagar porque a sua frequência de corte é 10.34GHz

Dimensões da corneta:

Raio da abertura, $a = 46.74\text{mm}$

Altura, $p = 76.36\text{mm}$

Características da corneta:

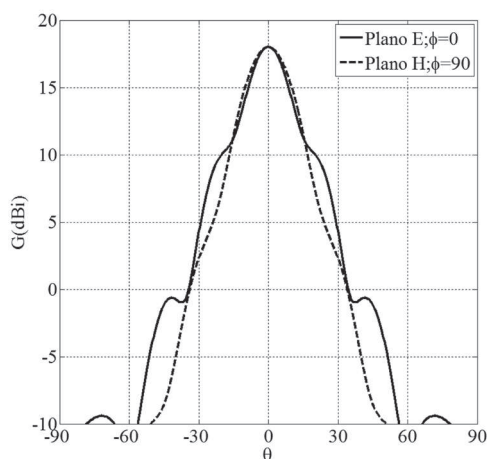
$s = 0.4\lambda$

A diretividade da corneta é 18.23dBi

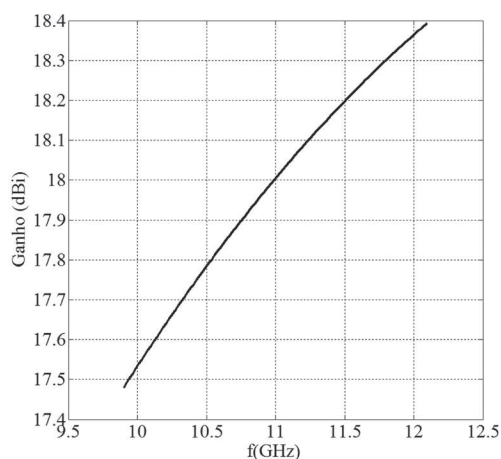
A eficiência da abertura é 0.573, isto é, 57.3%

O ganho estimado da corneta, à frequência de 11GHz, é 18.0dBi

Na Figura 6.40 estão representados os diagramas de radiação nos planos principais e a variação do ganho em função da frequência, da corneta cônica do Exemplo 6.3.



(a) Diagramas de radiação nos planos principais da corneta cônica do Exemplo 6.3.



(b) Ganho em função da frequência da corneta cônica do mesmo exemplo.

Figura 6.40.

Calculando a LFMP de diversas cornetas ótimas pode-se estabelecer relações empíricas que nos dão as LFMP nos planos E e H. Essas relações são respetivamente (6-246) e (6-247):

$$\text{LFMP} \cong \frac{32.6 \lambda}{a} (^\circ) \quad (6-246)$$

$$\text{LFMP} \cong \frac{38 \lambda}{a} (^\circ) \quad (6-247)$$

Os campos radiados dados pelas relações deduzidas atrás para as várias cornetas dão origem a diagramas que são corretos e precisos na região do lobo principal e dos primeiros lóbulos secundários. Contudo, em todas as cornetas ocorrem difrações nas suas arestas, sendo a contribuição destas difrações mais dominante nas direções onde os campos dados pelas relações deduzidas são bastante reduzidos. Para determinar com precisão os lóbulos secundários de baixa amplitude é necessário recorrer a métodos de análise que tenham em consideração essas difrações. Devido à sua complexidade neste livro não são desenvolvidos estes métodos, mas na referência [1] podem ser obtidas informações importantes sobre este assunto.

6.11.5 Cornetas corrugadas

A partir dos anos 60 do século passado o uso de refletores parabólicos em telecomunicações e radioastronomia teve um grande desenvolvimento, sendo feitos grandes progressos na procura de alimentadores apropriados para uma boa iluminação desses refletores. Estas pesquisas levaram à conclusão de que as cornetas de paredes lisas não eram as mais indicadas pois não apresentavam um diagrama de radiação idêntico em qualquer plano, isto é, um diagrama de revolução em torno do eixo da corneta. Na procura duma solução para este problema os investigadores concluíram que fazendo corrugações (sulcos) nas paredes duma corneta piramidal com uma abertura quadrada se conseguia quase um diagrama de revolução simétrico com idênticas larguras de feixe em ambos os planos E e H.

Na Figura 6.41 está ilustrada uma corneta piramidal com corrugações nas paredes perpendiculares ao campo E. Como as difrações nas arestas paralelas ao campo E são muito pequenas normalmente não se fazem corrugações nas paredes paralelas a este campo.

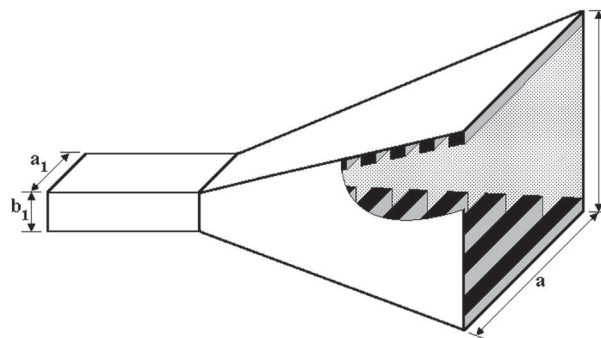
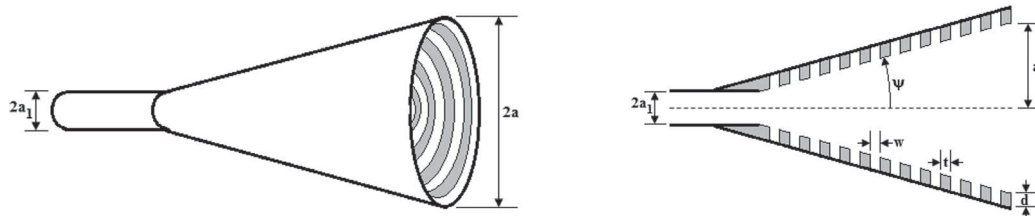


Figura 6.41. Corneta piramidal com paredes interiores corrugadas.

Colocando corrugações numa corneta cônica obtém-se uma corneta cônica corrugada. Na Figura 6.42 está ilustrada uma corneta cônica com corrugações nas paredes sendo estas corrugações perpendiculares ao eixo da corneta o que torna o seu fabrico mais simples. As corrugações excitam modos de ordem superior. A combinação do modo TE_{11} com o modo TM_{11} dá origem ao modo híbrido HE_{11} . Este modo tem simetria circular e produz larguras

de feixe iguais nos planos E e H. A profundidade das corrugações é da ordem de $\lambda/4$ e o seu número é de 10 ou mais por comprimento de onda.



(a) – Vista 3D (b) - Vista de corte
Figura 6.42. Corneta cônica com paredes interiores corrugadas.

Devido a estas características, esta corneta tornou-se o alimentador de excelência para refletores parabólicos, nomeadamente os refletores parabólicos de alto rendimento usados em aplicações que exigem grande precisão como os que se utilizam em telecomunicações nas ligações terra satélite e em radioastronomia.

As corrugações apresentam uma reactância à onda que se está a propagar. A profundidade das corrugações controla a natureza desta reactância. Uma profundidade da ordem de $\lambda/4$ é a que produz melhores resultados. Só junto à abertura é que é necessário que esta profundidade seja de $\lambda/4$. Entre a garganta da corneta e a abertura é conveniente aprofundar um pouco as corrugações. Normalmente na abertura a profundidade das corrugações é de $\lambda/4$ à mais baixa frequência da banda e junto à garganta da corneta a profundidade das corrugações é de $\lambda/2$ à mais alta frequência da banda. O número de corrugações deve ser pelo menos de 4 por comprimento de onda, sendo normalmente de 10. A frequência mais alta da banda determina o espaçamento das corrugações.

Cornetas com variados ângulos de abertura Ψ são usadas na prática. Contudo as que têm um grande ângulo Ψ , isto é, as que são muito abertas são designadas por *scalar horns*. Esta variante é muito usada como alimentador de refletores mais pequenos e para usos menos exigentes como por exemplo na receção de TV emitida por satélite.

Na Figura 6.43 está ilustrada uma corneta do tipo *scalar horn* retirada dum LNB (Low Noise Block) usado num paraboloide para a receção de TV emitida por satélite. Na Figura 6.44 estão representados os diagramas de radiação medidos na câmara anecoica da Universidade de Aveiro.

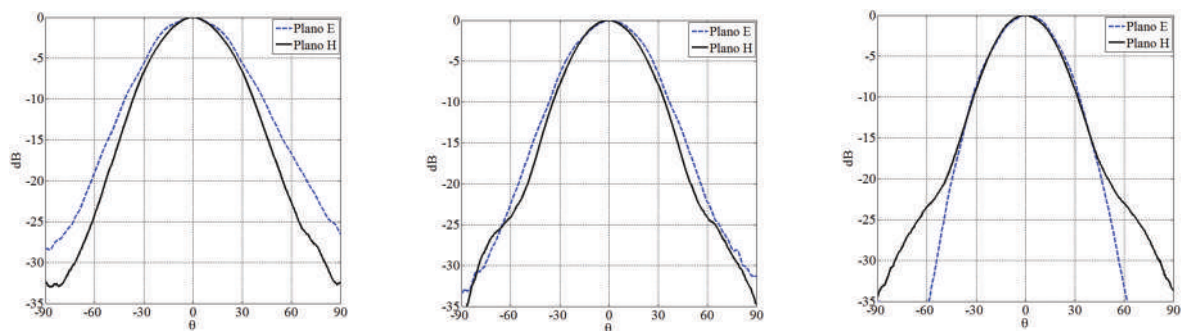


(a) – Vista em perspetiva



(b) - Vista de frente

Figura 6.43. *Scalar horn* retirada dum LNB usado num paraboloide para a receção de TV emitida por satélite na banda de 10 a 13GHz.



(a) - 10.75GHz

(b) - 11.75GHz

(c) - 12.75GHz

Figura 6.44 . Diagramas de radiação, medidos, da corneta da figura anterior.

Um caso particular também muito usado nesta última aplicação é o da corneta com $\Psi = 90^\circ$, ou seja, com as corrugações no plano da abertura. Esta corneta designa-se por *choque horn*. Na Figura 6.45 está ilustrada uma corneta deste tipo.

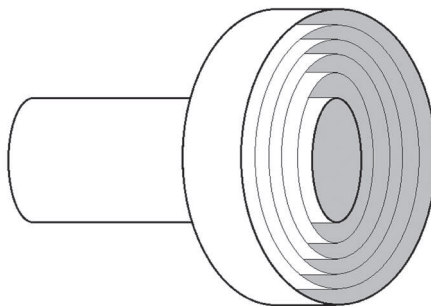


Figura 6.45. Corneta *choque horn*.

Convém notar que embora não exista uma formulação rigorosa de análise das cornetas corrugadas há muito trabalho realizado sobre elas. Nas referências [1], [2] e [9] podem ser obtidas informações sobre a bibliografia relevante sobre este assunto.

6.11.6 Centro de fase

Define-se centro de fase duma antenna como o ponto donde aparentemente ela radia ondas esféricas. A experiência mostra que normalmente o centro de fase não é um único ponto, em geral os centros de fase nos planos E e H não coincidem. Apesar da incerteza da sua localização este ponto é útil. Um caso evidente é a utilização duma corneta para alimentar um paraboloide dado que pela geometria do paraboloide as ondas esféricas devem emanar do seu foco, por esta razão o centro de fase da corneta deve coincidir o melhor possível com o foco.

As investigações que têm sido feitas sobre cornetas mostraram que dum modo geral o centro de fase está para trás do plano da abertura, tanto mais quanto maior for o parâmetro s , isto é, quanto mais aberta for a corneta. As cornetas corrugadas são as que têm o centro de fase mais bem definido. Também sobre este assunto nas referências [1], [2] e [9] podem ser obtidas informações sobre a bibliografia relevante.

6.11.6.1 Determinação experimental do centro de fase

De acordo com a definição de centro de fase duma antena, se medirmos a fase do campo radiado numa faixa angular em redor do seu máximo, ao longo duma circunferência centrada no centro de fase, os valores medidos devem ser constantes.

Como, no entanto, normalmente não se conhece *à priori* a localização do centro de fase a medida é feita em torno de outro ponto, por exemplo situado na abertura da antena. A partir destas medidas é possível determinar a localização do centro de fase, relativamente ao ponto usado como centro da circunferência ao longo da qual as medidas foram feitas.

Consideremos que a medida é feita de acordo com a configuração ilustrada na Figura 6.46(a), em que se assume que o centro de fase está atrás do plano de abertura onde está localizado o centro da circunferência ao longo do qual se vão fazer as medidas.

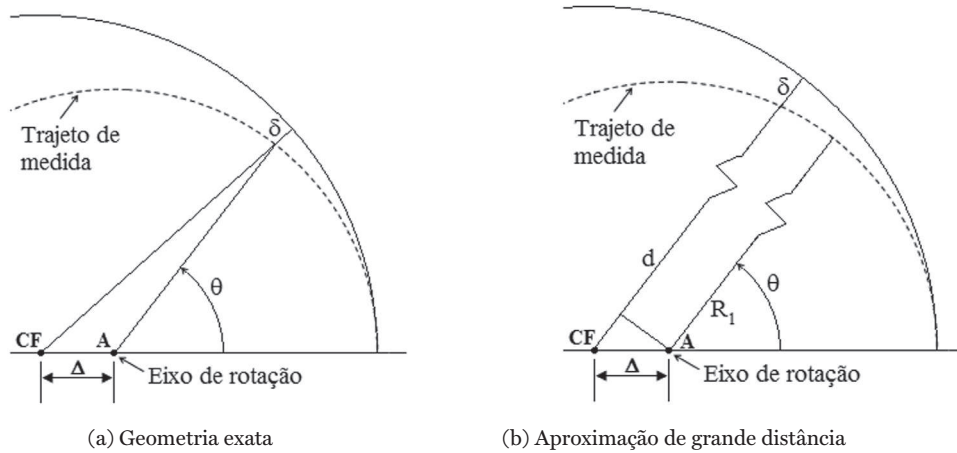


Figura 6.46. Configuração com o CF atrás do eixo de rotação.

Em relação a esta figura definimos:

R_1 - Raio do trajeto de medida que é a circunferência com centro no ponto A (eixo de rotação);

R_2 - Raio da circunferência com centro no ponto CF (centro de fase);

d - Distância do CF ao trajeto de medida;

Δ - Erro de posicionamento do CF.

Para esta configuração à medida que o ângulo θ aumenta a distância d vai diminuindo dando origem a um erro de fase. A diferença entre d e R_2 é o erro em distância e é dado por $\delta = R_2 - d$. Como R_2 é constante e d diminui, então δ aumenta com θ .

Como em geral d , R_1 e R_2 são muito maiores do que δ podemos considerar a aproximação ilustrada na Figura 6.46(b). Desta figura pode-se concluir que $d \cong R_1 + \Delta \cos \theta$ e também que $R_2 = R_1 + \Delta$. Usando estas relações pode-se então escrever a equação (6-248).

$$\delta \cong \Delta(1 - \cos \theta) \quad (6-248)$$

Esta equação δ em função de $(1 - \cos \theta)$ é a equação duma reta sendo o erro de posicionamento do CF, Δ , aproximadamente o seu declive.

A partir das medidas da fase do campo radiado é relevante obter a variação da fase relativamente à posição $\theta = 0$, isto é, $\Delta_{\text{fase}} = -kd - (-kR_2) = k\delta$. Como δ aumenta com θ , então também variação da fase Δ_{fase} aumenta com θ . Deste estudo podemos então concluir que se a partir das medidas efetuadas se verificar que variação da

fase Δ_{fase} aumenta com θ , é porque o centro de fase está atrás do centro da circunferência ao longo do qual se fizeram as medidas. Para facilidade de referência deve-se colocar o eixo de rotação no plano de abertura da antena.

Se usarmos a mesma análise, mas assumindo que o centro de fase está á frente do plano de abertura onde está localizado o centro da circunferência ao longo do qual se vão fazer as medidas, facilmente se conclui que a variação da fase Δ_{fase} diminui com θ .

Da variação da fase Δ_{fase} , obtida a partir das medidas da fase, obtém-se a variação da distância δ dado por (6-249).

$$\delta \cong \frac{\lambda}{360} \Delta_{\text{fase}}(^{\circ}) \quad (6-249)$$

O gráfico de δ em função de $(1 - \cos\theta)$ é aproximadamente uma reta. Aplicando uma regressão linear obtém-se a equação duma reta cujo declive é Δ .

Resumindo, o método experimental para determinar o centro de fase duma antena consiste em medir a fase do campo distante radiado numa faixa angular em redor do seu máximo, em torno de um eixo bem definido, por exemplo situado na abertura da antena. A partir das medidas da fase determina-se a variação da fase Δ_{fase} em relação à posição $\theta = 0^{\circ}$.

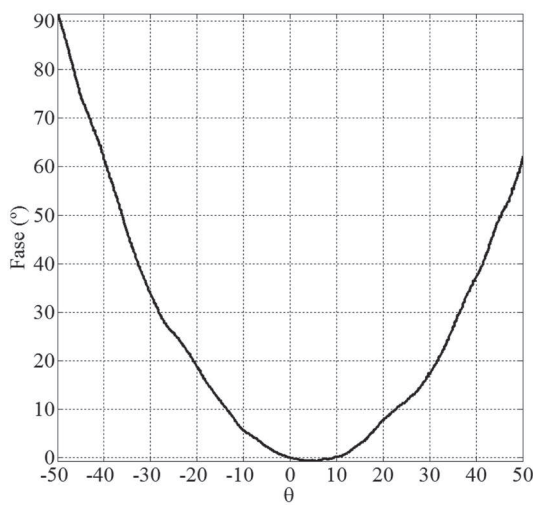
Se se verificar que variação da fase Δ_{fase} aumenta com θ , é porque o centro de fase está atrás do centro da circunferência ao longo do qual se fizeram as medidas. Se se verificar que variação da fase Δ_{fase} diminui com θ , é porque o centro de fase está á frente do centro da circunferência ao longo do qual se fizeram as medidas.

Em qualquer caso, recorrendo a (6-249), obtém-se a variação da distância δ . Do gráfico de δ em função de $(1 - \cos\theta)$ e aplicando uma regressão linear obtém-se a equação duma reta cujo declive é Δ .

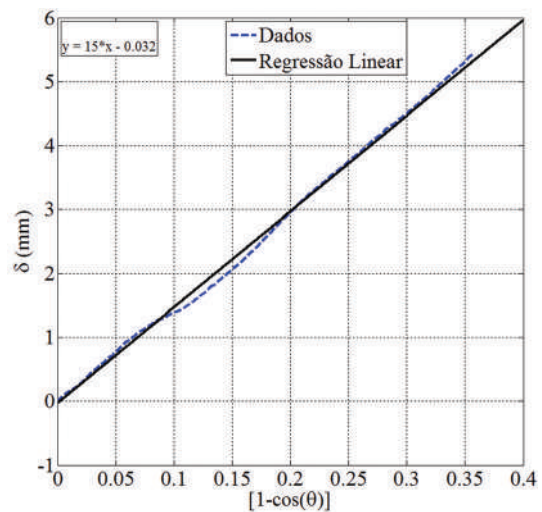
Este método foi aplicado à corneta da Figura 6.43 fazendo medidas à frequência de 11.75GHz. Usando um programa escrito para este efeito com base no procedimento que se acabou de descrever, obtiveram-se os seguintes resultados.

PLANO E $\phi = 0^{\circ}$.

O gráfico da variação da fase Δ_{fase} está representado na Figura 6.47(a). Como se pode ver Δ_{fase} aumenta com θ o que significa que o centro de fase está atrás do centro da circunferência ao longo do qual se fizeram as medidas. O gráfico de δ em função de $(1 - \cos\theta)$ está representado na Figura 6.47(b) onde também está a equação da reta que resulta da aplicação duma regressão linear. O seu declive é $\Delta \cong 15\text{mm}$. No plano E, o CF está, portanto, situado ATRÁS do eixo de rotação à distância de 15mm.



(a) Variação da fase Δ_{fase} em função de θ

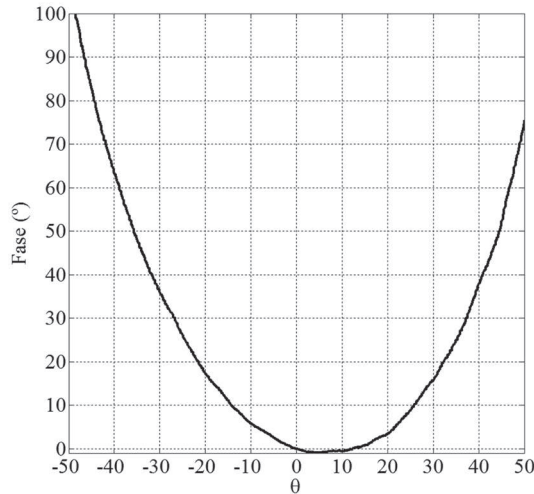


(b) Gráfico de δ em função de $(1 - \cos\theta)$

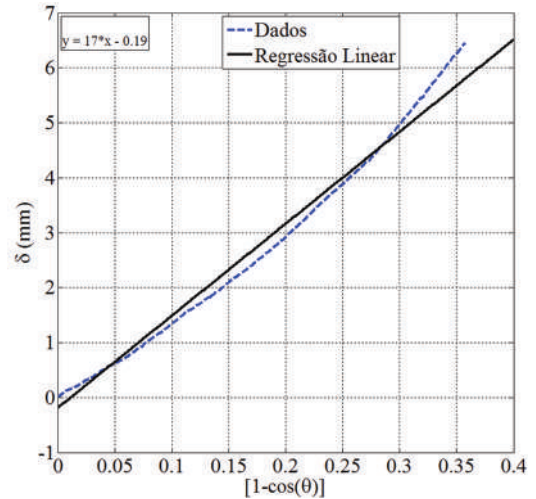
Figura 6.47. Dados para a obtenção do CF da corneta da Figura 6.43, no plano E, à frequência de 11.75GHz.

PLANO H $\phi = 90^\circ$.

O gráfico da variação da fase Δ_{fase} está representado na Figura 6.48(a). Como se pode ver Δ_{fase} aumenta com θ o que significa que o centro de fase está atrás do centro da circunferência ao longo do qual se fizeram as medidas. O gráfico de δ em função de $(1 - \cos\theta)$ está representado na Figura 6.48(b) onde também está a equação da reta que resulta da aplicação duma regressão linear. O seu declive é $\Delta \cong 17\text{mm}$. No plano H, o CF está, portanto, situado ATRÁS do eixo de rotação à distância de aproximadamente 17mm. Como é normal os CF nos dois planos não coincidem perfeitamente.



(a) Variação da fase Δ_{fase} em função de θ



(b) Gráfico de δ em função de $(1 - \cos\theta)$

Figura 6.48. Dados para a obtenção do CF da corneta da Figura 6.43, no plano H, à frequência de 11.75GHz.

6.12 Refletores

Desde que a propagação das ondas eletromagnéticas foi descoberta em 1888 por Heinrich Rudolf Hertz [10], que foram construídas as primeiras antenas para a sua radiação e receção. Como consequência do desenvolvimento das antenas cedo se procurou modificar o modo como radiavam utilizando superfícies refletoras, sendo o caso mais evidente o uso dum plano condutor para evitar a propagação na direção oposta à desejada. Quando se percebeu que estas ondas tinham a mesma natureza da luz, tentou-se usar refletores semelhantes aos espelhos que eram já usados na ótica. No entanto, para que um refletor seja eficaz, ele tem que ter dimensões de vários comprimentos de onda, como as primeiras ondas eletromagnéticas que foram geradas pelo homem eram de baixa frequência, isto é, de grande comprimento de onda a construção de refletores era impraticável. Só a partir dos anos 40 do século XX, quando começaram a ser geradas ondas eletromagnéticas com frequências de centenas de MHz e mesmo de alguns GHz, é que o uso de refletores se generalizou. A sua aplicação em radioastronomia, nas radiocomunicações por feixes hertzianos e nas comunicações por satélite conheceu um desenvolvimento enorme. O uso de refletores para a receção de televisão difundida por satélite cresceu de tal modo que a partir da década de 1970 as antenas, usando um refletor parabólico (conhecidas vulgarmente como parabólicas), tornaram-se quase um eletrodoméstico.

Para além do refletor plano que já abordamos no capítulo 4, as formas mais comuns de refletores são o refletor de canto, o refletor cilíndrico de secção parabólica e o refletor parabólico. Estas geometrias estão ilustradas na Figura 6.49.

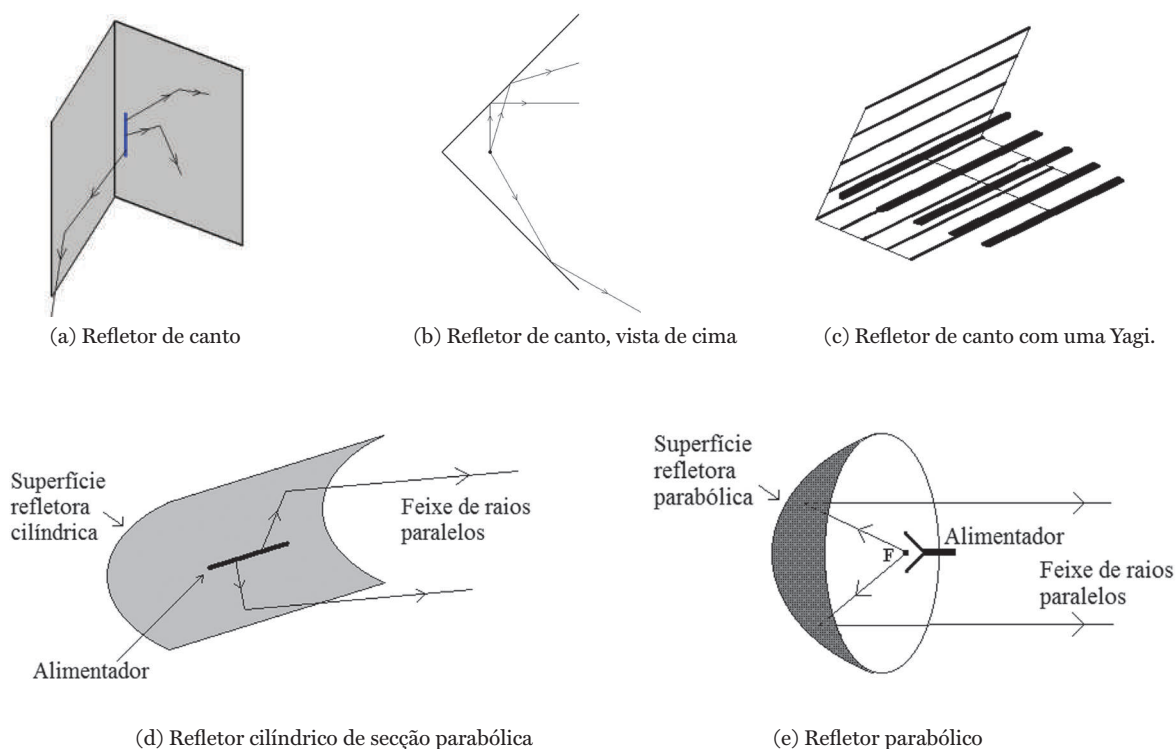


Figura 6.49. Formas mais comuns de refletores.

6.12.1 Refletor de canto

O refletor de canto é constituído por dois planos que se intersectam formando entre si um ângulo $0 < \alpha \leq 180^\circ$, tal como se ilustra na Figura 6.50.

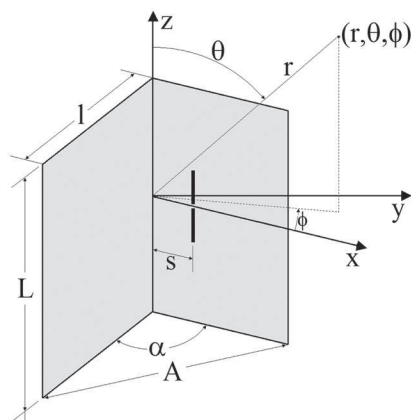


Figura 6.50. Refletor constituído por dois planos que formam entre si um ângulo $0 < \alpha \leq 180^\circ$.

Quando o ângulo α é igual a 180° o refletor degenera num plano. Embora se usem por vezes refletores de canto com um ângulo $\alpha < 90^\circ$, o refletor de canto com um ângulo $\alpha = 90^\circ$, é sem dúvida o mais comum. O alimentador dum refletor de canto é quase sempre um dipolo ou um agregado de dipolos colocados paralelamente à aresta do vértice à distância s .

Para manter uma boa eficiência a experiência recomenda que a distância s , entre o vértice e o alimentador, deve aumentar à medida que o ângulo α diminui e vice-versa. Esta distância é normalmente compreendida entre $\lambda/3$ e $2\lambda/3$.

O comprimento da aresta lateral é normalmente o dobro da distância s , isto é, $l \cong 2s$. O comprimento da aresta do vértice varia normalmente entre 1.2 a 1.5 vezes o comprimento do dipolo alimentador. A dimensão da abertura A é normalmente compreendida entre λ e 2λ .

Em algumas aplicações as superfícies do refletor são feitas com uma grelha de fios condutores em vez de uma folha contínua. Quando os condutores da grelha são paralelos ao dipolo e separados por uma distância da ordem de $\lambda/10$, a grelha comporta-se, em termos de reflexão, como uma superfície contínua com a vantagem de oferecer muito menos resistência ao vento. O refletor ilustrado na Figura 6.49(c) é um exemplo da aplicação desta técnica.

Pelo facto de o refletor de canto com um ângulo $\alpha = 90^\circ$ ser o mais comum vamos de seguida analisá-lo com algum detalhe, tomando como referência a geometria da Figura 6.50.

Consideremos então o refletor de canto alimentado com um dipolo colocado no eixo dos xx à distância s do vértice e orientado segundo o eixo dos zz , tal como se representa na Figura 6.51(a). A determinação do campo radiado por esta estrutura pode ser feita recorrendo ao modelo equivalente obtido pela aplicação da teoria das imagens. Este modelo está representado na Figura 6.51(b).

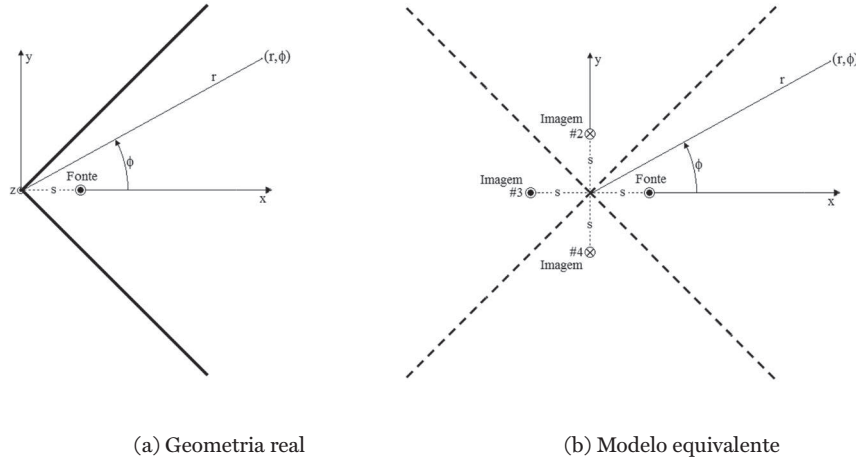


Figura 6.51. Refletor de canto alimentado com um dipolo colocado no eixo dos xx .

Desta figura facilmente se conclui que o campo radiado a grande distância é a sobreposição dos campos radiados por dois agregados, cada um com duas fontes. Um agregado está alinhado segundo o eixo dos xx e é composto por duas fontes em fase separadas por $2s$. O outro agregado está alinhado segundo o eixo dos yy e é composto também por duas fontes em fase separadas por $2s$, mas estas fontes estão em oposição de fase com as fontes do primeiro agregado.

Como já se viu no capítulo 4 o fator de agregado do primeiro agregado é dado por $(FA)_x = 2 \cos\left(\frac{k2s \cos \gamma_x}{2}\right)$ com $\cos \gamma_x = \sin \theta \cos \phi$, ou seja, o primeiro fator de agregado é dado por (6-250):

$$(FA)_x = 2 \cos(ks \sin \theta \cos \phi) \quad (6-250)$$

Do mesmo modo o fator de agregado do segundo agregado é dado por $(FA)_y = 2 \cos\left(\frac{k2s \cos \gamma_y}{2}\right)$ com $\cos \gamma_y = \sin \theta \sin \phi$, ou seja, o segundo factor de agregado é dado por (6-251):

$$(FA)_y = 2 \cos(ks \sin \theta \sin \phi) \quad (6-251)$$

A sobreposição dos dois fatores de agregado, tendo em conta a oposição de fase entre eles, dá o fator de agregado cuja expressão é (6-252):

$$(FA)_x - (FA)_y = 2 [\cos(ks \sin\theta \cos\phi) - \cos(ks \sin\theta \sin\phi)] \quad (6-252)$$

Na Figura 6.52 estão representados os diagramas de radiação para 3 valores de s .

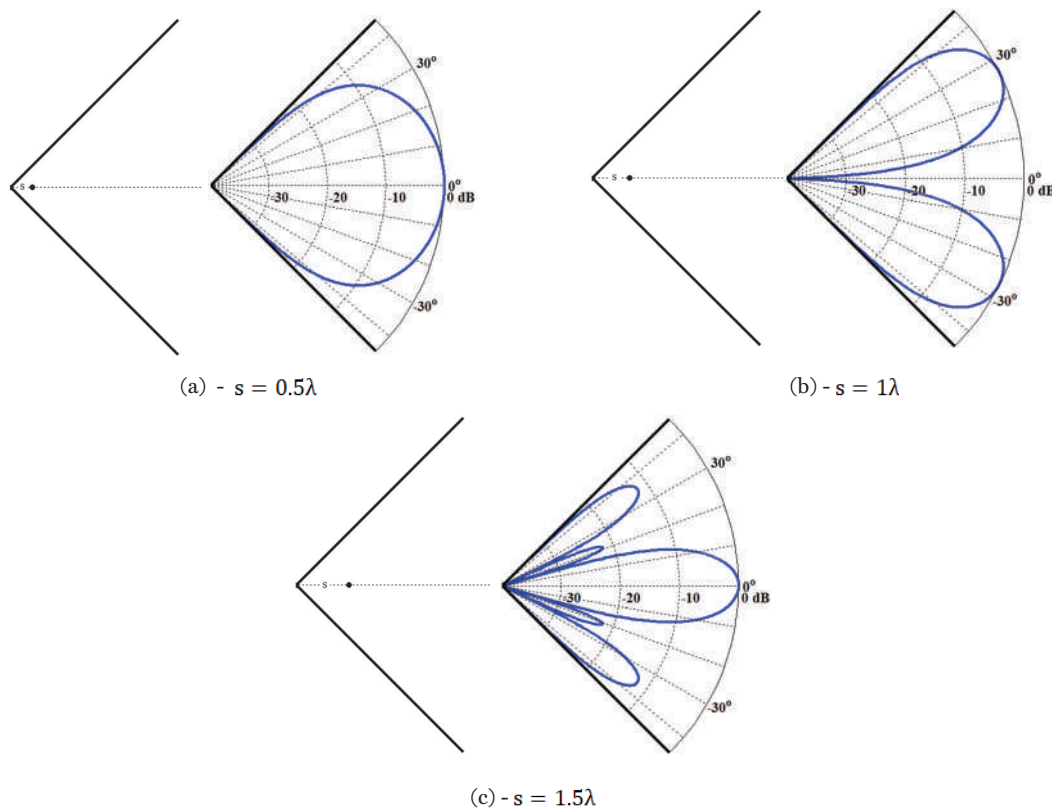


Figura 6.52. Diagramas de radiação para 3 valores de s .

Como se pode ver por esta figura o valor de s deve ser escolhido com cuidado pois poderemos ter um nulo na direção pretendida ou vários lóbulos secundários o que também pode ser um inconveniente. Dada a natureza periódica da função (6-252), quando o valor de s é um múltiplo par de 0.5λ ocorre um nulo na direção frontal, quando o valor de s é um múltiplo ímpar de 0.5λ ocorre um máximo.

6.12.2 Refletor parabólico axialmente simétrico alimentado pela frente

O sistema refletor mais usado é constituído por um paraboloide alimentado por uma fonte colocada no seu foco. Já era bem conhecido da ótica que um feixe de raios paralelos incidentes num refletor com a forma dum paraboloide convergem num ponto que é o foco do paraboloide. Reciprocamente se uma fonte colocada no foco emitir uma onda esférica, os raios emanados depois da reflexão no paraboloide, dão origem a um feixe de raios paralelos, ou seja, a um feixe de raios colimados que representam uma onda plana. Esta configuração em que o

alimentador está colocado no foco e que é ilustrada na Figura 6.49(e), designa-se por paraboloide alimentado pela frente. Uma desvantagem desta configuração é a necessidade de utilizar uma estrutura para suportar o alimentador a qual conjuntamente com o alimentador dá origem a uma obstrução da onda refletida pelo paraboloide. Outra desvantagem resulta de se ter que usar uma linha de transmissão com um comprimento suficiente para ligar o alimentador propriamente dito ao equipamento de recepção ou transmissão colocado geralmente atrás ou por baixo do refletor. O comprimento desta linha pode ser tal que dê origem a perdas significativas para certas aplicações, por exemplo na recepção de sinais muito fracos. Para evitar a última desvantagem usam-se sistemas com dois refletores um secundário e um principal que permitem colocar o alimentador no vértice do refletor principal e os equipamentos associados por trás ou por baixo. Mantém-se, no entanto, o problema da obstrução da onda refletida pelo paraboloide, desta vez causada pelo refletor secundário. Abordaremos estes sistemas mais à frente.

No caso particular do uso de refletores parabólicos para a recepção de televisão difundida por satélite, devido à sua massificação, conseguiu-se um elevado grau de miniaturização que permite hoje em dia construir blocos de baixo ruído (*Low Noise Blocks* LNB's) de pequenas dimensões, incorporando o alimentador, reduzindo o problema da obstrução. Para além disso este LNB's têm uma saída de radiofrequência com uma frequência relativamente baixa pelo que as perdas na linha de transmissão que liga o LNB ao equipamento de recepção são pouco relevantes.

Os refletores parabólicos quando alimentados eficientemente produzem um feixe estreito de alto ganho com lóbulos secundários de baixo nível e com boas características de discriminação da polarização cruzada. Quando possuem grandes dimensões é necessário construir uma sólida estrutura de suporte para assegurar que o refletor aguente com segurança condições climáticas extremas, mantendo as suas características. São normalmente considerados um bom compromisso entre ganho, eficiência e custo. Os alimentadores mais comuns são as cornetas cónicas e para aplicações mais exigentes as que têm as paredes corrugadas.

6.12.2.1 Geometria da superfície

A superfície dum paraboloide obtém-se rodando uma parábola em torno do seu eixo. Consideremos a Figura 6.53. Tendo em conta uma propriedade bem conhecida duma parábola, para um ponto genérico P, verifica-se a relação (6-253).

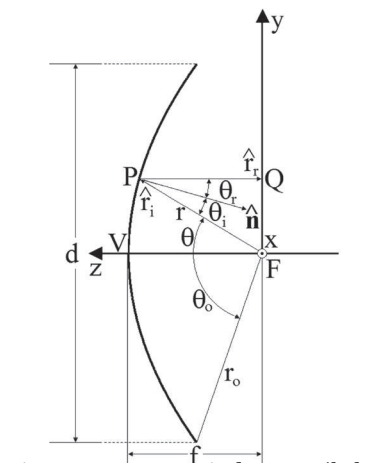


Figura 6.53. Geometria duma parábola.

$$\overline{FP} + \overline{PQ} = \text{const} = 2f \quad (6-253)$$

Esta propriedade significa que o comprimento de todos os raios desde o foco até a um plano perpendicular ao eixo z, por exemplo o plano xy, são iguais. Isto justifica a afirmação de que os raios emanados do foco depois da reflexão no paraboloide, dão origem a uma onda plana. Também significa que a abertura do paraboloide é uma superfície equifase. Este é na essência o princípio de funcionamento do refletor parabólico.

Da Figura 6.53 obtém-se as relações (6-254):

$$\overline{FP} = r \quad \text{e} \quad \overline{PQ} = r \cos \theta \quad (6-254)$$

Substituindo em (6-253), pode-se escrever (6-255):

$$r = \frac{2f}{1 + \cos \theta} = f \sec^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad \theta \leq \theta_0 \quad (6-255)$$

A equação (6-255) é a equação do paraboloide em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Devido à simetria rotacional desta superfície, não há variação em relação a ϕ . A equação (6-255) também pode ser escrita em coordenadas retangulares (x, y, z) , ou seja, (6-256):

$$r + r \cos \theta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z = 2f$$

$$x^2 + y^2 = 4f(f - z) \quad \text{com} \quad x^2 + y^2 \leq \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad (6-256)$$

É muito comum definir um refletor parabólico pela razão f/d . Da Figura 6.53 pode-se determinar a expressão de f/d em função do ângulo de abertura θ_0 .

Com efeito tem-se: $r_0 = \frac{d}{2 \sin \theta_0} = \frac{2f}{1 + \cos \theta_0}$, donde $4f \sin \theta_0 = d(1 + \cos \theta_0)$, mas $1 + \cos \theta_0 = 2 \cos^2 (\theta_0/2)$ e $\sin \theta_0 = 2 \sin (\theta_0/2) \cos (\theta_0/2)$, usando estas relações obtém-se (6-257):

$$\frac{f}{d} = \frac{1}{4} \frac{2 \cos^2 (\theta_0/2)}{2 \sin (\theta_0/2) \cos (\theta_0/2)} = \frac{1}{4} \cot \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (6-257)$$

Para $\theta_0 = 30^\circ$, $f/d = 0.93$ e para $\theta_0 = 90^\circ$, $f/d = 0.25$. Normalmente os valores de f/d estão compreendidos entre 0.3 e 0.4 que correspondem a valores de θ_0 entre 64° e 79° .

Desta expressão pode-se obter facilmente (6-258) que permite calcular θ_0 a partir de f/d .

$$\theta_0 = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2} \frac{f}{d}}{\left(\frac{f}{d} \right)^2 - \frac{1}{16}} \right] \quad (6-258)$$

É evidente da Figura 6.53 que a distância do foco à superfície do paraboloide, isto é r , aumenta desde o vértice ($\theta = 0$) até à borda ($\theta = \theta_0$). Isto significa que mesmo que o alimentador seja isotrópico, a iluminação no paraboloide é atenuada do centro para a periferia. Esta é uma atenuação própria do paraboloide. Como a iluminação em qualquer ponto do paraboloide é inversamente proporcional à distância r , então relativamente à iluminação no centro do paraboloide, a iluminação em qualquer ponto do paraboloide é dada por (6-259):

$$\frac{f}{r} = \frac{1}{\sec^2 (\theta/2)} = \cos^2 (\theta/2) \quad (6-259)$$

Este fator é normalmente designado por fator de divergência. Da equação anterior facilmente se conclui que iluminação na periferia dum paraboloide, relativamente à iluminação no seu centro, varia de -0.5 a -6dB quando o f/d varia de 1 a 0.25, ou seja, quando θ_0 varia de 28° a 90° .

6.12.2.2 Diagrama de radiação

Como se disse atrás o princípio de funcionamento do refletor parabólico caracteriza-se pelo facto dos raios emanados do foco e refletidos depois pelo paraboloide, darem origem a uma onda plana que atravessa a abertura do paraboloide tornando-a uma superfície equifase. Este princípio de funcionamento está ilustrado na Figura 6.54(a).

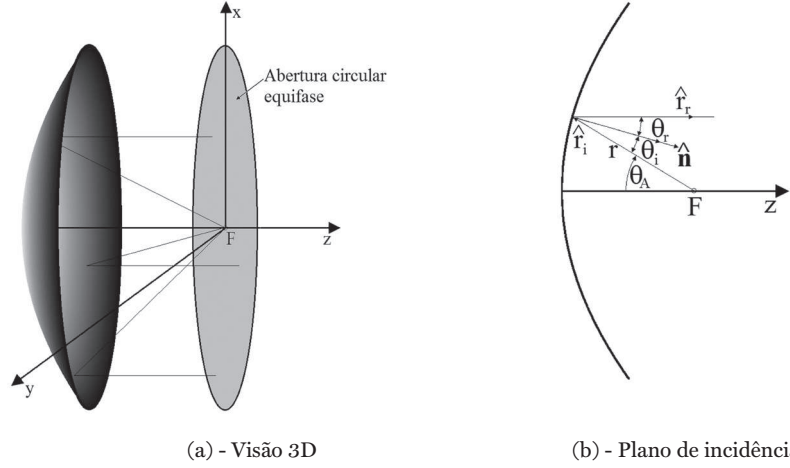


Figura 6.54. Princípio de funcionamento dum refletor parabólico alimentado pela frente.

Relembremos a definição de plano de incidência. Define-se plano de incidência como o plano formado pela normal $\hat{\mathbf{n}}$ ao refletor, no ponto de reflexão, e pela direção de propagação $\hat{\mathbf{r}}_i$. Devido à simetria rotacional desta superfície, qualquer plano Φ é um plano de incidência como se ilustra na Figura 6.54(b). Desta figura vê-se que $\theta_A = \theta_i + \theta_r$ mas como pelas leis da reflexão $\theta_i = \theta_r$ então $\theta_i = \theta_r = \theta_A/2$.

Devido às leis da reflexão os vetores unitários $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{r}}_i$ e $\hat{\mathbf{r}}_r$ estão relacionados entre si pela expressão (6-260) que se obtém da Figura 6.55.

$$\hat{\mathbf{r}}_r = \hat{\mathbf{r}}_i - 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i)\hat{\mathbf{n}} \quad (6-260)$$

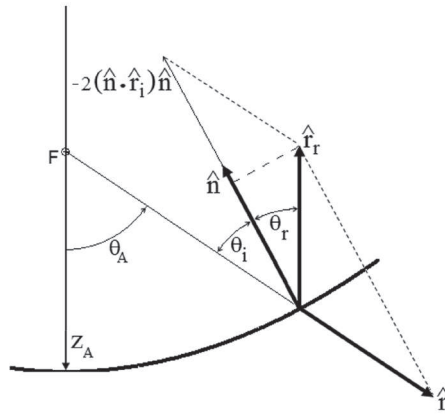


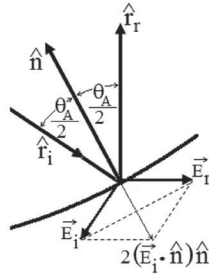
Figura 6.55. Relação entre os vetores unitários $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{r}}_i$ e $\hat{\mathbf{r}}_r$.

O alimentador colocado no foco emite uma onda esférica sendo, portanto, o vetor campo elétrico incidente $\vec{\mathbf{E}}_i$ perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}_i$. Do mesmo modo o vetor campo elétrico refletido, $\vec{\mathbf{E}}_r$, é perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}_r$.

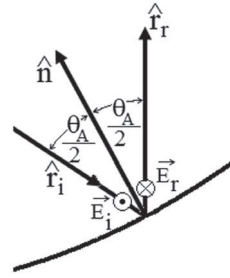
No que diz respeito à orientação do campo elétrico incidente, relativamente ao plano de incidência, há duas situações particulares que importa realçar. Quando o vetor $\vec{\mathbf{E}}_i$ é perpendicular ao plano de incidência diz-se que a

incidência se faz com polarização perpendicular; quando o vetor $\vec{E}_i$ é paralelo ao plano de incidência diz-se que a incidência se faz com polarização paralela.

Suponhamos que a incidência se faz com polarização paralela, tal como se ilustra na Figura 6.56(a). Como o refletor é um condutor perfeito, no ponto de reflexão o campo total $\vec{E}_t = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ tem que ter uma componente tangencial nula o que implica que as componentes tangenciais de $\vec{E}_i$ e $\vec{E}_r$ se têm que anular uma à outra. Da Figura 6.56(a) conclui-se então que os vetores $\vec{E}_i$ e $\vec{E}_r$ estão relacionados entre si pela expressão (6-261).



(a) - Incidência com polarização paralela



(b) - Incidência com polarização perpendicular

Figura 6.56. Relação entre os vetores $\vec{E}_i$ e $\vec{E}_r$.

$$\vec{E}_r = -\vec{E}_i + 2(\vec{E}_i \cdot \hat{n})\hat{n} \quad (6-261)$$

Se a incidência se fizer com polarização perpendicular, tal como se ilustra na Figura 6.56(b), a condição do campo total $\vec{E}_t = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ ter que ter uma componente tangencial nula implica $\vec{E}_r = -\vec{E}_i$. Como neste caso $\vec{E}_i \cdot \hat{n} = 0$, podemos afirmar que os vectores $\vec{E}_i$ e $\vec{E}_r$ continuam relacionados entre si pela expressão (6-261).

Se o campo eléctrico incidente tiver, relativamente ao plano de incidência, uma orientação mais geral, isto é, nem paralela nem perpendicular é sempre possível decompô-lo segundo uma componente perpendicular e outra paralela ao plano de incidência pelo que a expressão (6-261) continua a aplicar-se.

O campo radiado pelo paraboloide é o radiado pela sua abertura que já vimos ser uma superfície equifase. Para calcular o campo radiado por esta abertura precisamos de determinar a distribuição de campo nessa abertura.

Consideremos que o alimentador colocado no foco é uma estrutura de revolução como por exemplo um guia de onda circular ou uma corneta cónica no modo TE_{11} , como a que foi estudada na secção 6.11.4. Este tipo de antenas é importante porque podemos prever o diagrama de radiação em qualquer plano a partir do conhecimento dos diagramas nos planos E e H, respetivamente D_E e D_H , através das relações (6-262):

$$\vec{E}_i(\theta_A, \phi_A) = \frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jk r(\theta_A)} [D_E(\theta_A) \cos(\phi_A) \hat{\theta}_A - D_H(\theta_A) \sin(\phi_A) \hat{\phi}_A]$$

Quando a polarização é segundo x

e,

(6-262)

$$\vec{E}_i(\theta_A, \phi_A) = \frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jk r(\theta_A)} [D_E(\theta_A) \sin(\phi_A) \hat{\theta}_A + D_H(\theta_A) \cos(\phi_A) \hat{\phi}_A]$$

Quando a polarização é segundo y

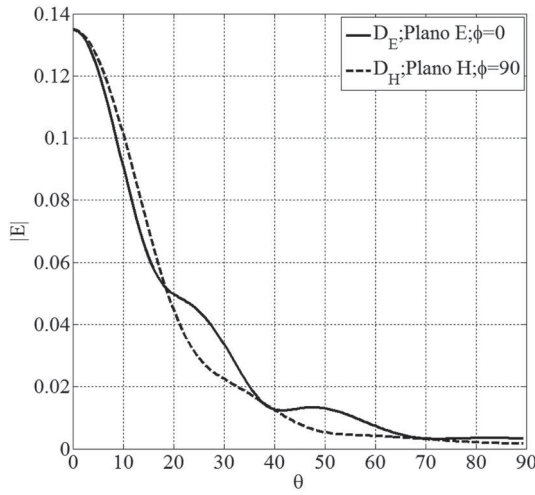
Ou ainda numa forma concentrada pela relação (6-263).

$$\vec{E}_i(\theta_A, \phi_A) = \frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jk r(\theta_A)} [D_E(\theta_A) \cos(\phi_A - \Phi) \hat{\theta}_A - D_H(\theta_A) \sin(\phi_A - \Phi) \hat{\phi}_A]$$

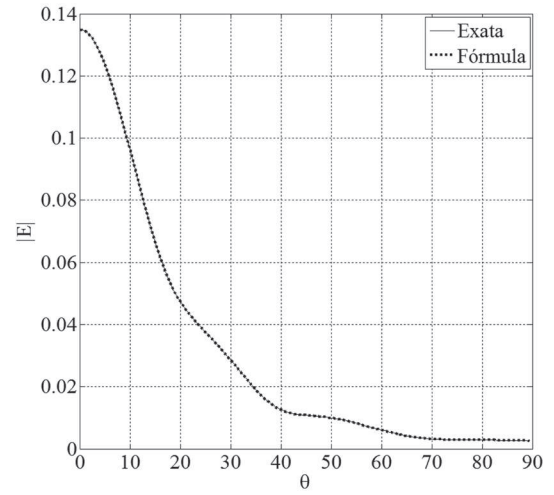
com $\Phi = 0$ quando a polarização é segundo x (6-263)

e $\Phi = \pi/2$ quando a polarização é segundo y

Para mais detalhes sobre este assunto consultar a referência [11]. Como exemplo, na Figura 6.57(b) está representado o diagrama de radiação no plano $\Phi = 45^\circ$ da corneta cônica que foi estudada na secção 6.11.4, obtido por duas formas. Uma diretamente pela expressão (6-234) deduzida nessa secção e outra obtida através da relação (6-262) para a polarização segundo x. Como se pode ver a concordância é perfeita. Na Figura 6.57(a) estão representados os diagramas de radiação D_E e D_H , usados para calcular o diagrama no plano $\Phi = 45^\circ$ através da relação (6-262).



(a) - Diagramas DE e DH



(b) - Plano $\Phi = 45^\circ$. Exata, (6-234); Fórmula, (6-262)

Figura 6.57. Diagramas de radiação da corneta cônica que foi estudada na secção 6.11.4.

Consideremos que o alimentador tem polarização segundo x. Então o campo por ele emitido é dado por $\vec{E}_i(\theta_A, \phi_A) = \frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jk r(\theta_A)} [D_E(\theta_A) \cos(\phi_A) \hat{\theta}_A - D_H(\theta_A) \sin(\phi_A) \hat{\phi}_A]$.

O campo refletido que vai depois chegar à abertura é obtido recorrendo a (6-261), ou seja é dado por (6-264):

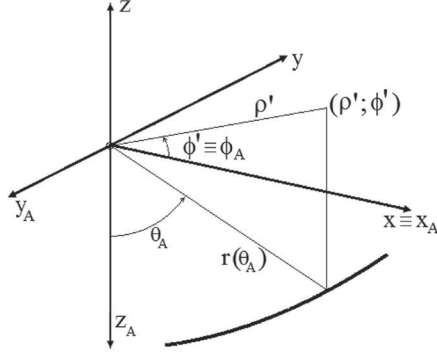
$$\begin{aligned} \vec{E}_r(\theta_A, \phi_A) = & -\frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jk r(\theta_A)} [D_E(\theta_A) \cos(\phi_A) \hat{\theta}_A - D_H(\theta_A) \sin(\phi_A) \hat{\phi}_A] \\ & + 2 \left\{ \left[\frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jk r(\theta_A)} [D_E(\theta_A) \cos(\phi_A) \hat{\theta}_A - D_H(\theta_A) \sin(\phi_A) \hat{\phi}_A] \cdot \hat{n} \right] \right\} \hat{n} \end{aligned} \quad (6-264)$$

que após algumas simplificações se pode escrever como (6-265):

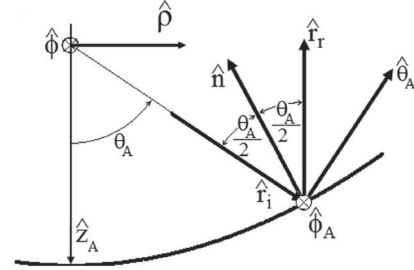
$$\begin{aligned} \vec{E}_r(\theta_A, \phi_A) = & \frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jk r(\theta_A)} D_E(\theta_A) \cos(\phi_A) [-\hat{\theta}_A + 2(\hat{\theta}_A \cdot \hat{n}) \hat{n}] \\ & + \frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jk r(\theta_A)} D_H(\theta_A) \sin(\phi_A) [\hat{\phi}_A - 2(\hat{\phi}_A \cdot \hat{n}) \hat{n}] \end{aligned} \quad (6-265)$$

Para melhor se estabelecer as relações entre as diversas grandezas vamos utilizar, no que se refere ao alimentador, as coordenadas e vetores designados com o índice A, como por exemplo $r(\theta_A)$, θ_A , ϕ_A , etc. Para um ponto genérico da abertura que está situada no plano x,y usaremos as coordenadas (ρ', ϕ') .

Os sistemas de eixos associados a estas definições estão ilustrados na Figura 6.58(a).



(a) Sistemas de eixos.



(b) Relação entre os diversos vetores unitários.

Figura 6.58.

Na Figura 6.58(b) estão representados os vetores unitários $\hat{\theta}_A$, $\hat{\phi}_A$, $\hat{n}$ e $\hat{\rho}$.

Da figura obtém-se as seguintes relações: $(\hat{\theta}_A \cdot \hat{n}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_A}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)$; $\hat{\theta}_A = \cos(\theta_A)\hat{\rho} - \sin(\theta_A)\hat{z}_A$ e $\hat{n} = -\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\hat{\rho} - \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\hat{z}_A$.

Substituindo estas relações nos fatores $-\hat{\theta}_A + 2(\hat{\theta}_A \cdot \hat{n})\hat{n}$ e $\hat{\phi}_A - 2(\hat{\phi}_A \cdot \hat{n})\hat{n}$ da equação (6-265) obtém-se, após algumas simplificações (6-266) e (6-267).

$$-\hat{\theta}_A + 2(\hat{\theta}_A \cdot \hat{n})\hat{n} = -\hat{\rho} \quad (6-266)$$

$$\hat{\phi}_A - 2(\hat{\phi}_A \cdot \hat{n})\hat{n} = \hat{\phi}_A = \hat{\phi} \quad (6-267)$$

Substituindo (6-266) e (6-267) em (6-265) obtém-se (6-268):

$$\vec{E}_r(\theta_A, \phi_A) = -\frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jkr(\theta_A)} D_E(\theta_A) \cos(\phi_A) \hat{\rho} + \frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jkr(\theta_A)} D_H(\theta_A) \sin(\phi_A) \hat{\phi} \quad (6-268)$$

Este campo refletido na superfície do refletor vai depois chegar à abertura com um atraso de fase adicional, devido à distância $r(\theta_A)\cos(\theta_A)$, passando, portanto, a ser definido pela expressão (6-269):

$$\vec{E}_a(\rho', \phi') = -\frac{1}{r(\theta_A)} e^{-jkr(\theta_A)} e^{-jkr(\theta_A)\cos(\theta_A)} [D_E(\theta_A)\cos(\phi')\hat{\rho} - D_H(\theta_A)\sin(\phi')\hat{\phi}] \quad (6-269)$$

para $\rho' \leq d/2$

Tendo em conta (6-255), (6-269) pode ser escrita como (6-270):

$$\vec{E}_a(\rho', \phi') = -\frac{1}{r(\theta_A)} e^{-j2kf} [D_E(\theta_A)\cos(\phi')\hat{\rho} - D_H(\theta_A)\sin(\phi')\hat{\phi}] \quad (6-270)$$

para $\rho' \leq d/2$

Como $2kf$ é constante confirma-se assim que a distribuição na abertura é equifase.

Tendo em conta (6-259), (6-270) pode ser escrita como (6-271):

$$\vec{E}_a(\rho', \phi') = -\frac{\cos^2(\theta_A/2)}{f} e^{-j2kf} [D_E(\theta_A)\cos(\phi')\hat{\rho} - D_H(\theta_A)\sin(\phi')\hat{\phi}] \quad (6-271)$$

para $\rho' \leq d/2$

Recorrendo à forma concentrada (6-263), pode-se ainda usar a expressão (6-272):

$$\vec{E}_a(\rho', \phi') = -\frac{\cos^2(\theta_A/2)}{f} e^{-j2kf} [D_E(\theta_A)\cos(\phi' - \Phi)\hat{\rho} - D_H(\theta_A)\sin(\phi' - \Phi)\hat{\phi}] \quad (6-272)$$

para $\rho' \leq d/2$

com $\Phi = 0$ quando a polarização é segundo x, e $\Phi = \pi/2$ quando a polarização é segundo y.

Para determinar os campos radiados pelo refletor parabólico, cuja abertura se situa em espaço livre, vamos usar o método descrito na secção 6.10, tendo em conta que a distribuição de campo na abertura é dada por (6-272). Fazendo um desenvolvimento analítico semelhante ao que foi feito para a corneta cónica na secção 6.11.4, obtém-se para o campo radiado a grande distância as expressões (6-273).

$$E_r \cong 0$$

$$E_\theta \cong -C (1 + \cos\theta) [(I_1 + I_2)\sin\phi - (I_3 + I_4)\cos\phi]$$

$$E_\phi \cong C (1 + \cos\theta) [(I_1 + I_2)\cos\phi + (I_3 + I_4)\sin\phi]$$

$$\text{Com } C = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (6-273)$$

$$H_r \cong 0$$

$$H_\theta \cong -\frac{E_\phi}{\eta}$$

$$H_\phi \cong \frac{E_\theta}{\eta}$$

em que I_1 é dado por (6-274):

$$I_1 = \int_0^a \int_0^{2\pi} E_{ap}(\rho', \phi') \sin\phi' e^{jk\rho' \sin\theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-274)$$

I_2 é dado por (6-275):

$$I_2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} E_{ap}(\rho', \phi') \cos\phi' e^{jk\rho' \sin\theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-275)$$

I_3 é dado por (6-276):

$$I_3 = \int_0^a \int_0^{2\pi} -E_{ap}(\rho', \phi') \cos\phi' e^{jk\rho' \sin\theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-276)$$

e $\mathbf{I}_4$ é dado por (6-277):

$$\mathbf{I}_4 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_{a\phi}(\rho', \phi') \sin \phi' e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-277)$$

sendo $a = d/2$.

A partir das componentes $\mathbf{E}_\theta$ e $\mathbf{E}_\phi$ pode-se obter a componente copolar pela expressão (6-278):

$$\mathbf{E}_{cp} = \mathbf{E}_\theta \cos(\phi - \Phi) - \mathbf{E}_\phi \sin(\phi - \Phi) \quad (6-278)$$

e a componente contrapolar pela expressão (6-279):

$$\mathbf{E}_{cx} = \mathbf{E}_\theta \sin(\phi + \Phi) + \mathbf{E}_\phi \cos(\phi + \Phi) \quad (6-279)$$

com $\Phi = 0$ quando a polarização é segundo x, e $\Phi = \pi/2$ quando a polarização é segundo y.

O autor desenvolveu um programa em Matlab baseado neste procedimento que permite calcular os diagramas de radiação dum refletor parabólico alimentado pela frente. Como exemplo, na Figura 6.59 estão representados os diagramas de radiação nos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 45^\circ$ à frequência de 11.75GHz, dum refletor com as seguintes dimensões, diâmetro $d=0.5\text{m}$ e $f/d=0.77$. Escolheu-se uma iluminação na periferia do refletor de -10dB, isto é um *taper* de 10dB. Parte deste *taper* é causado pelo fator de divergência dado por (6-259), sendo o resto produzido por um alimentador teórico com um diagrama $D(\theta_A) = \cos^{4.97}(\theta_A)$. O diagrama de radiação deste alimentador está representado na Figura 6.59(a).

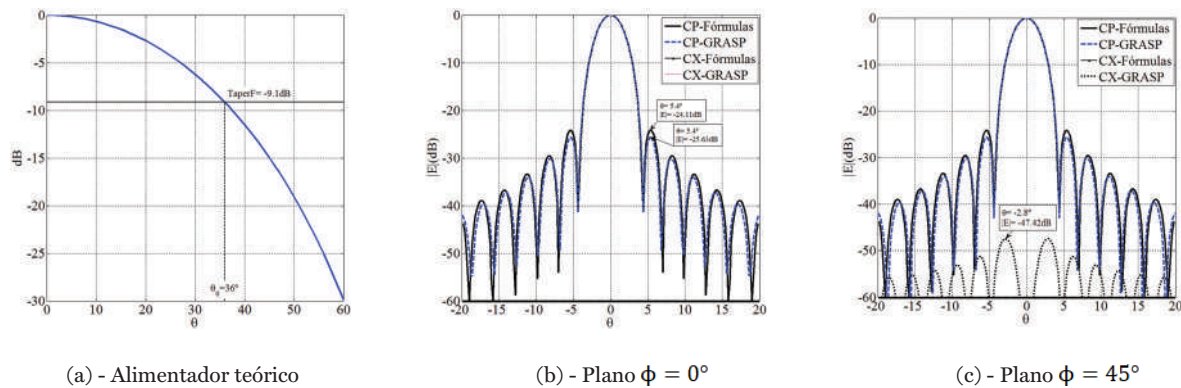


Figura 6.59. Diagramas de radiação, a 11.75GHz, dum refletor com $d=0.5\text{m}$ e $f/d=0.77$.

A empresa TICRA desenvolveu um *software* para a análise de antenas refletoras que é considerado uma referência. O autor aconselha os leitores a descarregarem a versão de estudante, que é gratuita para poderem fazerem a análise de exemplos que queiram estudar. Esta versão designada GRASP-SE pode ser obtida na página da empresa TICRA¹.

Tendo em conta este *software* de referência, na Figura 6.59 estão também representados os diagramas previstos pelo *software* GRASP9-SE, Ver.9.3.01.

Como se pode ver pela figura a concordância dos diagramas da componente copolar é bastante boa. No entanto, no que diz respeito à componente contrapolar, ela não é prevista pelas fórmulas porque o diagrama do

¹ www.ticra.com

alimentador teórico é perfeitamente de revolução, isto é, $D_E(\theta_A) = D_H(\theta_A)$ e essa simetria cancela a componente contrapolar em qualquer plano. Esta afirmação é confirmada pela relação (6-280) sugerida por Kildal [11].

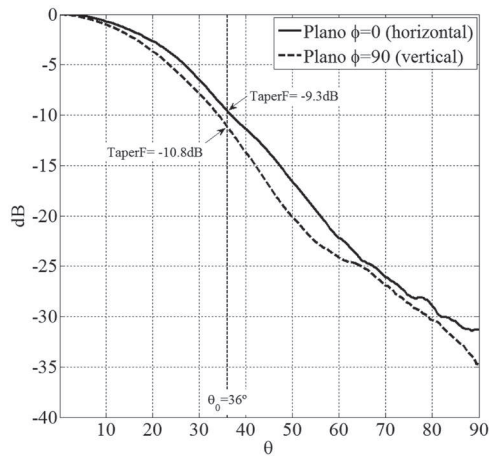
$$D_{\phi_{CX}} = D_{45_{CX}} \sin 2\phi$$

em que,

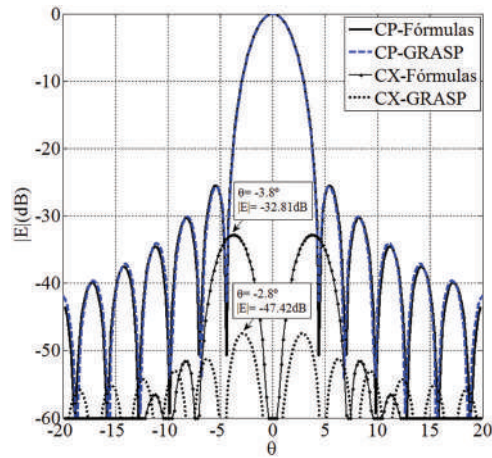
$$D_{45_{CX}} = \frac{1}{2} (D_E - D_H)$$

(6-280)

Para se observar a componente contrapolar, o mesmo refletor foi simulado usando o alimentador representado na Figura 6.43 que foi medido à frequência de 11.75GHz e cujos diagramas estão representados na Figura 6.60(a). Na Figura 6.60(b) estão representados os diagramas de radiação no plano $\phi = 45^\circ$.



(a) - Do alimentador da Figura 6.43



(b) - Do refletor no plano $\phi = 45^\circ$

Figura 6.60. Diagramas de radiação a 11.75GHz.

Na mesma figura estão representados os diagramas previstos pelo *software* GRASP9-SE, Ver.9.3.01. Como se pode ver pela figura a concordância dos diagramas da componente copolar é bastante boa. No entanto, no que diz respeito à componente contrapolar a concordância é pior, pois o diagrama previsto pela fórmula (6-279) apresenta níveis mais elevados dessa componente do que os previstos pelo GRASP. É de notar, no entanto que mesmos os valores previstos pela fórmula (6-279) são bastante baixos, da ordem dos -33dB, que são aceitáveis atendendo a que o alimentador usado é de produção em massa, não sendo especialmente cuidado.

É importante chamar a atenção para mais alguns aspetos da polarização cruzada. Vimos que a distribuição de campo na abertura do refletor é dada por (6-272). Passando para o plano x-y, temos as componentes dadas por (6-281):

$$E_{ax}(x,y) = E_{a\rho} \cos \phi' - E_{a\phi} \sin \phi' \quad (6-281)$$

$$E_{ay}(x,y) = E_{a\rho} \sin \phi' + E_{a\phi} \cos \phi'$$

onde,

$$E_{a\rho} = -\frac{1}{r} D_E(\theta_A) \cos(\phi' - \Phi)$$

$$E_{a\phi} = \frac{1}{r} D_H(\theta_A) \sin(\phi' - \Phi)$$

com $\Phi = 0$ quando a polarização é segundo x, e $\Phi = \pi/2$ quando a polarização é segundo y.

Na Figura 6.61 está representando a distribuição dada por (6-281) para uma polarização segundo x.

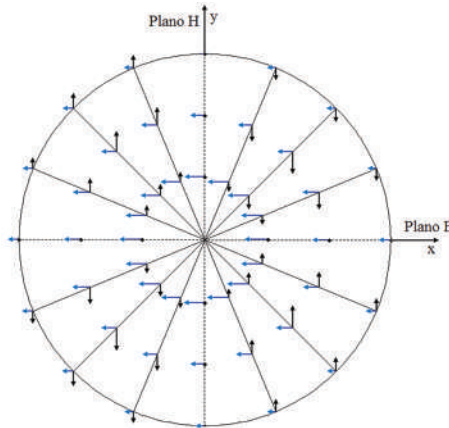


Figura 6.61. Distribuição típica do campo na abertura dum paraboloide.
Componente principal segundo x e componente cruzada segundo y.

Como se pode ver pela figura a distribuição do campo na abertura dum paraboloide contém componentes segundo x e segundo y. Se a polarização do alimentador é segundo x, a componente nessa direção designa-se por componente principal ou copolar e a componente segundo y designa-se por componente cruzada ou contrapolar. Desta figura é evidente que as componentes cruzadas simétricas, em relação aos planos principais, estão em oposição de fase entre si. Como consequência, nos planos principais, plano E e plano H, não há componente contrapolar. No entanto esta simetria não se verifica nos outros planos sendo até claro que a máxima assimetria ocorre para o plano $\phi = 45^\circ$.

Esta conclusão também se obtém da relação (6-280). De facto, para $\phi = 0^\circ$ ou para $\phi = 90^\circ$, isto é, nos planos principais $D_{\phi cx}$ é nula independentemente do valor de D_{45cx} . Por outro lado, nos planos $\phi = \pm 45^\circ$, o factor $\sin 2\phi$ assume o valor máximo, pelo que se confirma o que a Figura 6.61 já sugeria de que a componente contrapolar é máxima, nos planos $\phi = \pm 45^\circ$. Podemos então afirmar que o diagrama 3D da componente contrapolar é constituído por quatro lóbulos cujos máximos se situam nos planos $\phi = \pm 45^\circ$. Qualquer um destes lóbulos está em oposição de fase com os que lhe estão simétricos em relação aos planos principais. A localização angular destes lóbulos ocorre para valores próximos da direção do primeiro nulo do lobo principal e é próxima da LFMP. No caso do diagrama da Figura 6.60(b) este lóbulo ocorre para $\theta \cong 3.8^\circ$, o primeiro nulo do lobo principal ocorre para $\theta \cong 4.4^\circ$ e a LFMP $\cong 3.6^\circ$.

Na Figura 6.62 estão representados os diagramas 3D das componentes copolar e contrapolar do refletor anterior. Na Figura 6.62(b) são bem visíveis os quatro lóbulos cujos máximos se situam nos planos $\phi = \pm 45^\circ$.

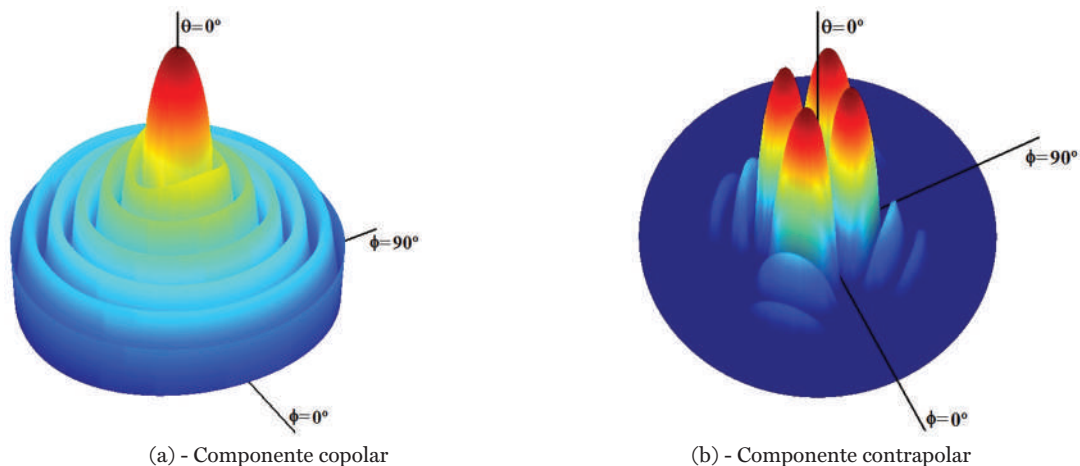
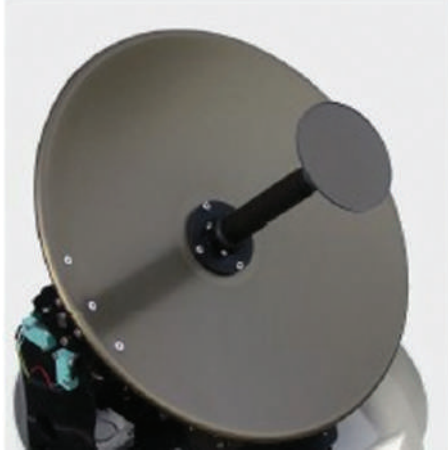
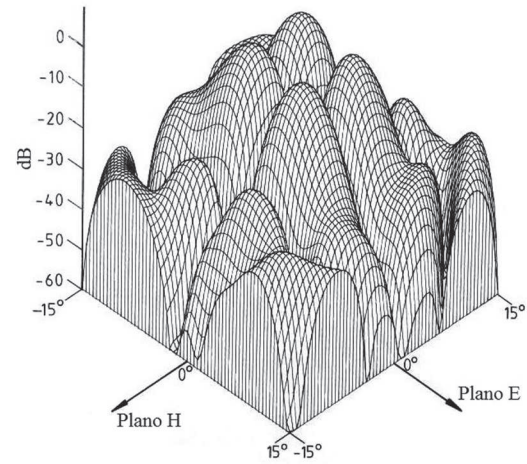


Figura 6.62. Diagramas 3D do refletor anterior.

Na Figura 6.63(b) está representado o diagrama 3D da componente contrapolar dum paraboloide medido à frequência de 10GHz. O paraboloide é de alumínio com 45cm de diâmetro e um alimentador *splash-plate feed*, do tipo ilustrado na Figura 6.63(a) que é semelhante ao descrito na secção 10.5 de [3]. Também neste caso são bem visíveis os quatro lóbulos cujos máximos se situam nos planos $\phi = \pm 45^\circ$. Devido ao tipo de alimentador, o nível da componente contrapolar é elevado sendo apenas de 15dB abaixo do máximo da componente copolar.



(a) Paraboloide com um alimentador *splash-plate feed*



(b) Componente contrapolar

Figura 6.63. Diagrama 3D da componente contrapolar dum paraboloide. Fonte: Pereira [12]

6.12.2.3 Diretividade e ganho

Como o paraboloide é uma antena de abertura a sua diretividade pode ser dada por (6-282):

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ef} = \frac{4\pi}{\lambda^2} e_{ab} A_{física}$$

Ou seja:

(6-282)

$$D = e_{ab} \frac{4\pi \pi d^2}{\lambda^2 4} = e_{ab} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \right)^2$$

onde e_{ab} é a eficiência da abertura. Tendo em conta a secção 6.4.2, a eficiência da abertura pode ser obtida determinando D a partir da equação (6-283):

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \iint_S E_a(\rho', \phi') ds' \right|^2}{\iint_S E_a^2(\rho', \phi') ds'} \quad (6-283)$$

Em que $E_a(\rho', \phi')$ é a distribuição da amplitude do campo na abertura do paraboloide em função das coordenadas sobre a abertura ρ' e ϕ' . Na Figura 6.64 estão ilustradas as relações entre as diversas coordenadas envolvidas.

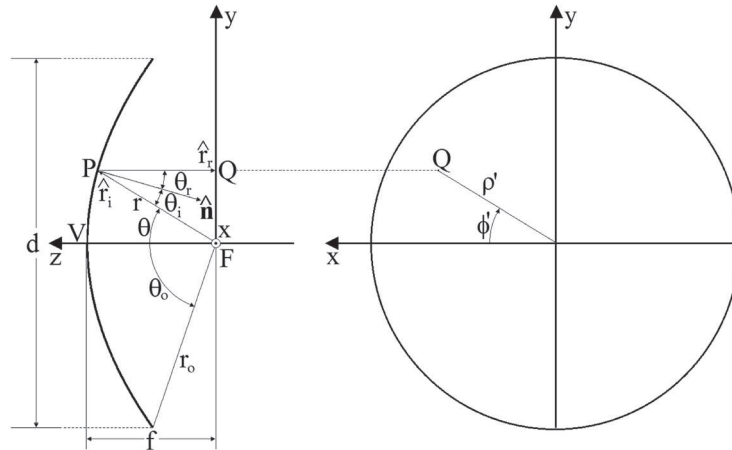


Figura 6.64. Relações entre as diversas coordenadas envolvidas na geometria dum paraboloide.

Desenvolvendo o integral $\iint_S E_a(\rho', \phi') ds'$ obtém-se (6-284):

$$\iint_S E_a(\rho', \phi') ds' = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} E_a(\rho', \phi') \rho' d\rho' d\phi' \quad (6-284)$$

Da Figura 6.64 vê-se que $\rho' = r \sin\theta$, pelo que atendendo à relação (6-255) se pode exprimir ρ' como em (6-285):

$$\rho' = 2f \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (6-285)$$

Desta relação vê-se que ρ' depende de θ pelo que se pode fazer a mudança de variável de ρ' para θ . Quando $\rho' = 0$, $\theta = 0$ e quando $\rho' = d/2$, $\theta = \theta_0$. Desta relação também se deduz que $d\rho' = r d\theta$.

Substituindo em (6-284) obtém-se (6-286):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} E_a(\rho', \phi') \rho' d\rho' d\phi' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} E_a(\theta, \phi') 2f \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) r d\theta d\phi' \quad (6-286)$$

Considerando que a distribuição $E_a(\theta, \phi')$ é de revolução então ela será independente de ϕ' e portanto (6-286) pode ser escrita como (6-287):

$$2\pi \int_0^{\theta_0} E_a(\theta) 2f \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) r d\theta \quad (6-287)$$

A distribuição $E_a(\theta)$ pode ser expressa em função do campo radiado pelo alimentador que designamos por $E_A(\theta)$. A onda radiada do alimentador até à superfície refletora é esférica pelo que a amplitude do campo radiado varia com $\frac{1}{r}$. Da superfície refletora até à abertura a onda é plana não havendo, portanto, variação da sua amplitude, tal como se ilustra na Figura 6.65.

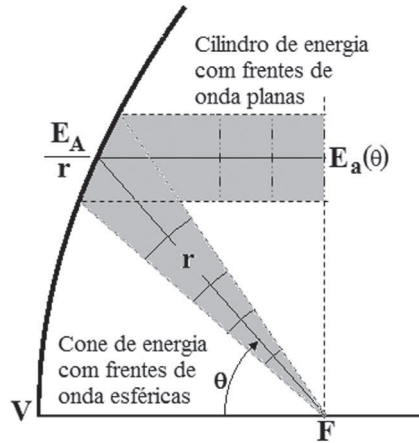


Figura 6.65. Propagação da energia emitida pelo alimentador dum paraboloide.

Tendo em conta as considerações anteriores, (6-287) pode ser expressa em função de $E_A(\theta)$ como (6-288):

$$4\pi f \int_0^{\theta_0} E_A(\theta) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (6-288)$$

É normal exprimir o diagrama de radiação do alimentador em termos de ganho em vez de campo elétrico. Por definição de ganho temos $G_A(\theta) = 4\pi \frac{U_A(\theta)}{P_t}$ ou seja $U_A(\theta) = \frac{P_t}{4\pi} G_A(\theta)$ em que P_t é a potência fornecida ao alimentador.

A densidade de potência produzida pelo alimentador na superfície refletora é dada por $S_A(\theta, r) = \frac{1}{2\eta} |E_A(\theta, r)|^2 = \frac{1}{2\eta} \frac{1}{r^2} |E_A(\theta)|^2$.

Atendendo a que a densidade de potência e a intensidade de radiação estão relacionadas por $U_A(\theta) = r^2 S_A(\theta)$, então a amplitude do campo radiado pelo alimentador pode ser dada por $|E_A(\theta)| = \sqrt{2\eta} \sqrt{U_A(\theta)}$.

Em termos de ganho o campo elétrico produzido pelo alimentador é então dado por (6-289):

$$|E_A(\theta)| = \sqrt{\frac{2\eta P_t}{4\pi}} \sqrt{G_A(\theta)} \quad (6-289)$$

Como a distribuição na abertura é equifase, então $E_a(\theta) = |E_A(\theta)|$. Sendo assim o numerador de (6-283) pode ser expresso como (6-290):

$$\left| 4\pi f \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{2\eta P_t}{4\pi}} \sqrt{G_A(\theta)} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \right|^2 \quad (6-290)$$

Vejamos agora o denominador. A potência que atravessa a abertura do paraboloide é dada por $P = \iint_S S_a(\theta, r) ds' = \iint_S \frac{1}{2\eta} |E_a(\rho', \phi')|^2 ds'$. Então, $\iint_S |E_a(\rho', \phi')|^2 ds' = 2\eta P$.

Considerando que toda a potência fornecida ao alimentador sai pela abertura após a reflexão no paraboloide, $P = P_t$ e o denominador de (6-283) pode ser expresso como (6-291):

$$\iint_S |E_a(\rho', \phi')|^2 ds' = 2\eta P_t \quad (6-291)$$

Substituindo (6-290) e (6-291) em (6-283), obtém-se (6-292):

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{16\pi^2 f^2 \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{2\eta P_t}{4\pi}} \sqrt{G_A(\theta)} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \right|^2}{2\eta P_t} = \frac{16\pi^2 f^2}{\lambda^2} \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_A(\theta)} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \right|^2 \quad (6-292)$$

Usando (6-257) nesta relação, obtém-se (6-293):

$$D = \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 \cotg^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_A(\theta)} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \right|^2 \quad (6-293)$$

Substituindo (6-293) em (6-282), obtém-se a expressão (6-294) para a eficiência da abertura dum paraboloide com um alimentador cujo ganho é dado por $G_A(\theta)$.

$$e_{ab} = \cotg^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_A(\theta)} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \right|^2 \quad (6-294)$$

Esta expressão mostra que a eficiência da abertura é uma função do ângulo θ_0 e do diagrama de radiação $G_A(\theta)$ do alimentador. Portanto, para um dado alimentador todos os paraboloides com o mesmo f/d e por ele alimentados, possuem a mesma eficiência de abertura.

Para estudar a variação da eficiência da abertura em função do diagrama de radiação do alimentador e do ângulo de abertura, Silver [3] usou uma classe de alimentadores cujos diagramas de radiação são definidos por (6-295):

$$G_A(\theta) = \begin{cases} G_0^{(n)} \cos^n \theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (6-295)$$

onde $G_0^{(n)}$ é uma constante para um dado n .

Embora ideais, estes diagramas foram escolhidos porque: 1º permitem obter soluções analíticas e, 2º porque eles podem ser usados para representar com boa aproximação a maior parte do lobo principal do diagrama de radiação de muitos dos alimentadores usados na prática. Admitiu-se que o diagrama de radiação na região traseira, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, é nulo para evitar interferências entre a radiação direta do alimentador e a radiação emitida pelo paraboloide, ou seja, interferência entre o diagrama primário e o diagrama secundário. A constante $G_0^{(n)}$ determina-se pela condição (6-296):

$$\oiint_S G_A(\theta) d\Omega = 4\pi \quad (6-296)$$

Usando (6-295) nesta relação, obtém-se (6-297):

$$G_0^{(n)} \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \operatorname{sen} \theta d\theta = 2 \Rightarrow G_0^{(n)} = 2(n+1) \quad (6-297)$$

As eficiências de abertura em função do ângulo de abertura θ_0 , ou da razão f/d , para vários valores do expoente n , obtidas por (6-294) estão representadas na Figura 6.66.

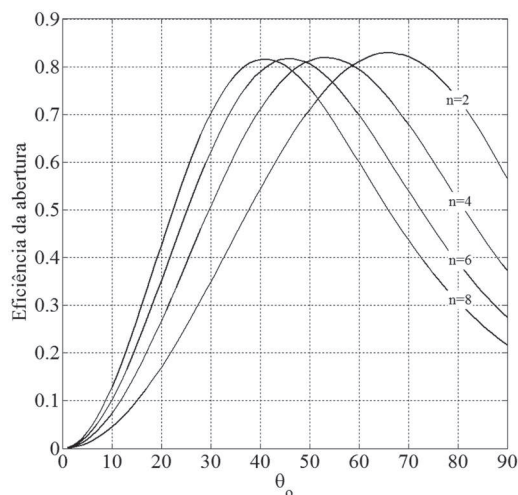


Figura 6.66. Eficiência da abertura em função do ângulo de abertura (ou f/d) para diferentes alimentadores com diagramas de radiação dados por (6-295).

Da Figura 6.66, considerando um dado alimentador, isto é um n constante, podem-se tirar as seguintes conclusões:

1. Há só uma classe de refletores com uma dada da razão f/d , com os quais se obtém a máxima eficiência de abertura;
2. Todas as eficiências máximas são da ordem de 82 a 83%;
3. À medida que o diagrama de radiação do alimentador se torna mais diretivo, isto é, quando n aumenta, a abertura angular do refletor, com o qual se obtém a máxima eficiência, diminui.

A eficiência da abertura depende de vários fatores nomeadamente dos seguintes:

1. Não uniformidade da iluminação da superfície do refletor;
2. Não intercepção, pelo refletor, de toda a energia emitida pelo alimentador (perdas por transbordo);
3. Não uniformidade da fase da distribuição ao longo da abertura do refletor;
4. Não uniformidade da polarização do campo elétrico na abertura do refletor;
5. Obstrução causada pelo alimentador e do seu sistema de suporte;
6. Irregularidade da superfície do refletor.

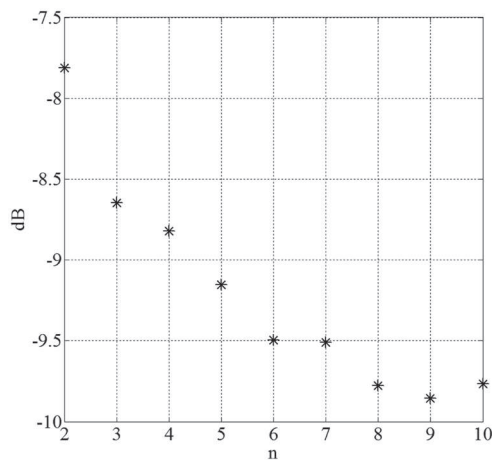
Dum modo geral os dois principais fatores são o 1º e o 2º. Pode-se conseguir que o refletor intercepe a maior parte da energia emitida pelo alimentador, se este tiver um diagrama de radiação estreito, à custa, contudo de uma pior uniformidade da iluminação da superfície refletora. Deste modo é necessário obter uma solução de compromisso entre estes dois fatores.

A não uniformidade da iluminação da superfície refletora deve-se a duas razões:

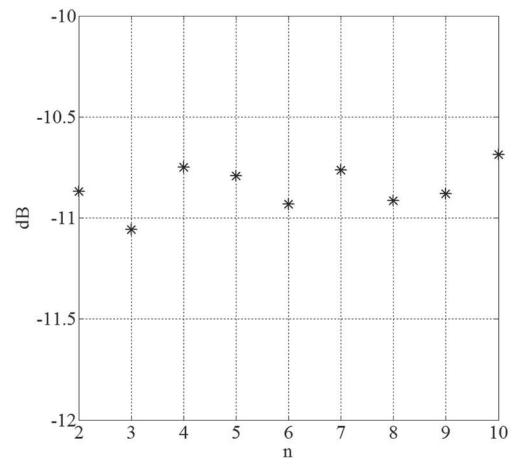
1ª- desigualdade das distâncias entre o foco e os vários pontos dessa superfície, devido à geometria do refletor;

2ª- à variação angular do diagrama de radiação do alimentador, o qual dum modo geral tende a iluminar com mais intensidade a região do vértice do que a região periférica.

A primeira destas razões já foi analisada anteriormente e é dada pela expressão (6-259) que se designou por fator de divergência. Este fator dá origem a iluminações na periferia que variam de -0.5 a -6dB relativamente à iluminação no centro. A segunda razão depende do diagrama de radiação do alimentador. Os alimentadores com diagramas de radiação dados por (6-295), quando usados em refletores que conduzem à máxima eficiência, dão origem a intensidades de iluminações na periferia, isto é, para $\theta = \theta_0$ representadas na Figura 6.67(a).



(a) Intensidade relativa devida ao alimentador



(b) Intensidade relativa total

Figura 6.67. Intensidade de iluminação na periferia produzida por alimentadores com diagramas de radiação dados por (6-295), quando usados em refletores que conduzem à máxima eficiência.

Desta figura vê-se por exemplo que um alimentador com $n=4$, apropriado para um refletor com $\theta_0 = 53^\circ$ ($f/d=0.5$), dá origem a uma intensidade de iluminação na periferia de -8.8dB . Sobrepondo a esta atenuação a que é causada pelo fator de divergência, obtém-se a intensidade de iluminação total na periferia. Na Figura 6.67(b) está representada essa intensidade total de iluminação relativa, em função do expoente n , para alimentadores com diagramas de radiação dados por (6-295), quando usados em refletores que conduzem à máxima eficiência.

Da Figura 6.67(b) conclui-se que para ter uma boa eficiência de abertura um paraboloide deve ter uma iluminação na periferia aproximadamente de 11dB abaixo da iluminação da zona central.

Os resultados obtidos com estes diagramas de radiação primários ideais só podem ser considerados como típicos porque se admitiu que:

- O alimentador estava perfeitamente apontado e alinhado;
- O diagrama de radiação primário era nulo para $\theta > 90^\circ$;
- O diagrama de radiação primário era de revolução e simétrico;
- Não radiava componente de polarização contrapolar;
- Não havia obstrução por parte do alimentador e sua estrutura de suporte;
- A superfície do refletor era perfeita.

Se todos, ou alguns destes aspetos não forem satisfeitos, isso tem obviamente influência na eficiência de abertura do paraboloide. Por isso na prática as eficiências máximas dos paraboloides são da ordem de 60 a 70%. Um valor médio razoável é 65%.

Para um paraboloide, tal como para qualquer antena, a relação entre o ganho e a diretividade é dada por $G = e_A D$ em que e_A é a eficiência da antena relacionada com as perdas nos condutores, nos dielétricos e com a eventual desadaptação ao guia de alimentação. Se a superfície reflectora for boa condutora e se o alimentador for bem construído e bem adaptado ao guia de alimentação, é de esperar que a eficiência e_A seja alta. Supondo que é de 85%, conjugando esta eficiência com uma eficiência de abertura de 65% podemos então considerar que o ganho dum paraboloide é dado por (6-298):

$$G \cong 0.55 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad (6-298)$$

6.12.2.4 Projeto simples dum paraboloide

O autor desenvolveu um programa em Matlab baseado na relação anterior que permite fazer um projeto simples dum refletor parabólico alimentado pela frente. Os dados de entrada são a frequência de operação e o ganho pretendido em dBi a esta frequência. Seguidamente considera-se duas opções:

- 1- A razão f/d é conhecida e pretende-se como resultados o diâmetro do refletor e o expoente n dum alimentador com um diagrama dado por (6-295) que produza a máxima eficiência de abertura obtida com (6-294);
- 2- O expoente n dum alimentador com um diagrama dado por (6-295) é conhecido e pretende-se como resultados o diâmetro do refletor e a razão f/d que produza a máxima eficiência de abertura obtida com (6-294).

Exemplo 6.4

Pretende-se projetar um refletor parabólico alimentado pela frente com um $f/d=0.7$ que tenha um ganho de 30dBi à frequência de 10GHz.

Resultados: Diâmetro do refletor $d=407.2\text{mm}$; distância focal $f=285\text{mm}$; ângulo de abertura $\theta_0 = 39.3^\circ$. Se este refletor, for alimentado com um alimentador com um diagrama dado por (6-295), obtém-se a máxima eficiência de abertura de 81.5%, com $n=8.8$. Com este expoente o valor da intensidade de iluminação total na periferia do refletor é de -10.8dB.

Calculando o diagrama de radiação através das fórmulas deduzidas anteriormente, obtém-se as LFMP nos dois planos principais que são iguais entre si e iguais a 4.86° . A partir das LFMP estima-se uma diretividade de $\approx 32\text{dBi}$. Assumindo que a eficiência da antena é de 80% o ganho previsto será de $\approx 31\text{dBi}$. Simulando esta antena no software GRASP obtém-se também um ganho de $\approx 31\text{dBi}$. Estes valores estão cerca de 1dB acima do pretendido pelo que se pode concluir que a relação (6-298) é conservadora.

Exemplo 6.5

Pretende-se projetar um refletor parabólico alimentado pela frente com alimentador com um diagrama dado por (6-295) com $n=4$ que tenha um ganho de 33dBi à frequência de 12GHz.

Resultados: Diâmetro do refletor $d=479.3\text{mm}$, distância focal $f=237.7\text{mm}$; ângulo de abertura $\theta_0 = 53^\circ$. Com este alimentador obtém-se a máxima eficiência de abertura de 82%, com um $f/d = 0.5$. O valor da intensidade de iluminação total na periferia do refletor é de -10.7dB.

Calculando o diagrama de radiação através das fórmulas deduzidas anteriormente, obtém-se as LFMP nos dois planos principais que são iguais entre si e iguais a 3.4° . A partir das LFMP estima-se uma diretividade de $\approx 35\text{dBi}$. Assumindo que a eficiência da antena é de 80% o ganho previsto será de $\approx 34\text{dBi}$. Simulando esta antena no software GRASP obtém-se também um ganho de $\approx 34\text{dBi}$. Tal como no Exemplo 6.4, estes valores estão cerca de 1dB acima do pretendido pelo que se confirma que a relação (6-298) é conservadora.

Nota: As eficiências máximas de abertura acima referidas são em condições ideais. De qualquer modo deve-se procurar resultados que maximizem a eficiência de abertura. No caso do Exemplo 6.4 calculando o melhor expoente n . No caso do Exemplo 6.5 calculando a melhor razão f/d .

6.12.2.5 Efeitos do erro de posicionamento do alimentador no foco

Quando o centro de fase do alimentador não coincide com o foco do paraboloide isso provoca um erro de fase ao longo da abertura que vai por sua vez provocar uma distorção no diagrama de radiação do refletor. O erro de colocação do alimentador pode ser sempre decomposto em dois erros parciais. Um é o erro axial, isto é, quando o alimentador está sobre o eixo do paraboloide, mas mais para dentro ou mais para fora, relativamente ao foco. O outro é o erro lateral quando o alimentador está no plano de abertura do paraboloide, mas ao lado do foco. Estes dois casos estão ilustrados na Figura 6.68.

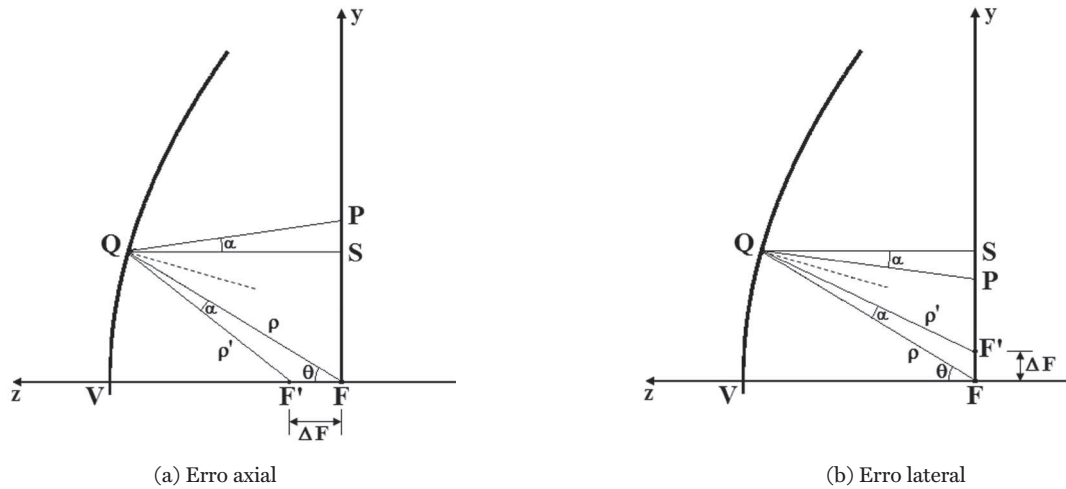


Figura 6.68. Erro de colocação do alimentador relativamente ao foco.

Vejamos primeiro o erro axial. Esta situação está representada na Figura 6.68(a) em que o alimentador está colocado mais para dentro.

A diferença entre o percurso $\overline{F'QP}$, para um dado ângulo θ , e o percurso $\overline{F'VF}$, para $\theta = 0^\circ$, vai dar origem a uma diferença de fase ao longo da abertura. Note-se que se não houvesse erro de posicionamento então o ponto P coincidia com o ponto S e o percurso $\overline{F'QP}$ seria sempre igual a $2f$. O erro de fase ao longo da abertura é, portanto, dado pela relação (6-299).

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda} [\overline{F'QP} - \overline{F'QP}_{(\theta=0)}] = -\frac{2\pi}{\lambda} [\overline{F'QP} - (2f - \Delta F)] \quad (6-299)$$

Para simplificar, consideremos que a diferença entre os percursos é devida essencialmente a ρ' . Sendo assim, o erro de fase ao longo da abertura é dado pela relação (6-300).

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda} [\rho'(y) - \rho'(y=0)] = -\frac{2\pi}{\lambda} [(\rho - \Delta\rho) - (\rho - \Delta F)] = -\frac{2\pi}{\lambda} [\Delta F - \Delta\rho(y)] \quad (6-300)$$

Em que $\Delta\rho = \Delta F \cos\theta$. Mas atendendo à geometria do paraboloide, $\cos\theta = \frac{4f^2 - y^2}{4f^2 + y^2}$, substituindo em (6-300) e atendendo que em geral $y^2 \ll 4f^2$, obtém-se após algumas simplificações (6-301).

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta F \frac{2y^2}{4f^2 + y^2} \cong -\pi \frac{\Delta F}{\lambda f^2} y^2 \quad (6-301)$$

Esta equação mostra que o erro de fase é da forma quadrática. Se o alimentador estiver colocado para fora relativamente ao foco o erro de fase ao longo da abertura é dado pela relação (6-302).

$$\Delta\phi \cong \pi \frac{\Delta F}{\lambda f^2} y^2 \quad (6-302)$$

Vejamos agora o erro lateral. Esta situação está representada na Figura 6.68(b). Considerando que a diferença entre os percursos é devida essencialmente à diferença $\Delta\rho$ entre ρ e ρ' , o erro de fase ao longo da abertura é dado pela relação (6-303).

$$\Delta\phi \cong -\frac{2\pi}{\lambda} [\rho'(y) - \rho'(y=0)] \cong -\frac{2\pi}{\lambda} [(\rho - \Delta\rho) - \rho] \cong \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\rho \quad (6-303)$$

Da Figura 6.68(b) vê-se que $\Delta\rho = \Delta F \sin\theta$ e da geometria do paraboloide obtém-se $\rho = \frac{2f}{1+\cos\theta}$ e $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$, substituindo em (6-303) pode-se escrever

$$\Delta\phi \cong \frac{2\pi \Delta F}{\lambda} \frac{y}{\rho} = \frac{2\pi \Delta F}{\lambda} \frac{2f}{2f} (1 + \cos\theta) y \cong \frac{2\pi \Delta F}{\lambda f} y \quad (6-304)$$

atendendo a que $1 + \cos\theta \cong 2$ para pequenos e médios valores de θ .

A equação anterior mostra que se trata duma variação de fase linear ao longo da abertura. A consequência deste erro é a de orientar o feixe para uma direção diferente da axial.

Na Figura 6.69 estão ilustrados dois casos de erros de fase causados por erro de posicionamento do alimentador relativamente ao foco. Na Figura 6.69(a) devido ao erro axial a distribuição de fase tem a forma quadrática. Na Figura 6.69(b) por causa dum erro lateral a distribuição tem a forma linear. Estes dados foram obtidos experimentalmente pela medida da fase ao longo da abertura duma antena parabólica com um $d = 1.5\text{m}$ e um $f = 0.75\text{m}$, à frequência de 13.21GHz.

A partir dos resultados da Figura 6.69(a) pode-se estimar, usando (6-302), que o alimentador está cerca de 6mm colocado para o lado de fora. Posteriormente a alimentador foi deslocado axialmente 6mm no sentido do vértice e a antena novamente medida. Os novos resultados mostraram uma distribuição de fase ainda com a forma quadrática, mas de sinal contrário, com um erro de fase muito menor da ordem dos 10° , pelo que se pode concluir que o alimentador deveria ter sido movido um pouco menos. De qualquer forma conseguiu-se melhorar a distribuição de fase ao longo da abertura radiante e por consequência obter um diagrama de radiação mais bem definido.

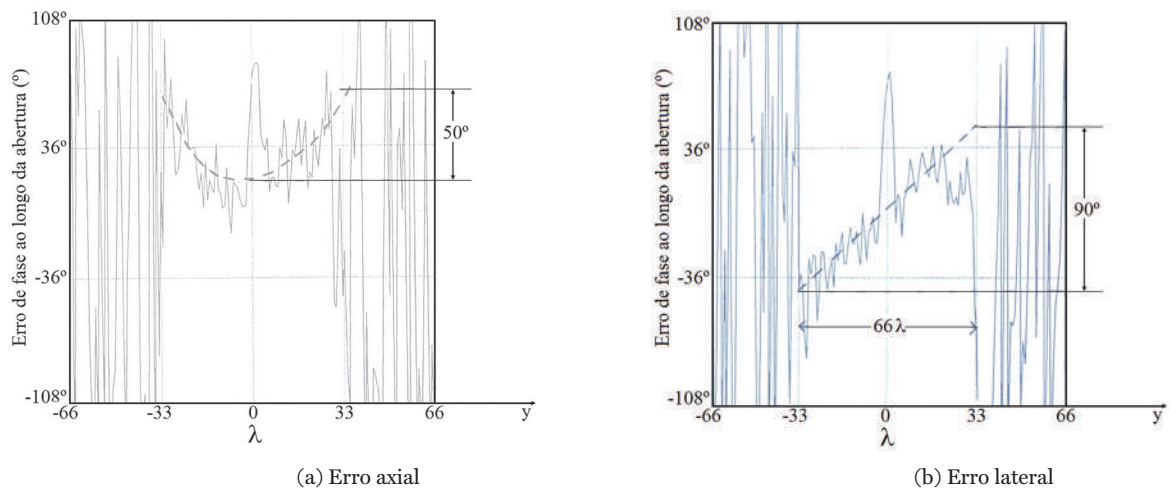


Figura 6.69. Erros de fase ao longo da abertura por causa da deficiente colocação do alimentador relativamente ao foco.

A partir dos resultados da Figura 6.69(b) pode-se ver que a forma linear da distribuição é dada aproximadamente pela equação $\Delta\phi \cong \frac{1.36^\circ}{\lambda} y$. Usando este resultado em (6-304) pode-se estimar que o alimentador está cerca de 3mm colocado ao lado do foco.

Apesar das consequências atrás referidas mover o alimentador para fora do foco, mantendo-o no plano focal, pode ser um modo simples de orientar o feixe produzido pelo paraboloide dentro dum certo intervalo angular. Usando este método é óbvio que á medida que o ângulo de orientação aumenta, a forma do lobo principal (feixe) deteriora-se resultando num aumento da sua largura, numa diminuição do ganho e num aumento do nível dos lóbulos secundários. Esta deterioração designa-se por astigmatismo. O máximo desvio angular do feixe por este método é aproximadamente proporcional à LFMP obtida em condições normais de funcionamento. Este desvio é tanto maior quanto maior é a razão f/d . Por exemplo, o ganho dum paraboloide com um $f/d = 0.25$ reduz-se a 80% do seu máximo quando o feixe é desviado ± 3 LFMP. Contudo para um paraboloide com um $f/d = 0.5$ o seu ganho só se reduz a 80% do seu máximo quando o feixe é desviado ± 6.5 LFMP.

6.12.3 Refletor parabólico alimentado fora do eixo

Como vimos o refletor alimentado pela frente, estudado na secção anterior, tem o problema da obstrução da onda refletida pelo paraboloide causada pelo alimentador conjuntamente com a estrutura utilizada para o suportar. Este problema pode ser reduzido ou eliminado usando um refletor com alimentação fora do eixo, designada por *offset*. Esta configuração não tem os efeitos de bloqueio da abertura causados pelo alimentador. A Figura 6.70 ilustra a vista 3D e a Figura 6.71 mostra o corte lateral e a vista frontal. A superfície refletora é parte dum paraboloide e resulta da intersecção dum cilindro, de diâmetro d , com um paraboloide de diâmetro D_p e com a distância focal f . O refletor *offset* é definido pelo diâmetro d , pela distância d_o do centro ao eixo (designada por distância *offset*) e pela distância focal f . O alimentador deve ser escolhido tendo em conta o ângulo de abertura θ_e definido na Figura 6.71, o ângulo α de apontamento e a iluminação pretendida na periferia do refletor, isto é, o *taper*. Outro parâmetro importante é a distância de desobstrução d_c .

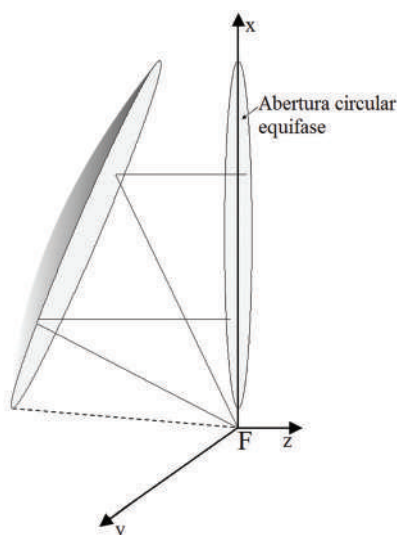


Figura 6.70. Princípio de funcionamento dum refletor parabólico alimentado fora do eixo (*Offset*). Visão 3D.

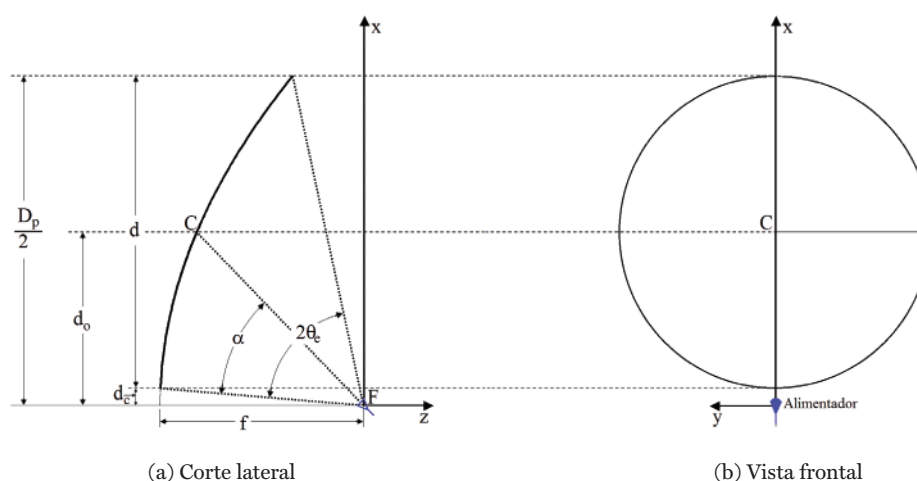


Figura 6.71. Corte lateral e vista frontal dum refletor parabólico alimentado fora do eixo (*Offset*).

A geometria dum refletor *offset* corresponde à geometria do paraboloide primário de diâmetro D_p podendo as dimensões relevantes ser obtidas a partir das fórmulas da secção 6.12.2.1.

6.12.3.1 Diagrama de radiação

Devido ao modo excêntrico como este tipo de refletor é alimentado, existe polarização cruzada mesmo no plano principal $\phi = 90^\circ$.

O método deduzido na secção 6.12.2.2 e usado para calcular o diagrama de radiação dum refletor parabólico alimentado pela frente, quando aplicado a um refletor *offset* não prevê a componente contrapolar porque esta configuração não é de revolução em torno do eixo que passa pelo foco.

Para calcular o diagrama de radiação dum refletor *offset* o autor desenvolveu um programa em Matlab baseado no procedimento descrito por Nhu Bui-Hai em [13] que por sua vez se baseia em [14] e [15].

Os dados de entrada são, o diâmetro do refletor, a distância de desobstrução, a distância focal, a frequência de operação e o tipo de alimentador. Para o cálculo do diagrama são considerados dois tipos de alimentadores:

- 1- Um alimentador experimental, cujas características são dadas por medições diretas às frequências mais relevantes;
- 2- Um alimentador teórico de dois tipos:

a)- Definido pela função $E(\theta) = \cos^n(\theta)$;

b)- Definido pela função Gaussiana $E(\theta) = 10^{\frac{T}{20}(\frac{\theta}{\theta_o})^2}$ em que T é o nível pretendido para $\theta = \theta_o$.

Em ambos os casos, θ é o ângulo medido a partir do eixo do alimentador e θ_o representa os ângulos periféricos subentendidos pelo alimentador; isto é, α ou $(2\theta_c - \alpha)$.

Quando se escolhe um alimentador teórico é pedido o nível desejado de iluminação na periferia do refletor, designado por *taper*. Os valores mais comuns estão na faixa de 8 a 15 dB tendo-se visto atrás que um *taper* de aproximadamente de 11dB produz uma boa eficiência de abertura.

O expoente n da função $E(\theta) = \cos^n(\theta)$ ou o valor T da função Gaussiana $E(\theta) = 10^{\frac{T}{20}(\frac{\theta}{\theta_o})^2}$ são estimados de forma a se obter uma boa solução de compromisso entre os níveis de iluminação nas periferias superior e inferior do refletor de modo que sejam o mais próximos possíveis do *taper* desejado, tendo em conta o fator de divergência ou seja a atenuação própria do paraboloide.

6.12.3.2 Projeto simples dum refletor *Offset*

O autor desenvolveu um programa em Matlab que permite fazer um projeto simples dum refletor *offset*. Os dados de entrada são a frequência de operação, o ganho pretendido em dBi a esta frequência e a distância de desobstrução.

Para calcular o diâmetro da abertura usa-se a relação $G \cong 0.65 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \right)^2$ que é semelhante a (6-298) mas menos exigente.

Seguidamente considera-se duas opções:

- 1- É dado o semiângulo θ_e (em °) pretendido, subtendido pelo alimentador (ver Figura 6.71);
- 2- É dada a razão f/D_p (D_p é o diâmetro do paraboloide primário). Esta razão está geralmente compreendida entre 0.25 e 1, sendo tipicamente da ordem de 0.3. A partir dos dados de entrada, todas as dimensões relevantes podem ser obtidas a partir das fórmulas da secção 6.12.2.1.

Consideremos seguidamente três exemplos.

Exemplo 6.6

Pretende-se projetar um refletor *offset* que tenha um ganho de 30dBi à frequência de 10GHz, uma distância de desobstrução $d_c = 15\text{mm}$, e um ângulo $\theta_e = 36^\circ$.

Resultados: Diâmetro $d=375\text{mm}$; distância focal $f=252\text{mm}$; ângulo de apontamento ao centro $\alpha = 40.33^\circ$. A Figura 6.72 mostra o corte lateral do refletor onde também estão representadas outras dimensões relevantes.

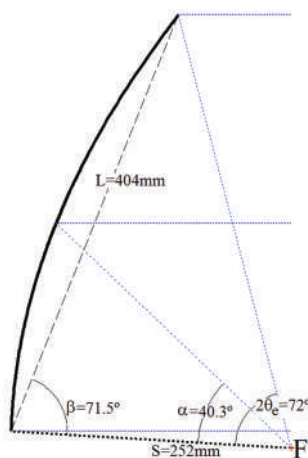
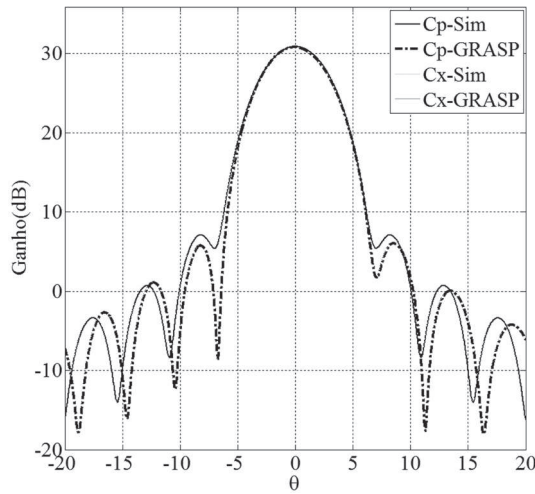


Figura 6.72. Perfil do refletor *offset* do Exemplo 6.6.

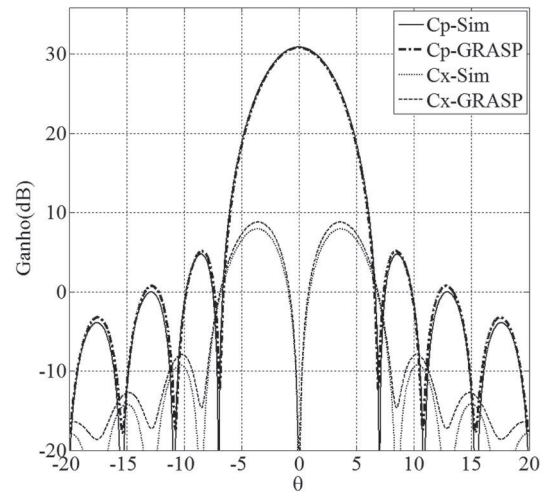
O diagrama de radiação deste refletor foi calculado pelo programa atrás mencionado usando um *taper* de 11dB.

Este valor implicou um expoente $n = 5.54$ para a função $E(\theta) = \cos^n(\theta)$ quando se escolheu este tipo de alimentador e, $T = -12.29$ e $\theta_0 = 40.33^\circ$ da função Gaussiana $E(\theta) = 10^{\frac{T}{20} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^2}$ quando se escolheu o alimentador gaussiano.

A análise dos diagramas de radiação mostrou que é praticamente indiferente escolher o alimentador cosseno ou gaussiano. Também se comparou este diagrama com o previsto pelo *software* GRASP9-SE, Ver.9.3.01, tendo-se observado uma boa correspondência. Estes diagramas estão ilustrados na Figura 6.73.



(a) Plano $\phi = 0^\circ$



(b) Plano $\phi = 90^\circ$

Figura 6.73. Diagramas de radiação do Exemplo 6.6.

Os diagramas têm LFMP iguais nos dois planos principais da ordem de 5.3° . A partir destas LFMP estimou-se uma diretividade de aproximadamente 31 dBi. Se a antena depois de construída tiver uma eficiência de cerca de 80%, então o seu ganho será cerca de 30 dBi como esperado. O ganho previsto pelo GRASP é de 30.8 dBi.

No plano $\phi = 0^\circ$ a polarização contrapolar é desprezável, mas no plano $\phi = 90^\circ$ apresenta dois lóbulos com cerca de 22 dB abaixo do máximo da componente copolar, segundo as direções de $\pm 3.6^\circ$.

Exemplo 6.7

Pretende-se projetar um refletor *offset* que tenha um ganho de 38 dBi à frequência de 11.75 GHz, uma distância de desobstrução $d_c = 40$ mm, e uma razão $f/D_p = 0.3$.

Resultados: Diâmetro $d = 800.7$ mm; distância focal $f = 504.4$ mm; ângulo de apontamento ao centro $\alpha = 42.6^\circ$. A Figura 6.74 mostra o corte lateral do refletor onde também estão representadas outras dimensões relevantes.

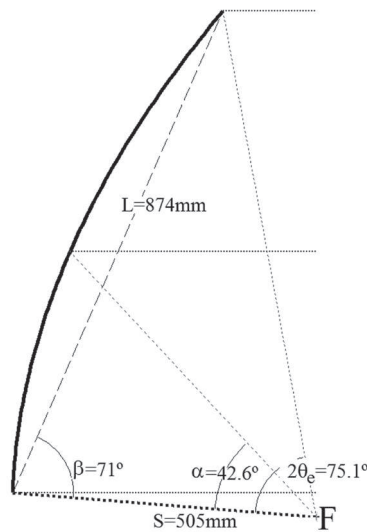


Figura 6.74. Perfil do refletor *offset* do Exemplo 6.7.

O diagrama de radiação deste refletor foi calculado pelo programa atrás mencionado usando um *taper* de 11 dB.

Este valor implicou um expoente $n = 5.04$ para a função $E(\theta) = \cos^n(\theta)$ quando se escolheu este tipo de alimentador e, $T = -12.5$ e $\theta_0 = 42.6^\circ$ da função Gaussiana $E(\theta) = 10^{\frac{T}{20}(\frac{\theta}{\theta_0})^2}$ quando se escolheu o alimentador gaussiano.

Os diagramas estão ilustrados na Figura 6.75.

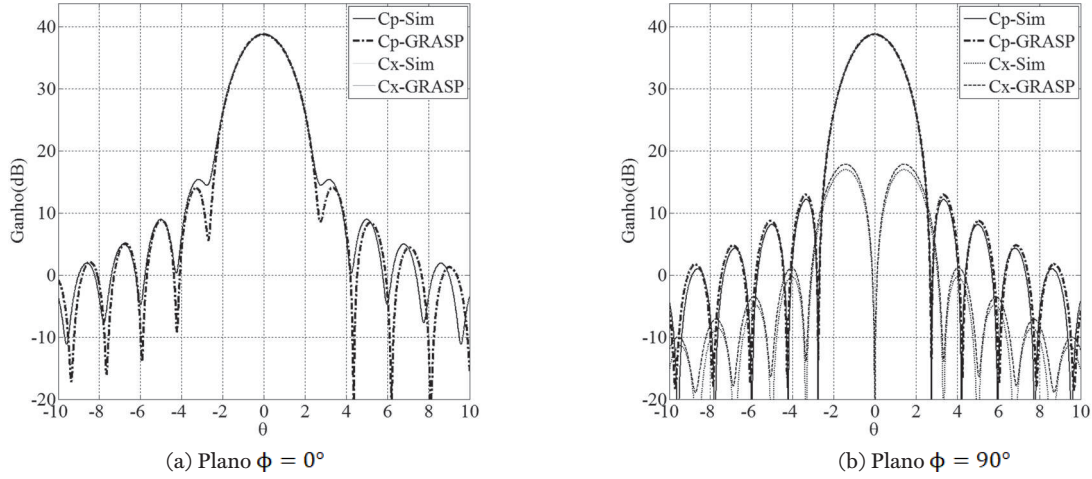


Figura 6.75. Diagramas de radiação do Exemplo 6.7.

Os diagramas têm LFMP iguais nos dois planos principais da ordem de 2.1° . A partir destas LFMP estimou-se uma directividade de aproximadamente 39dBi. Se a antenna depois de construída tiver uma eficiência de cerca de 80%, então o seu ganho será cerca de 38dBi como esperado. O ganho previsto pelo GRASP é de 38.7dBi.

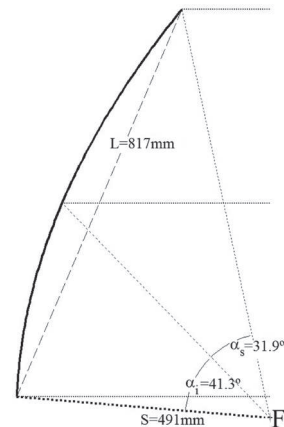
No plano $\phi = 0^\circ$ a polarização contrapolar é desprezável, mas no plano $\phi = 90^\circ$ apresenta dois lóbulos com cerca de 22dB abaixo do máximo da componente copolar, segundo as direcções de $\pm 1.4^\circ$.

Exemplo 6.8

A Figura 6.76 mostra um refletor *offset*, destinado à receção de televisão emitida por satélite, fabricado pela empresa FAMAVAL². Esta antenna tem um diâmetro $d=752\text{mm}$, uma distância focal $f=490\text{mm}$, uma distância de desobstrução $d_c = 40\text{mm}$ e um ângulo de apontamento ao centro $\alpha = 41.3^\circ$. A Figura 6.76(b) mostra o corte lateral do refletor onde também estão representadas outras dimensões relevantes. A antenna é alimentada com a corneta da Figura 6.43.



(a) Antena montada na câmara anecoica da UA



(b) Perfil do refletor *offset*

Figura 6.76. Antena FAMAVAL do Exemplo 6.8.

² <http://www.famaval.pt/>

Os diagramas de radiação da antena foram medidos na câmara anecoica da Universidade de Aveiro. Os diagramas foram ainda calculados pelo programa atrás mencionado, usando os dados dos diagramas do alimentador representados na Figura 6.44. Os diagramas foram também previstos pelo *software* GRASP9-SE, Ver.9.3.01. Todos estes diagramas estão ilustrados na Figura 6.77.

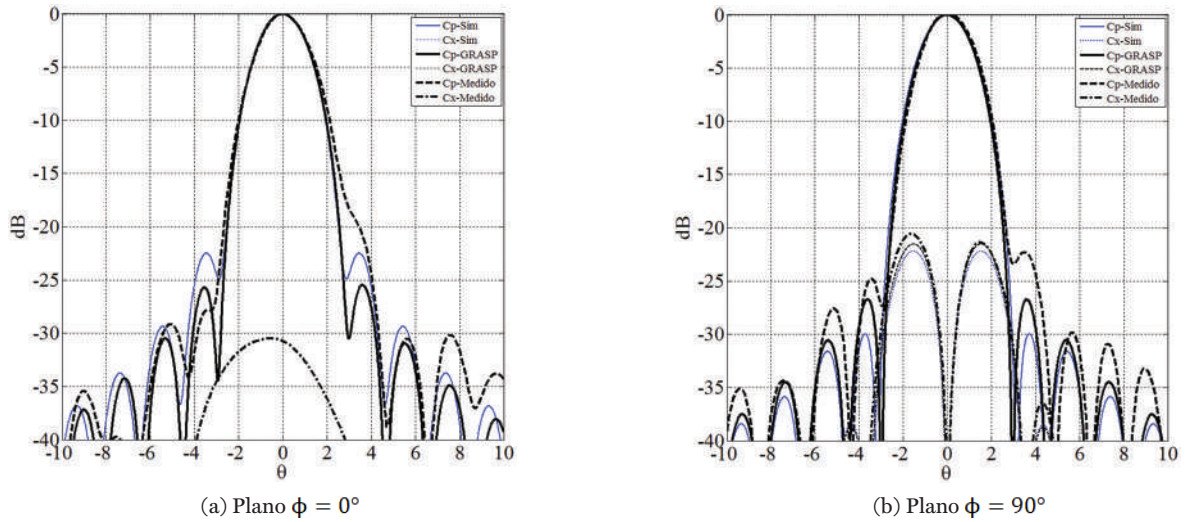


Figura 6.77. Diagramas de radiação do Exemplo 6.8.

Da Figura 6.77 pode-se concluir que os diagramas em geral têm uma concordância aceitável, pelo menos no lobo principal e na localização dos mínimos e dos lóbulos secundários. Os diagramas têm LFMP muito semelhantes entre si e nos dois planos principais da ordem de 2.3° . No plano $\phi = 0^\circ$ o diagrama copolar medido é assimétrico apresentando um ombro na zona do primeiro lóbulo secundário. Isto deve-se à obstrução do braço que suporta o alimentador durante a medida na faixa afetada, como se pode observar na Figura 6.78. Isso também pode explicar o aparecimento da componente contrapolar, embora inferior a 30dB, que não é prevista pelos diagramas simulados.

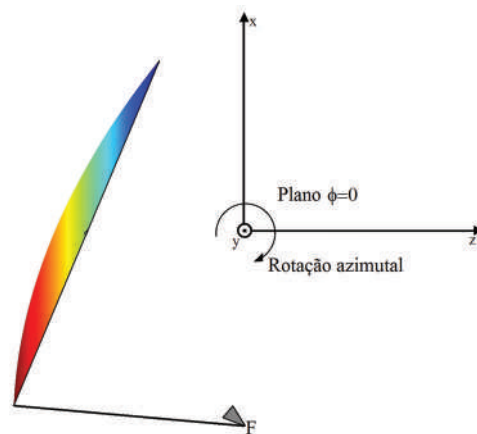


Figura 6.78. Plano de medida do diagrama no plano $\phi = 0^\circ$.

No plano $\phi = 90^\circ$ a polarização contrapolar apresenta dois lóbulos com cerca de 21dB abaixo do máximo da componente copolar, segundo as direções de $\pm 1.6^\circ$.

A partir das LFMP estimou-se uma diretividade de aproximadamente 38.7dBi. Se a antena depois de construída tiver uma boa eficiência o seu ganho será cerca de 38dBi o qual concorda com o especificado para esta antena pelo fabricante.

6.12.4 Antenas de duplo refletor

Com o fim de aumentar a eficiência das antenas refletoras usadas em micro-ondas para comunicações via satélite foi proposto o uso de sistemas com dois refletores.

6.12.4.1 Antenas axialmente simétricas de duplo refletor

As antenas axialmente simétricas de duplo refletor têm, entre outras vantagens, a possibilidade de se poder colocar o alimentador perto do vértice do refletor principal permitindo assim um acesso fácil ao equipamento de recepção ou de transmissão colocado junto ao alimentador.

Estas antenas são compostas por um refletor principal, um paraboloide, por um refletor secundário ou subrefletor, que é um hiperboloide ou um elipsoide e por um alimentador. Quando o subrefletor é um hiperboloide, a configuração é designada Cassegrain. Quando o subrefletor é um elipsoide, a configuração é designada Gregorian. Na Figura 6.79 estão representadas ambas as configurações.

O hiperboloide ou o elipsoide partilham os seus dois pontos focais com o alimentador e com o foco do paraboloide. É isso que permite que o alimentador seja colocado num ponto que não é o foco do paraboloide.

O uso dum subrefletor dá mais um grau de liberdade ao sistema para a obtenção duma boa eficiência num determinado número de aplicações. Em geral estes sistemas têm várias vantagens, tais como:

- Possibilidade de colocar o alimentador numa posição conveniente;
- Redução da energia não interceptada pelo refletor;
- Possibilidade de se obter uma distância focal maior do que a distância entre refletores
- Possibilidade de deslocar ou alargar angularmente o feixe movendo um dos refletores.

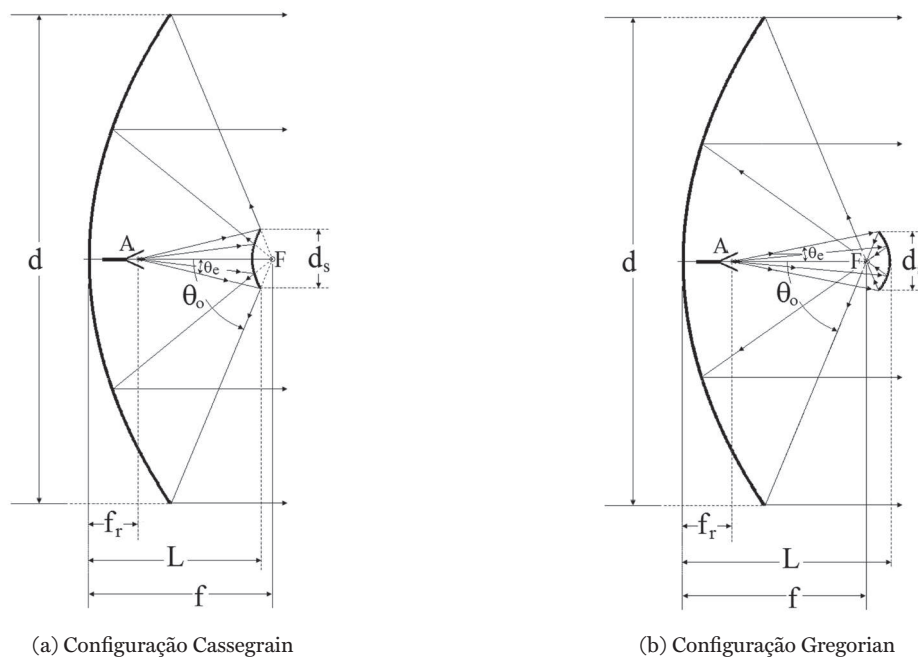


Figura 6.79. Antenas axialmente simétricas de duplo refletor.

Para se obter boas características de radiação, o subrefletor deve ter alguns comprimentos de onda de diâmetro, embora isso provoque uma obstrução que é a principal desvantagem deste tipo de antenas. Para minimizar este efeito o diâmetro do subrefletor deve ser da ordem dos 10 a 20% do diâmetro do paraboloide o que significa que este deve ter vários comprimentos de onda. Por este motivo, as antenas de duplo refletor têm geralmente um ganho maior ou igual a 40dBi.

Para se compreender o princípio de funcionamento destas antenas, consideremos por exemplo a configuração Cassegrain, representada na Figura 6.79(a), em modo de receção. Quando a energia, sob a forma dum feixe de raios paralelos, incide na antena uma parte é interceptada pelo paraboloide e é refletida em direção ao subrefletor. Por sua vez esta superfície convexa, reflete a energia em direção ao vértice do refletor principal. Como o subrefletor é um hiperboloide, então todos os raios serão focados num ponto. Colocando o alimentador nesse ponto ele coletará toda a energia. Dum modo semelhante se pode descrever o funcionamento da antena no modo de transmissão.

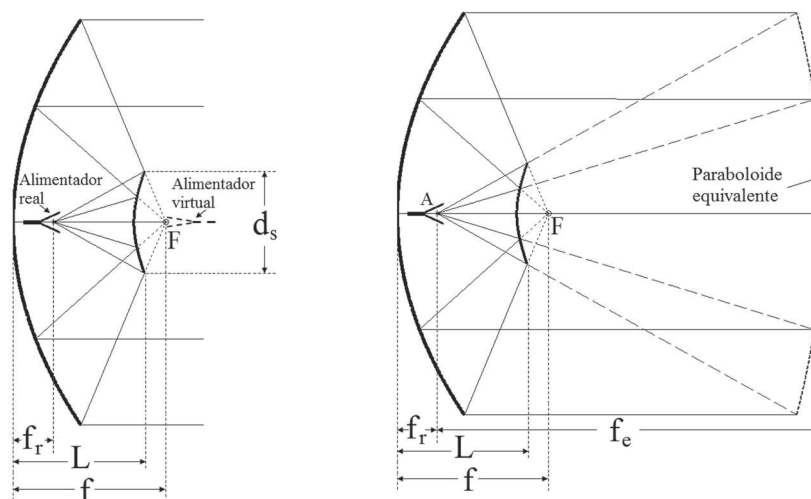
Tal como acontece num paraboloide alimentado pela frente, a iluminação da abertura não é uniforme. É mais acentuada no centro decrescendo em direção à periferia. Esta distribuição é determinada pelo diagrama do alimentador e pela geometria própria do sistema.

Consideremos ainda o sistema Cassegrain. Para o estudar, pode-se reduzir o sistema a uma antena dum só refletor recorrendo a dois conceitos: (1) conceito de alimentador virtual e, (2) conceito de paraboloide equivalente.

Pelo método do alimentador virtual, o alimentador real e o subrefletor são substituídos por um alimentador virtual colocado no foco do refletor principal. Para efeitos de análise o sistema equivalente tem um só refletor, que é o refletor principal, e um alimentador diferente, tal como se mostra na Figura 6.80(a). Desta figura pode ver-se que o alimentador virtual tem uma abertura efetiva menor e, por consequência um feixe mais largo do que o alimentador real. Pode-se, portanto, concluir que o papel do subrefletor é o de transformar o diagrama do alimentador real num diagrama menos diretivo, correspondente ao do alimentador virtual.

Pelo método do paraboloide equivalente, o refletor primário e o subrefletor são substituídos por um paraboloide equivalente com uma distância focal f_e , diferente da distância focal f , do refletor principal. Para efeitos de análise o sistema equivalente tem um só refletor, que é o refletor equivalente, e o alimentador real, tal como se mostra na Figura 6.80(b).

O mesmo tipo de raciocínio pode ser aplicado à configuração Gregorian.



(a) Alimentador virtual

(b) Paraboloide equivalente

Figura 6.80. Antenas axialmente simétricas de duplo refletor. Conceitos equivalentes.

6.12.4.1.1 Projeto simples de antenas axialmente simétricas de duplo refletor

O autor desenvolveu um programa em Matlab que permite fazer o projeto simples duma antena axialmente simétrica de duplo refletor. Os dados de entrada são a frequência de operação, o ganho pretendido em dBi a esta frequência, a razão f/d , o diâmetro do subrefletor expresso em percentagem do diâmetro d do refletor principal e a distância entre o vértice e a posição do alimentador real. É também pedida a configuração desejada, Cassegrain ou Gregorian.

Exemplo 6.9

Pretende-se projetar uma antena do tipo Cassegrain que tenha um ganho de 48dBi à frequência de 10GHz, uma razão $f/d = 0.375$, um sub-refletor com um diâmetro igual a 12% do diâmetro d do refletor principal e uma distância entre o vértice e a posição do alimentador real $f_r = 300\text{mm}$.

Resultados: Diâmetro do refletor principal $d=3\text{m}$; distância focal $f=1.13\text{m}$; diâmetro do subrefletor $d_s = 0.361\text{m}$; comprimento da antena $L = 1.06\text{m}$; excentricidade do hiperboloide $e_x = 1.43$; ângulo de abertura do paraboloide $\theta_0 = 67.38^\circ$; ângulo de abertura do alimentador $\theta_e = 13.48^\circ$ e distância focal do paraboloide equivalente $f_e = 6.37\text{m}$.

O perfil desta antena está representado na Figura 6.79(a).

Exemplo 6.10

Pretende-se projetar uma antena do tipo Gregorian com os mesmos dados do exemplo anterior.

Resultados: Diâmetro do refletor principal $d=3\text{m}$; distância focal $f=1.13\text{m}$; diâmetro do subrefletor $d_s = 0.361\text{m}$; comprimento da antena $L = 1.27\text{m}$; excentricidade do hiperboloide $e_x = 0.742$; ângulo de abertura do paraboloide $\theta_0 = 67.38^\circ$; ângulo de abertura do alimentador $\theta_e = 11.3^\circ$ e distância focal do paraboloide equivalente $f_e = 7.61\text{m}$.

O perfil desta antena está representado na Figura 6.79(b).

Os diagramas foram previstos pelo *software* GRASP9-SE, Ver.9.3.01e estão ilustrados na Figura 6.81.

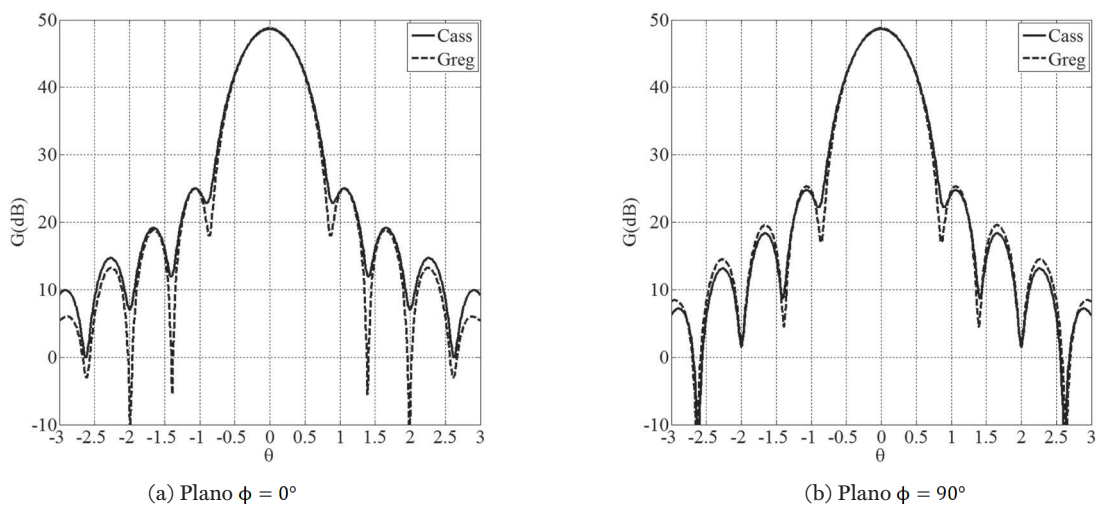


Figura 6.81. Diagramas de radiação dos exemplos Exemplo 6.9 e Exemplo 6.10.

Como se pode observar da Figura 6.81 os diagramas são ligeiramente diferentes pois na realidade são antenas diferentes, embora o ganho previsto seja o mesmo assim como a localização dos mínimos. As maiores diferenças são o nível dos lóbulos secundários que mesmo assim são pequenas. Parece, pois, ser legítimo concluir que é mais ou menos indiferente optar pela configuração Cassegrain ou pela configuração Gregorian.

Outra comparação que se pode fazer é entre o diagrama da configuração escolhida e o diagrama de radiação do respetivo paraboloide equivalente. Na Figura 6.82 estão representados os diagramas de radiação do Exemplo 6.9 e os do respetivo sistema equivalente constituído pelo refletor equivalente, com uma distância focal $f_e = 6.37$, e o mesmo alimentador.

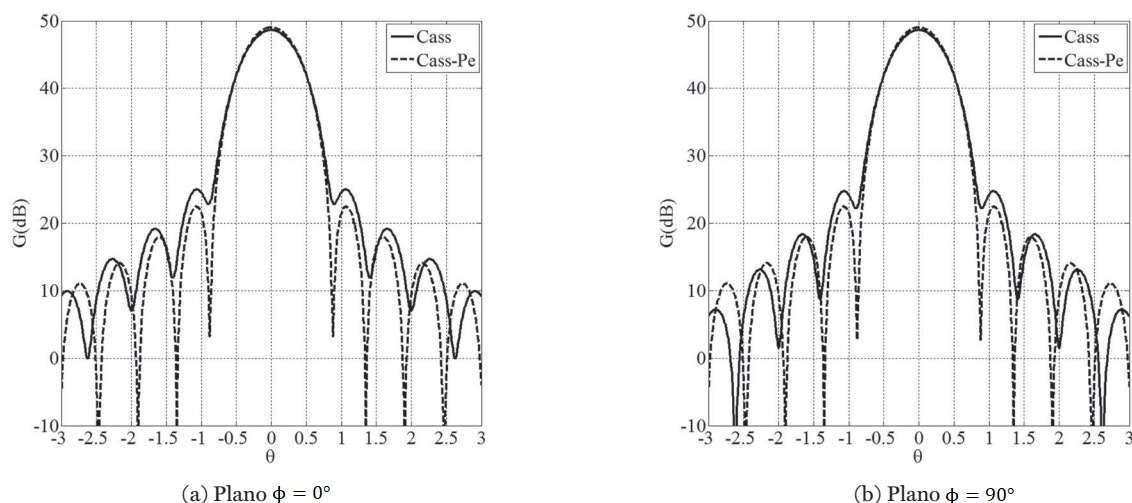


Figura 6.82. Comparação entre os diagramas de radiação do Exemplo 6.9 e do respetivo paraboloide equivalente.

Observando a Figura 6.82, vê-se que os diagramas são diferentes. Uma das diferenças é o máximo ganho que é cerca de 0.4dB maior no caso do paraboloide equivalente. As outras diferenças são o nível e a localização dos lóbulos secundários e a localização dos mínimos. Estas diferenças devem-se à obstrução causada pelo subrefletor que não existe no modelo do paraboloide equivalente.

6.12.4.2 Antenas de duplo refletor alimentadas fora do eixo

As antenas de duplo refletor alimentadas fora do eixo são o topo de gama da família dos refletores. Quando bem projetadas, estas antenas não sofrem do problema da obstrução das antenas axialmente simétricas, sejam simples ou com subrefletor e também não apresentam uma polarização cruzada elevada como as antenas *offset* simples. As configurações *offset* de duplo refletor podem assumir várias configurações sendo as principais a Cassegrain, quando o subrefletor é um hiperboloide e a Gregorian, quando o subrefletor é um elipsoide. Em qualquer caso superfície refletora primária dá normalmente origem a uma abertura circular que resulta da intersecção dum cilindro, de diâmetro d , com um paraboloide de diâmetro D_p e com uma distância focal f . Na Figura 6.83 estão representadas ambas as configurações.

Para não sobrecarregar as figuras, na Figura 6.83(a) não se ilustra a dimensão d_s do subrefletor nem a dimensão L do comprimento da antena que no entanto se podem deduzir da Figura 6.83(b). Pela mesma razão, na Figura 6.83(b) não se ilustram as dimensões dos parâmetros: f , I_f , d , θ_e , d_o , d_c e D_p as quais se podem deduzir da Figura 6.83(a).

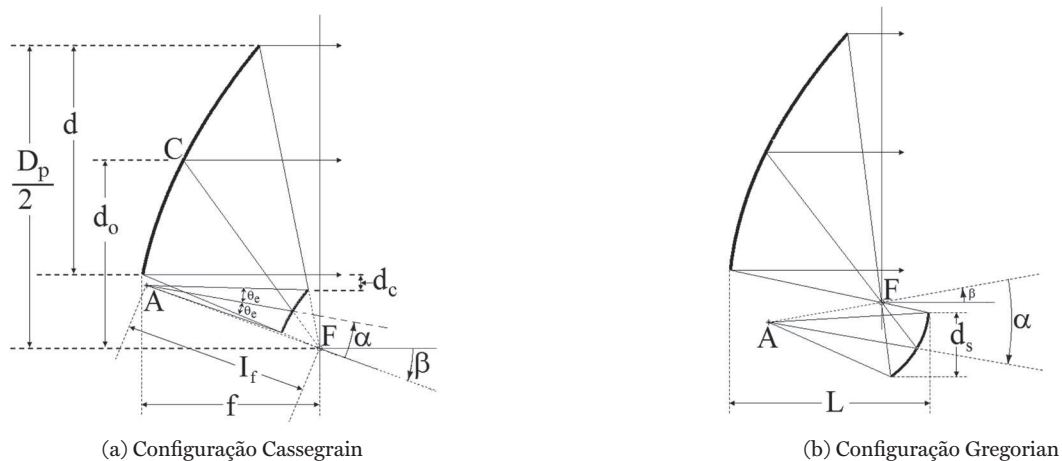


Figura 6.83. Antenas de duplo refletor alimentadas fora do eixo.

O hiperboloide ou o elipsoide partilham os seus dois pontos focais com o alimentador e com o foco do paraboloide. É isso que permite que o alimentador seja colocado num ponto que não é o foco do paraboloide. O uso dum subrefletor dá mais um grau de liberdade ao sistema para a obtenção duma boa eficiência num determinado número de aplicações. Mais detalhes sobre este tipo de antenas podem ser encontrados em [16] e [17].

6.12.4.2.1 Projeto simples de antenas de duplo refletor alimentadas fora do eixo

O autor desenvolveu um programa em Matlab que permite fazer o projeto simples duma antena de duplo refletor alimentada fora do eixo. Os dados iniciais de entrada são a frequência de operação e o ganho pretendido em dBi a esta frequência. É de seguida pedida a configuração desejada, Cassegrain ou Gregorian. Os dados seguintes são a distância focal f , a distância interfocal I_f , a excentricidade e_x do subrefletor, o ângulo β entre o eixo do paraboloide e o eixo do subrefletor e, o ângulo α de apontamento do alimentador medido a partir do eixo do subrefletor que é a linha que une os seus focos, isto é, os pontos A e F. Estes ângulos são positivos quando medidos no sentido contrário dos ponteiros do relógio. A definição destas grandezas está feita na Figura 6.83. A excentricidade dum hiperboloide é maior do que 1, tipicamente entre 1.5 e 2. A excentricidade dum elipsoide é maior do que 0 e menor do que 1, tipicamente entre 0.5 e 0.8. Este conjunto de dados permite obter várias geometrias e deste modo conseguir a mais conveniente para a aplicação pretendida.

Exemplo 6.11

Pretende-se projetar uma antena do tipo Cassegrain que tenha um ganho de 55dBi à frequência de 11GHz, uma distância focal $f = 5\text{m}$, uma distância interfocal $I_f = 5\text{m}$, um subrefletor hiperboloide com uma excentricidade $e_x = 1.8$, um ângulo $\beta = -20^\circ$ e um ângulo $\alpha = 10^\circ$.

Resultados: Diâmetro do refletor principal $d = 6.2\text{m}$; diâmetro do subrefletor $d_s = 1.1\text{m}$; comprimento da antena $L = 4.5\text{m}$; ângulo de abertura do alimentador $\theta_e = 8.75^\circ$; distância *offset* do paraboloide $d_o = 5.1\text{m}$; distância de desobstrução $d_c = 0.4\text{m}$ e uma razão $f/D_p = 0.3$, sendo D_p o diâmetro do paraboloide primário.

O perfil desta antena está representado na Figura 6.83(a).

Exemplo 6.12

Pretende-se projetar uma antena do tipo Gregorian que tenha um ganho de 55dBi à frequência de 11GHz, uma distância focal $f = 4\text{m}$, uma distância interfocal $I_f = 3\text{m}$, um subrefletor elipsoide com uma excentricidade $e_x = 0.55$, um ângulo $\beta = 10^\circ$ e um ângulo $\alpha = -20^\circ$.

Resultados: Diâmetro do refletor principal $d = 6.2\text{m}$; diâmetro do subrefletor $d_s = 1.7\text{m}$; comprimento da antena $L = 5.2\text{m}$; ângulo de abertura do alimentador $\theta_e = 13.7^\circ$; distância *offset* do paraboloide $d_o = 3.9\text{m}$; distância de desobstrução $d_c = 1.1\text{m}$ e uma razão $f/D_p = 0.28$, sendo D_p o diâmetro do paraboloide primário. O perfil desta antena está representado na Figura 6.83(b).

Os diagramas foram previstos pelo *software* GRASP9-SE, Ver.9.3.01 e estão ilustrados na Figura 6.84.

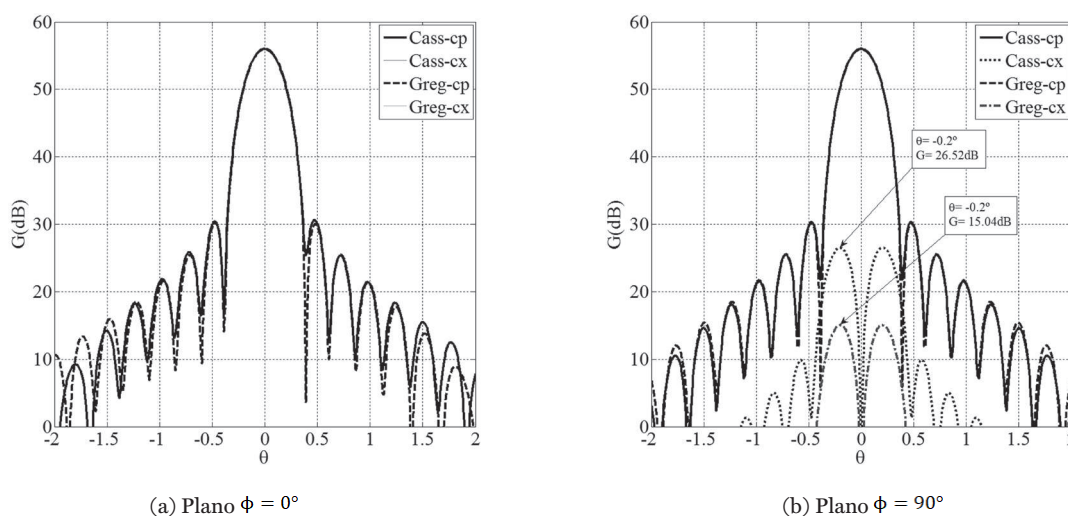


Figura 6.84. Diagramas de radiação dos exemplos Exemplo 6.11 e Exemplo 6.12.

Embora na realidade sejam antenas diferentes, pode-se observar da Figura 6.84 que os diagramas da componente copolar são praticamente iguais, sendo o ganho previsto o mesmo para as duas e igual a 56dBi. Há, contudo, algumas pequenas diferenças no valor dos mínimos assim como no nível e na localização dos lóbulos mais secundários, principalmente no plano $\phi = 0^\circ$. As maiores diferenças são na componente contrapolar, no plano $\phi = 90^\circ$. A configuração Cassegrain, embora apresente um nível de polarização cruzada de cerca de 30dB que já é bastante bom, ainda é suplantada pela configuração Gregorian que apresenta um nível de polarização cruzada de cerca de 41dB, isto é, 11dB melhor do que a configuração Cassegrain. No plano $\phi = 0^\circ$ a polarização cruzada é virtualmente inexistente.

Estes resultados confirmam que de facto as antenas de duplo refletor alimentadas fora do eixo, quando bem projetadas, são o topo de gama da família dos refletores.

De seguida apresentam-se mais dois exemplos.

Exemplo 6.13

Pretende-se projetar uma antena do tipo Cassegrain que tenha um ganho de 48dBi à frequência de 10GHz, uma distância focal $f = 2.5\text{m}$, uma distância interfocal $I_f = 2\text{m}$, um subrefletor hiperboloide com uma excentricidade $e_x = 1.7$, um ângulo $\beta = 0^\circ$ e um ângulo $\alpha = 15^\circ$.

Resultados: Diâmetro do refletor principal $d = 3\text{m}$; diâmetro do subrefletor $d_s = 0.6\text{m}$; comprimento da antena $L = 2.2\text{m}$; ângulo de abertura do alimentador $\theta_e = 8.88^\circ$; distância *offset* do paraboloide $d_o = 2.5\text{m}$; distância de desobstrução $d_c = 0.2\text{m}$ e uma razão $f/D_p = 0.31$, sendo D_p o diâmetro do paraboloide primário.

Exemplo 6.14

Pretende-se projetar uma antena do tipo Gregorian que tenha um ganho de 48dBi à frequência de 10GHz, uma distância focal $f = 2\text{m}$, uma distância interfocal $I_f = 2\text{m}$, um subrefletor elipsoide com uma excentricidade $e_x = 0.6$, um ângulo $\beta = 10^\circ$ e um ângulo $\alpha = -15^\circ$.

Resultados: Diâmetro do refletor principal $d=3\text{m}$; diâmetro do subrefletor $d_s = 1\text{m}$; comprimento da antena $L = 2.7\text{m}$; ângulo de abertura do alimentador $\theta_e = 11.61^\circ$; distância *offset* do paraboloide $d_o = 1.7\text{m}$; distância de desobstrução $d_c = 0.2\text{m}$ e uma razão $f/D_p = 0.31$, sendo D_p o diâmetro do paraboloide primário.

6.12.5 Outros refletores

Para além dos refletores atrás estudados e que são de facto muito difundidos há outros tipos que merecem uma breve referência. Um tipo importante em aplicações satélite terra são os refletores com a superfície refletora formatada especificamente para darem origem a um diagrama de radiação que produza numa dada zona da terra uma pegada com a forma apropriada para a cobertura que se pretende obter. Estes refletores são designados por *shaped reflectors* e são projetados para produzirem um desejado *shaped beam*. O projeto destes sistemas é complexo e é realizado empregando técnicas de ótica geométrica.

Também se usam por vezes refletores com três refletores, um principal parabólico e dois subrefletores, como se ilustra na Figura 6.85.

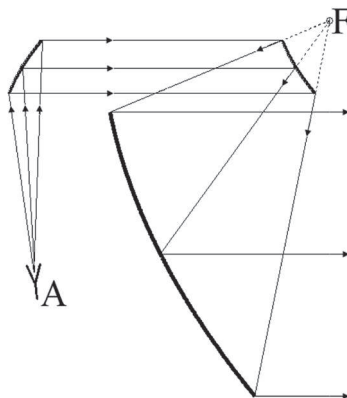


Figura 6.85. Antena de triplo refletor alimentada fora do eixo.

Há ainda dois tipos de refletores que merecem destaque, o refletor parabólico cilíndrico e o refletor esférico que se abordam de seguida.

6.12.5.1 Refletor parabólico cilíndrico

Os refletores parabólicos estudados previamente não são apropriados para certas aplicações tais como certos tipos de Radar nos quais se pretende um feixe com uma determinada forma. O refletor cilíndrico parabólico, representado na Figura 6.86, produz um feixe que é estreito num plano e largo no plano perpendicular, isto é, em forma de leque que é ideal para varrimentos azimutais quando a antena é rodada em azimute.

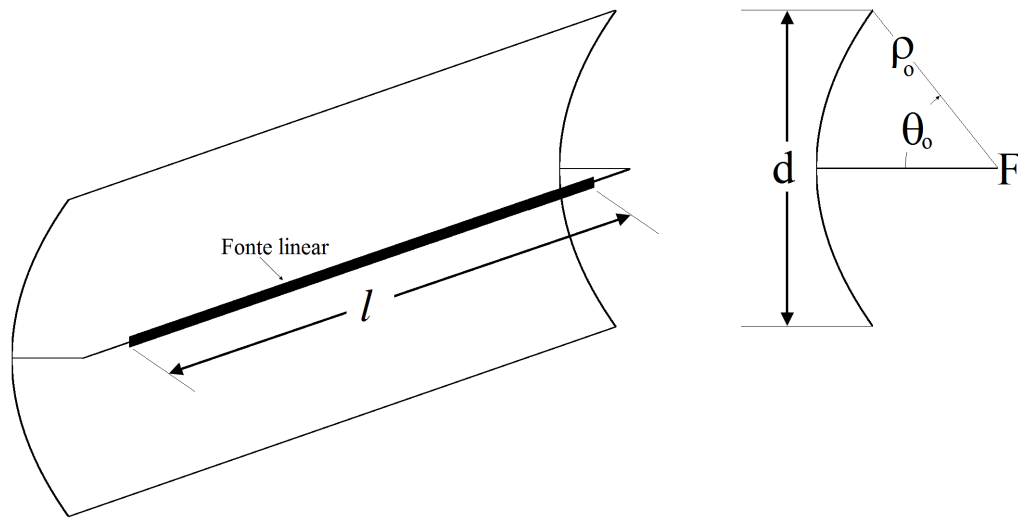


Figura 6.86. Refletor cilíndrico parabólico.

Como o refletor é curvado segundo um único plano, os raios incidentes são focados para uma linha focal em vez dum ponto focal. O refletor pode ser alimentado por uma fonte linear, por exemplo um guia de onda ranhurado, colocado ao longo da linha focal do refletor. Seja l o comprimento da fonte linear, θ_0 o ângulo de abertura do refletor e ρ_0 o raio máximo do paraboloide, tal como se mostra na Figura 6.86. A fonte produz uma onda cilíndrica que é convertida numa onda plana pelo refletor. Para que esta conversão seja feita eficientemente é necessário que se verifiquem as condições dadas por (6-305):

$$l \gg \lambda \quad \text{e} \quad \rho_0 < \frac{l^2}{\lambda} \quad (6-305)$$

Os raios emanados da fonte dão origem a uma distribuição de fase uniforme na abertura. O ganho máximo consegue-se iluminando uniformemente a abertura, já sabemos, no entanto, que isso dá origem a lóbulos secundários elevados o que não é conveniente. Neste caso, tal como nos refletores parabólicos, há uma abertura angular ótima para um dado alimentador o qual representa a melhor solução de compromisso entre uma distribuição de amplitude não uniforme na abertura (atenuada em direção aos extremos) e a energia perdida, ou seja, aquela que não é interceptada pelo refletor. Finalmente convém notar que sendo a abertura retangular é de variáveis separáveis. A distribuição na abertura pode-se, portanto, decompor em duas distribuições independentes, uma ao longo do lado maior e outra ao longo do lado menor as quais podem ser analisadas independentemente, assim como os respetivos diagramas de radiação.

6.12.5.2 Refletor esférico

Um refletor esférico é constituído por uma superfície que é uma calote esférica. Viu-se nas secções anteriores que um refletor parabólico é um colimador ideal, isto é, quando alimentado do foco ele produz raios paralelos ao seu eixo de simetria, ou seja, dá origem a uma onda plana paralela à sua abertura. Apesar de todas as suas vantagens e de ser por isso bastante utilizado, não é apropriado, como já vimos, para deslocar angularmente o feixe por ele produzido. Em contrapartida com um refletor esférico pode-se deslocar o feixe dentro dum intervalo angular apreciável devido à sua configuração geométrica perfeitamente simétrica. Contudo o refletor esférico tem

fracas propriedades de colimação, isto é, as ondas planas incidentes paralelamente ao seu eixo não convergem num único ponto. Todos os raios refletidos passam pelo segmento de reta FV, sendo V o vértice da calote esférica e F o foco paraxial que é um ponto do eixo cuja distância ao vértice é metade do raio da esfera. Pode-se, portanto, dizer que um refletor esférico não tem um foco, mas sim uma linha focal. Reciprocamente se uma fonte pontual for colocada num ponto desta linha focal, ela não produz ondas planas. A não coincidência desta frente de onda com uma onda plana é conhecida por aberração esférica e depende do diâmetro da esfera e da localização da fonte pontual. Apesar destas limitações um refletor esférico tem a capacidade de focar ondas planas incidentes sob vários ângulos, por deslocamento e orientação conveniente do seu alimentador ao longo da linha focal. Contudo, devem-se fazer correções de fase e amplitude de modo a obter o máximo rendimento da antena. Podem-se usar alimentadores lineares em vez de alimentadores pontuais. Os alimentadores lineares podem ser contínuos ou formados por um agregado de fontes discretas colocadas devidamente ao longo do eixo, em geral nas proximidades do foco paraxial. O número de alimentadores, a sua posição e a porção do refletor que eles iluminam, é função da distorção permitida na frente de onda e do tamanho e curvatura do refletor. Se o refletor é grande, são necessários alimentadores adicionais ao longo do eixo em direção ao vértice, para minimizar os erros de fase na abertura.

O refletor de Arecibo, em Porto Rico, era um bom exemplo dum sistema deste tipo. O refletor tinha 300 metros de diâmetro tendo a sua superfície sido moldada na terra. O deslocamento angular do feixe obtinha-se deslocando o alimentador que estava suspenso sobre a superfície. Este refletor foi desativado em Novembro de 2020.

6.12.5.3 Tolerância do acabamento superficial dos refletores

Para se obter os efeitos pretendidos com as antenas refletoras estudadas, as superfícies refletoras devem ser exatamente as que foram teoricamente previstas. Por exemplo, a superfície refletora duma antena parabólica deve ser um parabolóide exato. Como é óbvio, uma superfície perfeita nunca se consegue obter na prática sendo além disso muito caro produzir industrialmente uma superfície muito perfeita, por isso é importante saber qual o grau de precisão que pode ser tolerado sem que isso afete seriamente as características da antena. Se as irregularidades são aleatórias, aceita-se como regra que o erro médio quadrático esteja compreendido entre $1/32$ e $1/16$ comprimentos de onda. Assim, a frequência máxima a que a antena pode ser utilizada é determinada pela irregularidade da superfície refletora. A precisão da superfície refletora é mais difícil de manter num refletor móvel do que num refletor fixo. De facto, no caso de refletores móveis, as forças gravitacionais atuando em diferentes partes do refletor, variam com o ângulo de elevação. Deste modo, mesmo que a superfície refletora seja a pretendida para certos ângulos, haverá outros para os quais, devido a essas forças, a superfície reflora sofra deformações que a afastam da superfície pretendida. Este problema é grave nos refletores móveis de grandes dimensões e é o principal fator que limita o tamanho deste tipo de antenas.

Referências

- [1] C. A. Balanis, *Antenna Theory-Analysis and Design*, Harper & Row, Publishers, New York, 1982.
- [2] Warren L. Stutzman, Gary . A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [3] S. Silver, Ed, *Microwave Antenna Theory and Design*, MIT Radiation Laboratory Series, Vol. 12., McGraw-Hill, New York, 1949.
- [4] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [5] L. Eyraud, G. Grange, H. Ohanessian, *Théorie et Technique des Antennes*, Librairie Vuibert, Paris, 1973.
- [6] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, 1978.
- [7] J. D. Kraus, *Antennas*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1988.
- [8] H. Jasik, Ed., *Antenna Engineering Handbook*, McGraw-Hill, 1961, Sec. 3.3.
- [9] T. A. Milligan, *Modern Antenna Design*, McGraw-Hill.
- [10] Umran S. Inan, Aziz S. Inan, *Electromagnetic Waves*, Prentice Hall, 2000.
- [11] Per-Simon Kildal, *Foundation of Antennas-A Unified Approach*, Studentlitteratur, Lund, 2000.
- [12] José F. Rocha Pereira, *A new procedure for near-field measurements of microwave antennas without anechoic environments*, Tese de Doutorado (Ph. D.), Universidade de Sheffield, Inglaterra, Setembro de 1983.
- [13] Nhu Bui-Hai, *Antennes Micro-ondes Applications aux Faisceaux Hertziens*, Thomson-CSF et Masson, 1978.
- [14] W. H. Ferley, H. Zucker, *A Stationary Phase Method for the Computation of the Far Field of Open Cassegrain Antennas*, BSTJ, March 1970.
- [15] Michael J. Pagones, *Gain Factor of an Offset-Fed Paraboloidal Reflector*, IEEE Trans. Ant. & Prop. Vol. AP-16, No. 5, pp. 536-541, September 1968.
- [16] Terada, Marco Antonio Brasil, “*Reflector Antennas*”, in: Kai Chang (Org.) Wiley Encyclopedia of RF and Microwave Engineering, v. 5, p. 4450-4474, John Wiley and Sons, 2005.
- [17] Terada, Marco Antonio Brasil, “*Síntese de Antenas Gregorianas Duplas do Tipo Offset*”, Anais do TELEM096: XIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e VII Simpósio Brasileiro de Microondas, p. 111-116, Curitiba, 1996.

Exercícios

1- Considere uma abertura retangular de dimensões a e b , com distribuição uniforme.

- Escreva a expressão da amplitude normalizada do campo total radiado no plano $\theta = 45^\circ$.
- Mostre que essa expressão é idêntica à do campo radiado por uma distribuição unidimensional com distribuição trapezoidal.
- Determine essa distribuição trapezoidal.

2- Determine a eficiência de abertura, duma abertura circular de raio a situada no plano xy , considerado perfeitamente condutor, com a distribuição $\vec{E}_a(r') = \hat{a}_x E_a(r')$ sendo:

$$E_a(r') = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r'}{a} \right)^2 \right] & r' \leq a \\ 0 & r' > a \end{cases}$$

3- Considere uma abertura circular de $a = 2.5\lambda$ situada no plano xy , considerado perfeitamente condutor, com a distribuição $\vec{E}_a(r') = \hat{a}_x E_0 e^{-0.25\pi \left(\frac{r'}{\lambda} \right)^2}$.

- Determine o nível de intensidade de campo na periferia da abertura relativamente ao centro.
- Tendo em conta o resultado da alínea a) determine a expressão aproximada do campo radiado pela abertura a grande distância, sabendo que existe o seguinte par de transformadas de Fourier: $e^{-\pi r^2} \leftrightarrow e^{-\pi q^2}$. Justifique a aproximação usada.
- Calcule a LFMP no plano E e diga, justificando se a LFMP no plano H é menor ou maior.
- Determine a eficiência da abertura.

4- Determine a eficiência de abertura, duma abertura circular com 1m de diâmetro e com a distribuição: $E_a(r') = E_0 e^{-7r'^2}$ (V/m).

a) Determine as componentes do campo a grande distância radiado por uma abertura retangular de dimensões a e b situada no plano xz , considerado perfeitamente condutor. A distribuição na abertura é a seguinte:

$$\vec{E}_a(x', z') = \begin{cases} \hat{a}_x E_0 \left(\frac{2}{a} z' + 1 \right) & -\frac{a}{2} \leq z' \leq 0 \\ \hat{a}_x E_0 \left(-\frac{2}{a} z' + 1 \right) & 0 \leq z' \leq \frac{a}{2} \end{cases}$$

b) Determine a eficiência da abertura.

6- Considere uma corneta setorial aberta segundo o plano H alimentada por um guia de onda retangular com as seguintes dimensões internas: $a_1 = 0.5\lambda$ e $b_1 = 0.25\lambda$. A dimensão da face lateral, do vértice até à abertura, é de 10λ .

a) Determine as dimensões da abertura de modo que a máxima diferença de fase entre um ponto central e um ponto da extremidade seja de 120° .

- b) Calcule a diretividade da corneta e a eficiência da abertura.
- c) Calcule o ganho da antena supondo que o VSWR no guia de onda é 1.5.
- d) Calcule a distância a que se encontra o campo distante da antena.
- e) Determine as LFMP nos planos E e H.

7- Pretende-se fazer uma ligação de micro-ondas, para a faixa de 10 a 12GHz, entre dois pontos distanciados de 50m em linha de vista. O emissor fornece à antena 10dBm e o recetor deve receber pelo menos 1μW. Como antenas pretende-se usar duas cornetas piramidais ótimas iguais. Dimensione essas cornetas.

Nota: O guia de onda a utilizar para alimentar as cornetas é o guia WR-90 com as seguintes dimensões internas $a_1 = 22.86\text{mm}$ e $b_1 = 10.16\text{mm}$.

- 8- a) Deduza a expressão que dá a atenuação espacial própria dum paraboloide.
 b) Considere dois paraboloides com o mesmo diâmetro mas com f/d diferentes. Os alimentadores respetivos foram projetados para produzirem uma iluminação na periferia, relativamente à iluminação no centro, igual em ambos os casos. Qual dos dois paraboloides tem maior diretividade? Justifique.

9- Considere um refletor parabólico com 2m de diâmetro cuja distância entre o plano de abertura e o vértice é de 0.36m. Determine a razão f/d desta antena.

Sugestão: Use as seguintes relações trigonométricas:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \quad \cos 2\alpha = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}$$

10- Considere um refletor parabólico alimentado pela frente, com uma distância focal de 70cm.

- a) Estime onde se deve colocar o alimentador de forma a que a orientação do feixe se desloque 5°. Justifique a sua resposta.
- b) Determine a distribuição de fase ao longo da linha que une o foco à nova posição do alimentador.

11- Pretende-se alimentar pela frente, com uma corneta piramidal ótima, um paraboloide com uma razão $f/d = 0.716$ de modo que a iluminação na periferia seja cerca de 9dB abaixo da iluminação na zona central.

- a) Projete a corneta tendo como objetivo que ela tenha um diagrama de radiação na zona de interesse aproximadamente de revolução em torno do seu eixo. Considere que a frequência é de 11GHz e que a corneta é alimentada por um guia de onda retangular com as seguintes dimensões internas: $a_1 = 0.8382\lambda$ e $b_1 = 0.3725\lambda$.
- b) Calcule as LFMP nos planos E e H.
- c) Calcule a diretividade da corneta.
- d) Qual é o diâmetro mínimo dos paraboloides com este f/d que podem ser alimentados com esta corneta.

12- Considere um conjunto de refletores parabólicos de diferentes dimensões, mas todos com a mesma razão $f/d = 0.79$.

- a) Dimensione uma corneta cónica ótima de paredes lisas que possa alimentar qualquer um deles a 10GHz, produzindo uma intensidade de iluminação na periferia aproximadamente 11dB inferior à da zona central.
- b) Determine a área efetiva dessa corneta.
- c) Qual o diâmetro do mais pequeno desses refletores que ainda pode ser alimentado por esta corneta. Justifique.

13- Pretende-se projetar um sistema refletor para funcionar na banda de frequências de 10 a 12GHz com um ganho de 52.3dBi, constituído por um paraboloide com um $f/d = 0.69$ alimentado pela frente com uma corneta cónica de paredes lisas.

Considere que a eficiência devida às perdas nos condutores, à desadaptação etc. é de 75% e que a eficiência da abertura é a que se obtém se o alimentador for ideal dentro da categoria daqueles que têm o seguinte diagrama de radiação:

$$G_A(\theta) = \begin{cases} 2(n+1) \cos^n \theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

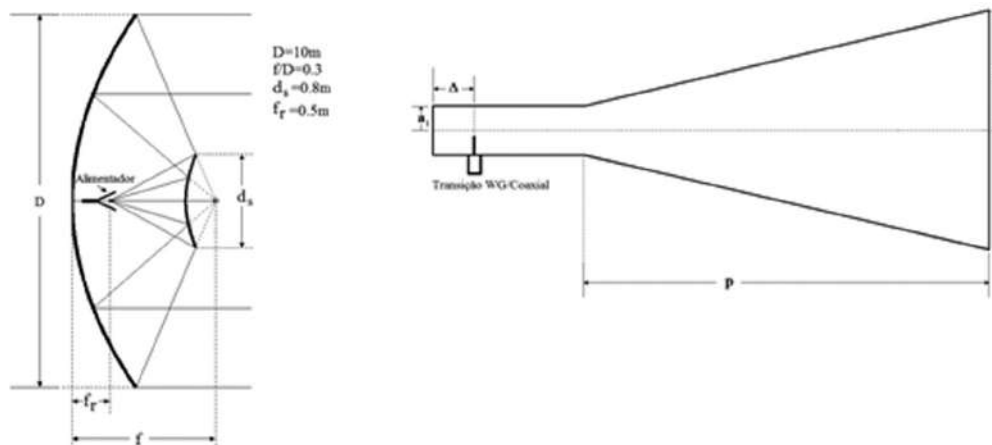
- Determine o diâmetro do paraboloide.
- Projete a corneta de modo que o seu diagrama se aproxime, tanto quanto possível, na zona de interesse do diagrama $G_A(\theta)$ ideal para este paraboloide.

Nota: Dimensione também as dimensões do guia de onda circular que alimenta a corneta.

- Considerando a corneta projetada na alínea b), determine a intensidade de iluminação na periferia do paraboloide relativamente ao centro, nos planos E e H.

14- Considere o sistema Cassegrain representado na figura seguinte, destinado a ser utilizado na faixa de 10 a 12GHz. Pretende-se usar como alimentador uma corneta cônica ótima de paredes lisas, como a que está ilustrada na figura, de modo que a iluminação na periferia do paraboloide seja cerca de 10dB abaixo da iluminação da zona central. Projete essa corneta determinando todas as dimensões assinaladas na figura, tendo em conta a atenuação espacial do sistema.

Sugestão: Use o conceito de paraboloide equivalente.



15- Uma equipa de técnicos pretende montar três antenas parabólicas cada uma delas constituída por um paraboloide e um alimentador do tipo corneta cônica de paredes lisas. Os paraboloides estão identificados com as seguintes características:

- P1: $f/d=0.7$; $d=2\text{m}$; Banda de frequências de funcionamento: 11-12 GHz
P2: $f/d=0.7$; $d=1\text{m}$ Banda de frequências de funcionamento: 20-21 GHz
P3: $f/d=0.4$; $d=1.5\text{m}$ Banda de frequências de funcionamento: 11-12 GHz

Os alimentadores não têm qualquer identificação, não sabendo os técnicos a qual paraboloide é que eles pertencem. A única coisa que se sabe são as suas medidas, que são as seguintes:

- A1: Diâmetro da abertura=25.5mm; Diâmetro do guia de onda=10mm
A2: Diâmetro da abertura=25mm; Diâmetro do guia de onda=19.5mm
A3: Diâmetro da abertura=46mm; Diâmetro do guia de onda=19.5mm

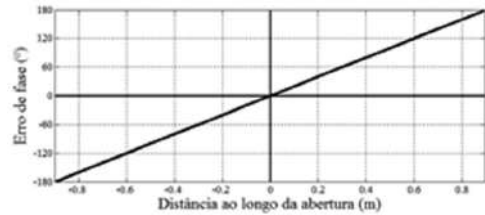
Diga, justificando, a que paraboloide corresponde cada alimentador.

16- Um RADAR para detetar velocidades de veículos, usa uma corneta piramidal ótima, para receber e transmitir. O emissor fornece à antena 50mW à frequência de 10GHz e o recetor consegue receber sinais com pelo menos -50dBm. Considera-se que os veículos têm uma área efetiva de radar mínima de 6m².

Dimensione a corneta de modo que o RADAR consiga ser utilizado até aos 50m.

17- a)- No caso dum paraboloide alimentado pela frente diga quais os efeitos que, uma má colocação do alimentador pode causar na distribuição de fase ao longo da abertura.

b)- A figura ao lado representa a distribuição de fase ao longo dum corte na abertura dum dado paraboloide, à frequência de 11GHz. O paraboloide tem um $f/d=0.4$ e um $d=1.8$ m. Deduza a expressão do erro de fase ao longo da abertura, que se aplica a este caso.

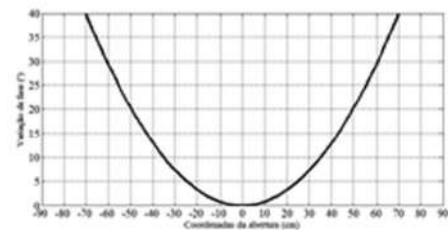


c) Que correção deve ser feita para que a distribuição de fase se torne uniforme?

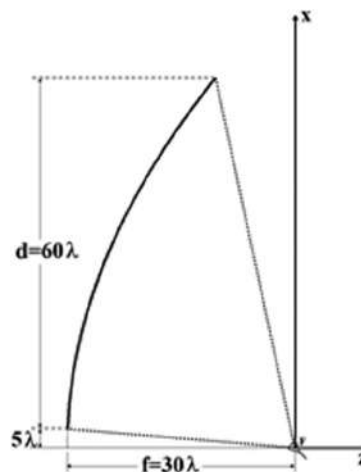
18- A distribuição de fase ao longo da abertura dum dado paraboloide, à frequência de 11GHz, está representada na figura ao lado. O paraboloide tem um $f/d=0.4$ e um diâmetro $d=1.8$ m.

a) Qual é a causa do aparecimento deste tipo de distribuição de fase?

b) Que correção deve ser feita para que a distribuição de fase se torne uniforme?



19- Considere a antena representada em corte na figura seguinte, destinada a funcionar às frequências de 10 a 12GHz. O alimentador é uma corneta cónica de paredes lisas posicionada de modo que o seu eixo aponte para o centro do refletor. A corneta dá origem a um campo elétrico radiado orientado segundo o eixo dos yy.



a) Diga que tipo de antena é esta.

b) Projete a corneta, incluindo o respetivo guia de onda, de modo que a iluminação na periferia do deflector seja pelo menos 13dB abaixo da iluminação no seu centro. O erro de fase ao longo da abertura da corneta não deve ultrapassar os 36°.

c) Considerando a corneta projetada na alínea b), faça uma estimativa da iluminação na periferia do refletor relativamente à iluminação no centro, nos planos E e H

20- Considere um paraboloide cuja atenuação espacial própria na periferia é de 3dB, destinado a funcionar às frequências de 10 a 12 GHz.

a) Supondo que se usava um alimentador com um ganho $G_f = \cos^n(\theta)$, determine o valor de n de modo que a atenuação total na periferia do paraboloide seja 13dB.

b) Projete uma corneta cônica de paredes lisas, incluindo o respetivo guia de onda, de modo que a iluminação na periferia do paraboloide seja pelo menos 13 dB abaixo da iluminação no centro. O erro de fase ao longo da abertura da corneta deve ser no máximo 36°.

c) Quais as atenuações totais na periferia do paraboloide, nos planos E e H, produzidas por esta corneta?

21- Considere um paraboloide com uma razão $f/d=0,6$, destinado a funcionar na banda de frequências de 18 a 26.5GHz. Pretende-se que o alimentador tenha um diagrama de radiação do tipo:

$$G_A(\theta) = \begin{cases} G_0 \cos^n \theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \theta > \pi/2 \end{cases}$$

a) Calcule a diretividade do paraboloide, à frequência central da banda de funcionamento, se o diâmetro for de 10λ a essa frequência.

b) Determine o nível da iluminação na periferia do paraboloide, relativamente à iluminação na zona central.

Capítulo 7

Antenas impressas

7.1 Introdução

A configuração básica duma antena impressa (*microstrip*) consiste num fragmento (*patch*) metálico, impresso num substrato com plano de massa. As dimensões do fragmento são uma fração apreciável do comprimento de onda sendo a sua espessura muito fina. A espessura h do substrato é em geral muito menor do que o comprimento de onda, $h \ll \lambda$. Esta configuração básica está ilustrada na Figura 7.1.

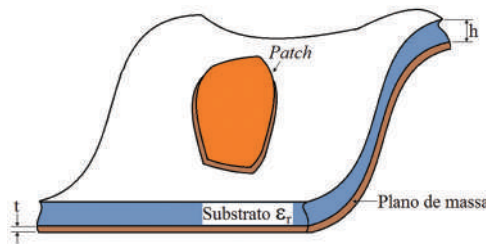
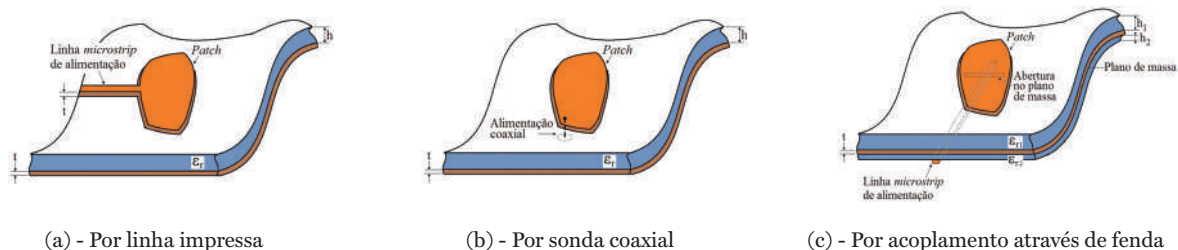


Figura 7.1 Configuração básica duma antena impressa.

Estas antenas pertencem ao grupo das antenas ressonantes e são por isso de banda estreita e de dimensões muito ligadas ao comprimento de onda sendo por isso impraticáveis para frequências abaixo da banda de UHF. Elas são sobretudo usadas tipicamente a frequências entre 1 e 100GHz.

O fragmento (*patch*) pode ser alimentado de vários modos, mas os mais comuns são os seguintes: uma linha impressa no mesmo plano do fragmento, uma sonda coaxial que vem do plano de massa sendo alimentada por um cabo coaxial e uma alimentação por acoplamento através duma fenda no plano de massa sendo a alimentação feita por uma linha impressa colocada noutro substrato que partilha o mesmo plano de massa. Estes modos estão ilustrados na Figura 7.2.



(a) - Por linha impressa

(b) - Por sonda coaxial

(c) - Por acoplamento através de fenda

Figura 7.2 Modos de alimentar uma antena impressa.

A alimentação com uma linha impressa no mesmo plano do fragmento não precisa de furos ou de soldaduras e como os elementos radiantes e as linhas de alimentação são feitas na mesma camada isso reduz os custos de fabrico sendo, portanto apropriado para a construção de agregados. A maior desvantagem deste método é a indesejável radiação proveniente das linhas que podem destruir a pureza da polarização e aumentar o nível dos lobos secundários.

A alimentação por sonda coaxial é normalmente usada quando o substrato é fino dando larguras de banda de apenas poucos por cento. Uma vantagem deste método é o de permitir o ajustamento da impedância de entrada da antena variando a localização da sonda. A principal desvantagem é a introdução duma indutância que pode ser significativa se $h > 0.1\lambda$.

No caso em que a alimentação é feita por uma linha impressa colocada num substrato inferior que partilha o mesmo plano de massa, o substrato superior pode ser grosso, até cerca de $\lambda/4$, e de baixa permitividade para aumentar a radiação. Este substrato pode até ser removido e o elemento radiante ser suspenso de alguma forma. Deste modo a largura de banda pode chegar aos 30%. Por sua vez o substrato inferior deve ter permitividade elevada para confinar ao máximo os campos à linha de alimentação. Outra vantagem desta configuração é que o plano de massa isola a radiação proveniente das linhas de alimentação. A maior desvantagem é a possível radiação, para a parte de baixo de toda a estrutura, causada pela abertura no plano de massa.

O fragmento radiante pode assumir qualquer forma, no entanto as formas canónicas mais comuns são a retangular e a circular pois são as mais simples de analisar e de projetar. A onda radiada por estas antenas tem normalmente polarização linear, mas também pode ter polarização circular dependendo da forma do elemento radiante e ou do modo como é alimentado. Por vezes sobrepõem-se duas ou mais *patches* de dimensões diferentes, umas em cima das outras, para se obter uma estrutura multibanda. É comum construir agregados de elementos para assim se obter maior diretividade [1],[2],[3],[4].

Para além das características das antenas impressas (*microstrip*) já mencionadas, há que salientar o seu baixo perfil, o peso reduzido e a fácil integração com circuitos integrados de micro-ondas. Usando substratos flexíveis pode-se construir antenas conformáveis a certas superfícies não planas. As aplicações principais destas antenas encontram-se na aviação (sistemas de radar, navegação e aterragem), em armamento (radar e telemetria), em veículos (comunicações e sensores vários) em vias de comunicação (pagamento de portagens) e outras, como sistemas biomédicos ou de alarmes.

Por causa de todas estas características tem havido tanta investigação e desenvolvimento nesta área que, o número de artigos sobre este assunto é tão grande que é impossível fornecer uma lista exaustiva. Nas referências indicadas no fim deste capítulo podem ser encontradas muitas outras.

7.2 Antena retangular

A forma mais comum do fragmento (*patch*) radiante é a retangular. Na Figura 7.3 está ilustrada essa antena alimentada por uma linha impressa.

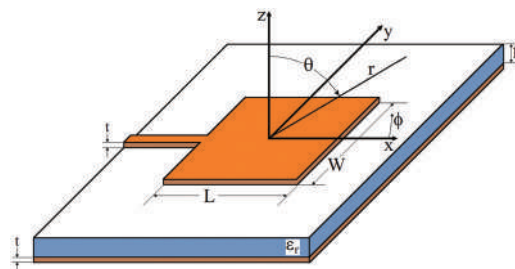


Figura 7.3 Antena (*patch*) retangular alimentada por uma linha impressa.

A antena retangular funciona normalmente perto da ressonância de modo a obter-se uma impedância de entrada real. As linhas de força do campo elétrico são perpendiculares aos condutores devido às condições fronteira, tal como acontece num condensador. No entanto ocorrem efeitos de transbordo nas bordas do retângulo dando origem a linhas de força que passam para o espaço superior da antena e que são os causadores da radiação. Na Figura 7.4 estão ilustradas as linhas de força do campo elétrico na estrutura. Nas condições de ressonância, devido aos efeitos de transbordo nas bordas que são tanto mais acentuados quanto mais alto for o substrato, o comprimento L da antena deve ser ligeiramente inferior a $\frac{\lambda_d}{2}$ sendo λ_d o comprimento de onda no dielétrico. Tipicamente $L \approx 0.49\lambda_d$.

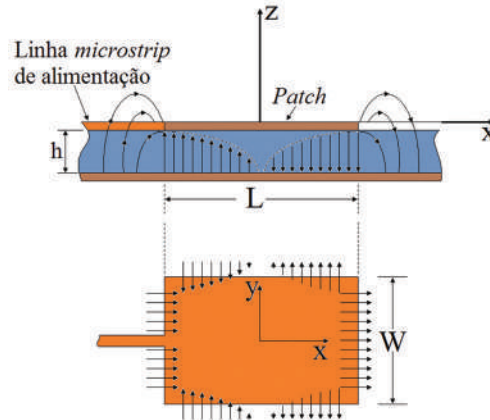


Figura 7.4 Linhas de força do campo elétrico numa antena (*patch*) retangular.

Como a antena está terminada em circuito aberto, gera-se uma onda estacionária e como o comprimento L é aproximadamente igual a $\frac{\lambda_d}{2}$, os campos elétricos entre a antena e o plano de massa estão em oposição de fase no lado esquerdo (para $x = -L/2$) e no lado direito (para $x = L/2$), tal como se pode ver na figura.

No entanto, vistos de cima, as componentes segundo x dos campos transbordados estão em fase e têm amplitude uniforme como se pode ver na parte inferior da figura. Em contrapartida, nas bordas superior e inferior, os campos transbordados têm uma simetria ímpar. Desta configuração de campos pode-se concluir que a radiação produzida pelos lados esquerdo e direito se reforçam na direção do eixo do z , enquanto que a radiação produzida pelos lados superior e inferior se cancelam na direção do eixo do z .

Tendo em conta estas conclusões pode-se sugerir, para efeitos de radiação da antena, um modelo constituído por duas aberturas retangulares num plano condutor com distribuição uniforme e em fase, tal como se ilustra na Figura 7.5. Estas aberturas têm um comprimento W e uma largura aproximadamente igual à altura do substrato.

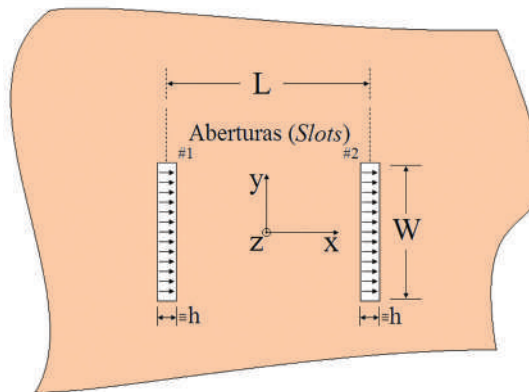


Figura 7.5 Modelo de radiação duma antena (*patch*) retangular.

7.2.1 Campo radiado pelo modelo de radiação duma antena retangular

O modelo ilustrado na Figura 7.5 é um agregado de dois elementos alinhado segundo o eixo dos xx. Os elementos estão em fase e separados de L. Cada elemento é uma abertura de comprimento W e largura h, situada num plano condutor. O campo radiado por este agregado é o produto do fator de elemento FE pelo fator de agregado FA. Como já vimos no capítulo 4, o FA é dado pela expressão (7-1).

$$FA = 2 \cos\left(\frac{kL \sin\theta \cos\phi}{2}\right) \quad (7-1)$$

O FE é uma abertura plana situada no plano xy, onde há uma distribuição uniforme de campo eletromagnético apenas com componente segundo o eixo dos xx, descrito pela expressão (7-2).

$$\vec{E}_a = \hat{x}E_a(x', y') \quad \text{sendo } E_a(x', y') = E_0 \quad \text{com } E_0 \text{ constante.} \quad (7-2)$$

As componentes do campo elétrico radiado a grande distância por esta abertura são dadas pelas expressões (7-3).

$$E_\theta = j2k \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 Wh \frac{\sin(\pi \frac{h}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{h}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \frac{\sin(\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi} \quad (7-3)$$

$$E_\phi = -j2k \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 Wh \frac{\sin(\pi \frac{h}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{h}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \frac{\sin(\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi}$$

No entanto, considerando $h \ll \lambda$, o fator $\frac{\sin(\pi \frac{h}{\lambda} \sin\theta \cos\phi)}{\pi \frac{h}{\lambda} \sin\theta \cos\phi} \cong 1$.

Introduzindo o FA, podemos considerar então que as componentes do campo elétrico radiado pelo agregado são dadas aproximadamente pelas expressões (7-4)

$$E_\theta = j2k \cos\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 Wh \frac{\sin(\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi} 2 \cos\left(\frac{kL \sin\theta \cos\phi}{2}\right) \quad (7-4)$$

$$E_\phi = -j2k \cos\theta \sin\phi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_0 Wh \frac{\sin(\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi} 2 \cos\left(\frac{kL \sin\theta \cos\phi}{2}\right)$$

Sendo a amplitude do campo total dada por (7-5):

$$|E| = \left| \sqrt{(\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi)} \frac{2}{\lambda r} E_0 Wh \frac{\sin(\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi} \cos\left(\frac{\pi L \sin\theta \cos\phi}{\lambda}\right) \right| \quad (7-5)$$

7.2.2 Resistência de entrada e diretividade duma antena retangular

A antena radia apenas para o hemisfério superior pelo que a potência radiada se calcula integrando sobre uma meia esfera a densidade de potência dada por $W_r = \frac{1}{2\eta} |E|^2$ em que E é dado por (7-5). A potência radiada é, portanto, dada por (7-6).

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} W_r r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\eta} |E|^2 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (7-6)$$

Substituindo nesta expressão (7-5), obtém-se (7-7) em que I é dado por (7-8).

$$P_{\text{rad}} = \left(\frac{2E_0 W h}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{2\eta} I \quad (7-7)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi) \left(\frac{\sin(\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi)}{\pi \frac{W}{\lambda} \sin\theta \sin\phi} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi L \sin\theta \cos\phi}{\lambda}\right) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (7-8)$$

A partir da potência radiada pode-se obter a diretividade dada por (7-9).

$$D = \frac{4\pi U_{\text{max}}}{P_{\text{rad}}} = \frac{4\pi}{I} \quad (7-9)$$

Tendo em conta que $P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \frac{V_{\text{in}}^2}{R_{\text{in}}}$ em que R_{in} é a resistência de entrada da antena e $V_{\text{in}} = E_0 h$ é a sua tensão de alimentação, então a resistência de entrada da antena é dada por (7-10).

$$R_{\text{in}} = \frac{V_{\text{in}}^2}{2P_{\text{rad}}} = \frac{(E_0 h)^2}{2P_{\text{rad}}} \quad (7-10)$$

7.2.3 Determinação da impedância de entrada usando o modelo da linha de transmissão

A impedância de entrada duma antena (*patch*) retangular pode ser determinada duma forma aproximada recorrendo ao modelo simples duma linha de transmissão. Neste modelo a antena retangular é modelada por um troço de linha impressa de largura W e comprimento L, terminada em circuito aberto, tal como se ilustra na Figura 7.6.

Estando a linha terminada em circuito aberto, mas com alguma radiação pode-se assumir que a linha está terminada numa admitância de radiação capacitiva de baixo valor (impedância capacitiva elevada). Designemos esta admitância por $Y = G + jB$.

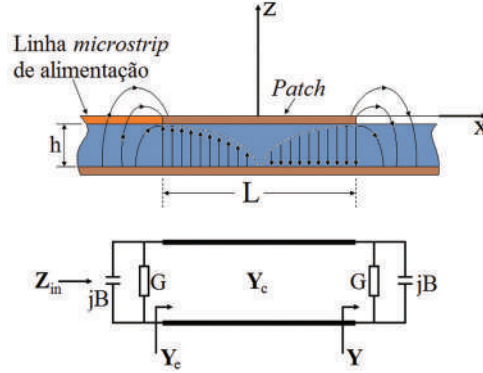


Figura 7.6 Modelo linha de transmissão duma antena (patch) retangular alimentada por uma linha impressa.

De acordo com [5] a susceptância B é a de um condensador de capacidade dada por (7-11),

$$C = \frac{\Delta l}{vZ_c} \quad (7-11)$$

em que $v = \lambda_d f$ é a velocidade de propagação no substrato, Z_c é a impedância caraterística na linha impressa de largura W e Δl é calculado por (7-12).

$$\frac{\Delta l}{h} = 0.412 \frac{\epsilon_{\text{eff}} + 0.3}{\epsilon_{\text{eff}} - 0.258} \frac{W/h + 0.262}{W/h + 0.813} \quad (7-12)$$

em que ϵ_{eff} é a permutividade efetiva do substrato que é dada pela expressão (7-13)[6]:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 12\left(\frac{h}{W}\right)}} \quad (7-13)$$

A impedância caraterística na linha impressa de largura W é dada por (7-14)[6]:

$$Z_c = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}} \left(\frac{W}{h} + 1.393 + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{W}{h} + 1.444 \right) \right)}} \quad (7-14)$$

Como a susceptância é $B = \omega C$ então, usando (7-11), B é dada por (7-15).

$$B = \beta_d \Delta l Y_c \quad (7-15)$$

A admitância $Y = G + jB$ é capacitiva e muito baixa pois corresponde quase a um circuito aberto. Se avançarmos em direção ao gerador uma distância L menor que $\lambda_d/2$ poderemos obter uma admitância Y_c que é o conjugado de Y ou seja, $Y_c = G - jB$, como se mostra na carta de Smith da Figura 7.7.

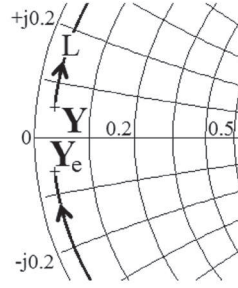


Figura 7.7 Obtenção da admitância Y_e a partir de Y .

Quando se consegue esta situação a admitância de entrada da antena é $Y_{in} = Y + Y_e = G + jB + G - jB = 2G$ que é puramente resistiva. Nesta situação a antena está, portanto, em ressonância. De acordo com [3] o comprimento L que produz a ressonância é dado por (7-16).

$$L_r = \frac{\lambda_d}{2} - 2\Delta l \quad (7-16)$$

Para qualquer frequência a admitância Y_e é calculada através da expressão (7-17) que é a expressão da admitância de entrada numa linha sem perdas de comprimento L [6].

$$Y_e = Y_c \frac{Y + jY_c \tan(\beta_d L)}{Y_c + jY \tan(\beta_d L)} \quad (7-17)$$

Vimos atrás que em ressonância a admitância de entrada da antena é $Y_{in} = 2G$. Por outro lado, vimos que resistência de entrada da antena é dada por (7-10). Podemos então calcular a condutância G usando (7-18).

$$G = \frac{1}{2} Y_{in} = \frac{1}{2R_{in}} \quad (7-18)$$

No caso da antena ser alimentada por uma sonda num ponto genérico (x_f, y_f) , tal como se ilustra na Figura 7.8, ainda se pode usar o modelo de linha de transmissão.

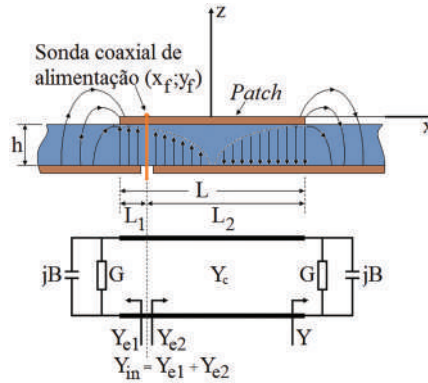


Figura 7.8 Modelo linha de transmissão numa antena (*patch*) retangular alimentada por uma sonda coaxial na posição (x_f, y_f) .

Considerando $x_f = W/2$ e tendo como referência a Figura 7.8, a impedância de entrada é dada pela soma da admitância de entrada numa linha de comprimento L_1 com a admitância de entrada numa linha de comprimento L_2 , isto é, $Y_{in} = Y_{e1} + Y_{e2}$, sendo Y_{e1} dada por (7-19) e Y_{e2} dada por (7-20).

$$Y_{e1} = Y_c \frac{Y + jY_c \operatorname{tg}(\beta_d L_1)}{Y_c + jY \operatorname{tg}(\beta_d L_1)} \quad (7-19)$$

e

$$Y_{e2} = Y_c \frac{Y + jY_c \operatorname{tg}(\beta_d L_2)}{Y_c + jY \operatorname{tg}(\beta_d L_2)} \quad (7-20)$$

Designando por R_{in0} a resistência de ressonância quando a antena é alimentada na borda, isto é, quando $L_1 = 0$, verifica-se que à medida que a sonda se desloca mais para dentro a resistência de ressonância baixa, seguindo aproximadamente a relação (7-21), dada por [4].

$$R_{in} = R_{in0} \cos^2\left(\frac{\pi L_1}{L}\right) \quad (7-21)$$

Esta técnica pode ser usada para adaptar uma antena destas a uma dada linha de alimentação. Na Figura 7.9 está representada a variação da resistência de entrada em ressonância em função da posição da sonda, isto é, em função de L_1 , usando valores calculados por (7-19) e (7-20) e valores dados por (7-21).

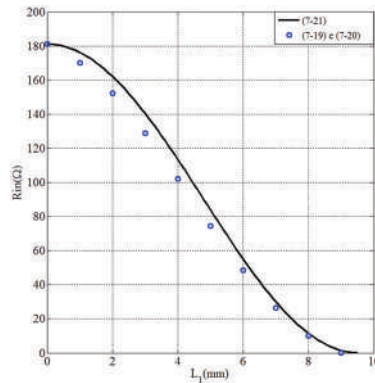


Figura 7.9 Resistência de entrada duma antena (*patch*) retangular alimentada em função da posição da sonda de alimentação. – Expressão (7-21). ° Valores obtidos de (7-19) e (7-20).

7.2.4 Projeto simples duma antena retangular usando o modelo da linha de transmissão

O autor desenvolveu um programa em Matlab que permite fazer um projeto simples duma antena (*patch*) retangular baseado no modelo de linha de transmissão atrás descrito.

Os dados de entrada são:

A frequência de operação em GHz.

A largura W (comprimento das *slots*), em mm;

A altura h do substrato em mm.

A permissividade relativa do substrato, ϵ_r .

A impedância característica de referência Z_0 .

Os resultados são:

O comprimento L (Distância entre as *slots*), em mm, calculado por (7-16).

Os diagramas de radiação nos planos principais das componentes E_θ e E_ϕ dadas por (7-4).

A resistência de entrada que é calculada pela expressão (7-10) a partir da potência radiada.

A diretividade calculada por (7-9).

O gráfico do VSWR, em função da frequência tendo como referência Z_0 .

O gráfico da impedância de entrada, em função da frequência, na carta de Smith, tendo como referência Z_0 .

Exemplo 7.1

Pretende-se dimensionar uma antena (*patch*) retangular para a frequência de 5GHz colocada sobre um substrato com uma altura $h = 1.58\text{mm}$ e uma permissividade, $\epsilon_r = 2.22$. Para a largura W (comprimento das *slots*) aconselha-se um valor entre 0.3 e 1 comprimentos de onda. Neste caso entre 18 e 60mm. Escolheu-se $W = 30\text{mm}$. A impedância característica de referência selecionada foi $Z_0 = 50\Omega$.

Os resultados são os seguintes:

O comprimento L (Distância entre as *slots*) $L = 19.1\text{mm}$.

Resistência de entrada $Z_{in} = 181\Omega$.

Diretividade $Dir = 7.81\text{dBi}$.

7.3 Métodos de análise de antenas impressas

Os métodos mais correntes de análise de antenas impressas podem-se dividir em duas categorias: os simplificados ou reduzidos e os completos ou *full-wave*. Os modelos reduzidos introduzem aproximações razoáveis que permitem simplificar o problema. Os completos ou *full-wave* mantêm rigor e precisão à custa duma certa complexidade computacional.

Um dos métodos simplificados é o modelo da linha de transmissão que foi usado atrás na análise duma antena (*patch*) retangular. A principal desvantagem deste método é o de apenas poder ser aplicado a antenas impressas de forma retangular.

Outro modelo simplificado muito usado e mais versátil, pois em princípio pode ser usado com *patches* de qualquer geometria, é o modelo de cavidade. Neste modelo, a antena é modelada como uma cavidade formada por condutores elétricos perfeitos (superfície superior e respetiva projeção no plano de massa) e paredes laterais (ao longo da periferia da geometria da antena), consideradas magnéticas perfeitas. Os campos no interior da cavidade são obtidos pela sobreposição dos modos próprios da superfície ressonante que constitui o condutor superior da antena. Não se consideram, portanto, variações ao longo da direção perpendicular ao plano de massa, que por isso só é utilizável em estruturas onde o substrato é muito fino quando comparado com as dimensões da *patch*. Isso constitui a principal limitação deste modelo. A radiação é contabilizada através do aumento fictício da tangente de perdas do dielétrico do substrato. Este modelo está bem explicado em [4].

Os modelos completos ou *full-wave* têm em consideração o substrato dum modo rigoroso e impõem condições fronteira apropriadas na interface ar-dielétrico, usando a função de Green exata permitindo que no modelo sejam incluídos a radiação no espaço em redor, os modos das ondas de superfície, as perdas no dielétrico e o acoplamento entre elementos. A utilização da função de Green conjuntamente com o método dos momentos, resulta num modelo preciso e extremamente versátil, embora com um custo computacional significativo, mas que hoje em dia é cada vez menos relevante. Estes modelos possuem essencialmente as seguintes características:

- Precisão: As técnicas *full-wave* geralmente proporcionam resultados mais precisos para a impedância de entrada e o acoplamento;
- Perfeição: As soluções *full-wave* incluem os efeitos das ondas de superfície, radiação e acoplamento externo;
- Versatilidade: As soluções *full-wave* podem ser implementadas para qualquer tipo de elemento impresso e agregados, vários tipos de alimentação, geometrias multicamada e para substratos anisotrópicos;
- Complexidade computacional: As técnicas *full-wave* são numericamente intensivas e requerem, portanto, programação meticulosa para serem computacionalmente eficientes.

Foram desenvolvidos diversos CAD baseados nestas técnicas *full-wave*. Um deles foi o ENSEMBLE cujo núcleo é baseado na formulação da equação potencial integral em conjunto com o método dos momentos. Este software foi desenvolvido no início dos anos 90 pela empresa Boulder Microwave Technologies e comercializado por ela até 1997 sendo depois adquirido pela ANSOFT. Em 2008 a ANSOFT foi comprada pela ANSYS passando a integrar o pacote HFSS. Atualmente este software é designado ANSYS HFSS¹.

Outro CAD muito divulgado é o CST MICROWAVE STUDIO, baseado em técnicas de integração finitas em conjunto com o método de momentos, podendo apresentar análises no domínio dos tempos ou no domínio da frequência².

Outro exemplo de CAD muito usado é o EMPIRE XPU³ desenvolvido pelo instituto alemão IMST GmbH. Este CAD é baseado no método FDTD (*Finite Difference Time Domain*).

Com o fim de se obter algumas comparações, o Exemplo 7.1 foi analisado pelos modelos simples das secções 7.2.1 a 7.2.3 e simulado com o ENSEMBLE. Os respetivos resultados estão ilustrados nas figuras seguintes.

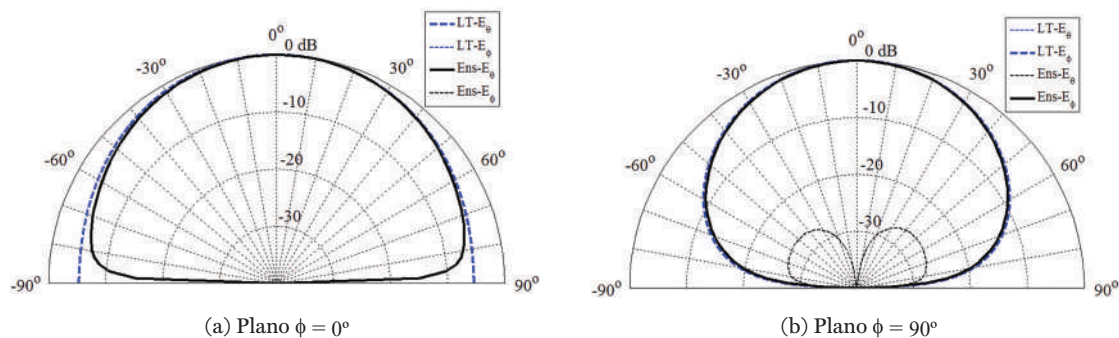


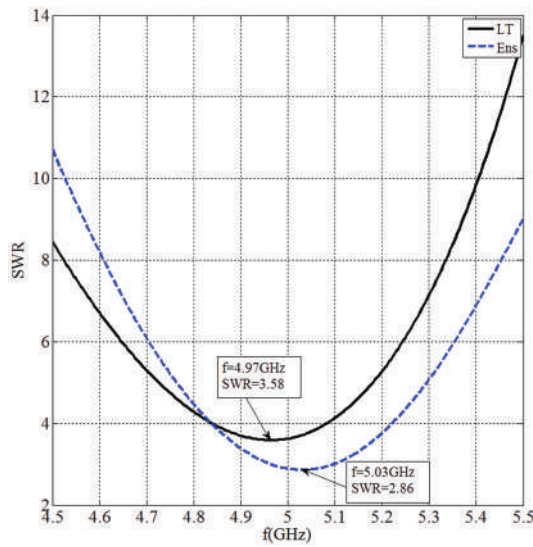
Figura 7.10 Diagramas de radiação do Exemplo 7.1.

Apesar da simplicidade do modelo da secção 7.2.1 o diagrama de radiação previsto coincide bastante bem com o dado pelo ENSEMBLE. A maior discrepância diz respeito à componente contrapolar no plano $\phi = 90^\circ$ que o modelo simples não prevê, sendo, no entanto, a dada pelo ENSEMBLE bastante baixa.

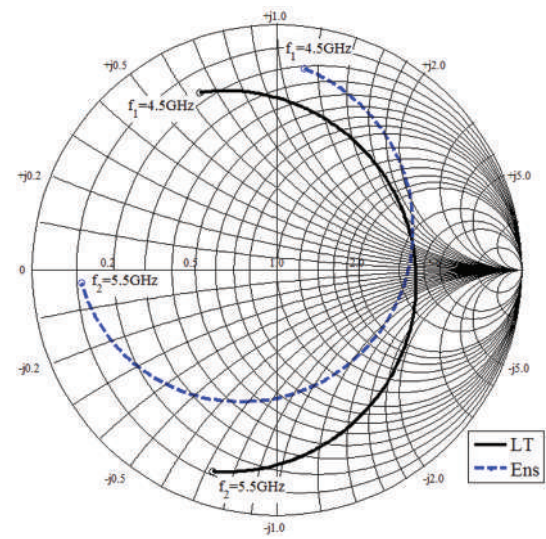
¹ <http://www.ansys.com/Products/Electronics/ANSYS-HFSS>

² <https://www.cst.com/Products/CSTMWS>

³ <http://www.empire.de>



(a) - VSWR



(b) - Impedância de entrada

Figura 7.11 VSWR e impedância de entrada do Exemplo 7.1.

A variação da impedância de entrada com a frequência prevista pelo modelo da linha de transmissão da secção 7.2.2 não coincide exatamente com a dada pelo ENSEMBLE como se pode ver pela Figura 7.11(b), no entanto o andamento geral é o mesmo aparentado ser essencialmente uma diferença no plano de referência. Tendo em conta a simplicidade do modelo da linha de transmissão a comparação entre os dois resultados é aceitável.

Como se pode ver pela Figura 7.11(a), as frequências para as quais a antena está mais bem adaptada também não coincidem exatamente mas estão próximas. Analisando a Figura 7.11(b) pode ver-se que a frequência à qual a antena está em ressonância, não coincide nos dois resultados, embora seja próxima. O modelo de linha de transmissão prevê uma frequência de ressonância de 5GHz, para a qual a resistência de entrada é $R_{in} = 181\Omega$ e o ENSEMBLE dá uma frequência de ressonância de 4.91GHz, para a qual a resistência de entrada é $R_{in} = 166\Omega$. Finalmente a diretividade determinada pelo método da secção 7.2.2 é de 7.8dBi enquanto a dada pelo ENSEMBLE é de 8.7dBi, isto é, cerca de mais 1dB.

Uma comparação global destes resultados mostra de facto algumas diferenças, no entanto, atendendo à simplicidade dos modelos das secções 7.2.1 a 7.2.3 comparada com a complexidade inerente às técnicas *full-wave* usadas no ENSEMBLE, as discrepâncias são aceitáveis podendo-se concluir que para uma primeira análise estes modelos simplificados podem ser usados.

7.4 Antena circular

Como já se disse na introdução, o fragmento (*patch*) radiante pode assumir qualquer geometria. Para além da forma retangular analisada anteriormente, é bastante comum que o fragmento radiante assuma a forma um disco circular de diâmetro d . De acordo com Dubost [7] esta antena (*patch*) tem como condição de ressonância a expressão (7-22):

$$d + \Delta d = 1.17 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \quad (7-22)$$

com $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}}$ e Δd dado por (7-23):

$$\frac{\Delta d}{h} = 0.8 \frac{\epsilon_{\text{eff}} + 0.3}{\epsilon_{\text{eff}} - 0.258} \frac{d/h + 0.3}{d/h + 0.8} \quad (7-23)$$

em que ϵ_{eff} é a permissividade efetiva do substrato dada pela expressão (7-24).

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 12\left(\frac{h}{d}\right)}} \quad (7-24)$$

Com base em algumas simulações efetuadas pelo autor, obtém-se melhores resultados se a constante da expressão (7-22) for 1.12 em vez de 1.17. De qualquer modo, esta simples expressão dá um valor de d que é um bom ponto de partida para o dimensionamento duma antena (*patch*) circular. Este valor inicial pode ser depois corrigido por simulações mais rigorosas e/ou com resultados experimentais.

Exemplo 7.2

Dimensione uma antena circular, colocada num substrato com uma altura $h = 1.58\text{mm}$ e uma permissividade $\epsilon_r = 2.22$, de modo a ser ressonante à frequência de 5GHz.

Usando primeiro a expressão (7-22) com a constante igual a 1.12, obteve-se uma primeira estimativa em que o diâmetro $d = 21.5\text{mm}$, dava origem à frequência de ressonância de $f = 5.064\text{GHz}$. Ajustando com o ENSEMBLE obtém-se a ressonância à frequência pretendida de 5GHz aumentando ligeiramente o diâmetro para $d = 21.7\text{mm}$.

Para efeitos comparativos, simulou-se também com o ENSEMBLE uma antena quadrada de lado $L = 21.7\text{mm}$. Estas duas antenas estão ilustradas na Figura 7.13(a) e (b).

Na Figura 7.12 está representada a variação da impedância normalizada, em função da frequência para ambas as antenas.

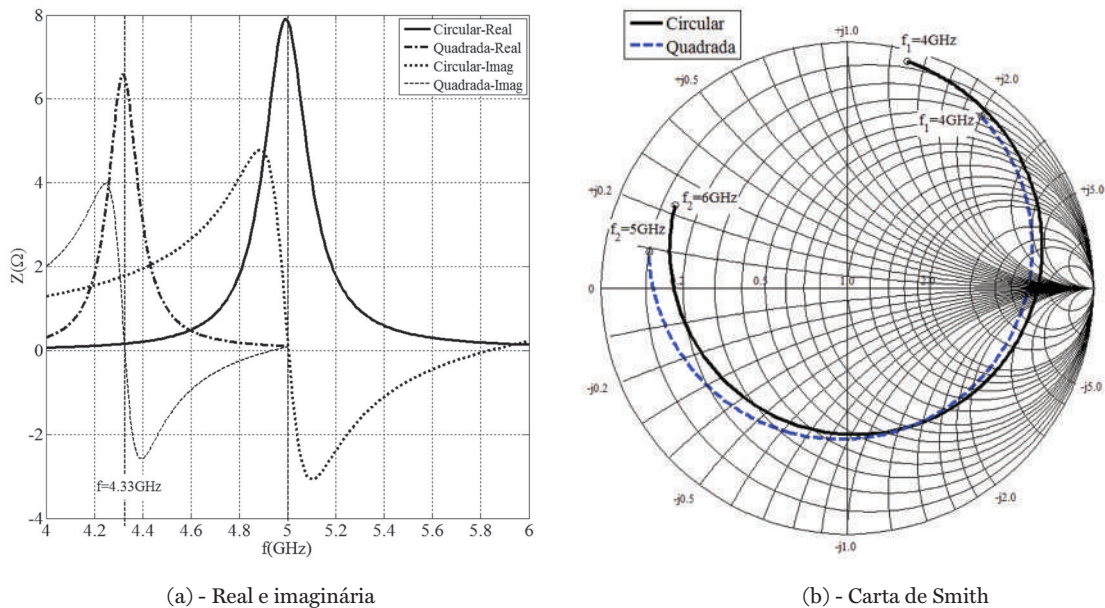


Figura 7.12 Variação da impedância normalizada, em função da frequência para ambas as antenas.

Como se pode ver da Figura 7.12(a) a antena circular é ressonante para 5GHz, mas a antena quadrada é ressonante para 4.33GHz. A forma geral da variação das respectivas impedâncias normalizadas, em função da frequência, é semelhante para ambas as antenas como se pode ver pela Figura 7.12(b).

Na Figura 7.13 estão representados os diagramas de radiação nos planos principais destas duas antenas. É claro desta figura que os diagramas são bastante semelhantes.

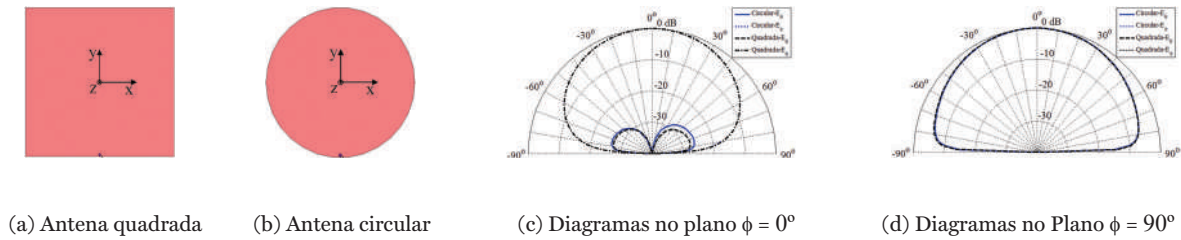


Figura 7.13

7.5 Métodos de adaptar a impedância de entrada

A impedância de entrada duma antena *patch* alimentada na borda é elevada. Em geral é conveniente adaptar esta impedância à alimentação. Para uma antena isolada, alimentada por uma sonda, um método possível é deslocar a sonda mais para dentro da antena já que, como se mostra na Figura 7.9, à medida que a sonda se desloca mais para dentro a resistência de ressonância baixa.

Consideremos por exemplo a antena quadrada ilustrada na Figura 7.13(a) que é ressonante para 4.33GHz. A esta frequência a impedância de entrada, quando a *patch* é alimentada na borda é $R_{in} \cong 330\Omega$. Deslocando a sonda 7.1mm para dentro, obtém-se uma resistência $R_{in} \cong 50\Omega$ e um $S_{11} \cong -47dB$ à frequência de 4.39GHz, isto é, ligeiramente superior à anterior frequência de ressonância.

Como em ressonância a impedância é praticamente real, quando a antena é alimentada por linha impressa, uma maneira de se conseguir a adaptação é recorrer a um transformador de $\lambda/4$.

Consideremos novamente a antena quadrada ilustrada na Figura 7.13(a). A esta frequência a impedância de entrada é $R_{in} \cong 330\Omega$. Para adaptar esta resistência a uma linha de 50Ω a impedância característica do transformador deve ser $Z_a \cong 128\Omega$ e neste substrato o seu comprimento deve ser de 13.1mm e a largura da linha de 0.76mm.

Na Figura 7.14(a) está ilustrada a antena *patch* da Figura 7.13(a) alimentada através um transformador de $\lambda/4$. Na Figura 7.14(b) está representada a variação do parâmetro S_{11} , em função da frequência para a antena com e sem adaptação e na Figura 7.14(c) está representada a variação das correspondentes impedâncias normalizadas a 50Ω . A nova frequência de ressonância é 4.4GHz, isto é, ligeiramente superior à anterior frequência de ressonância.

É importante notar que, sem adaptação, o melhor S_{11} ocorre para uma frequência diferente da frequência de ressonância enquanto que, com adaptação, o melhor S_{11} é bastante mais baixo e ocorre para a frequência de ressonância.

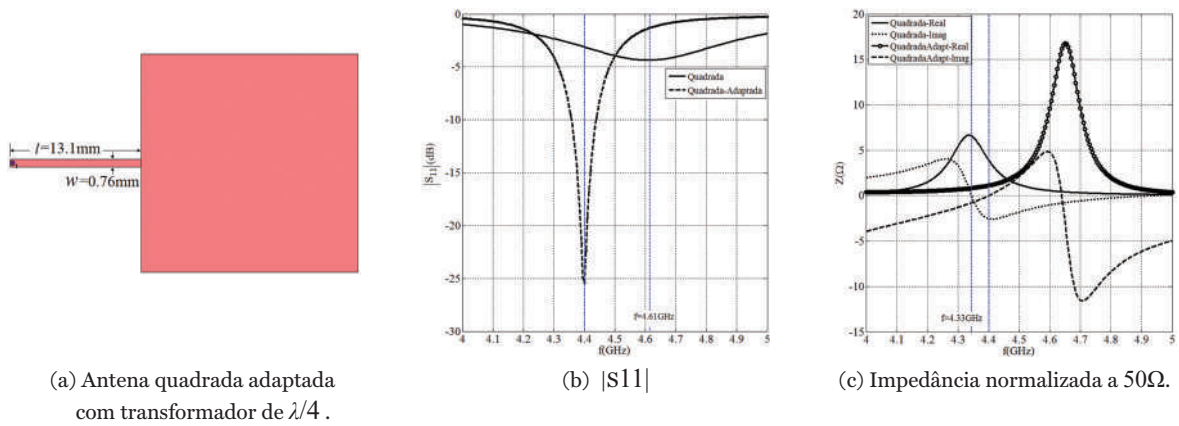


Figura 7.14

7.6 Técnicas para aumentar a largura de banda

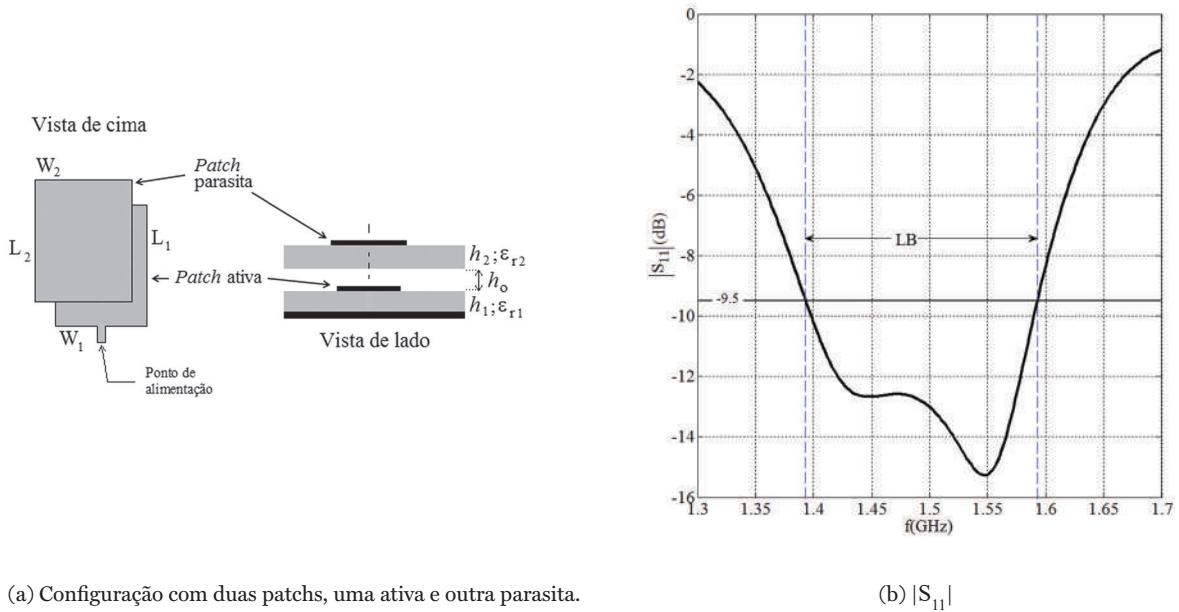
Vimos atrás que se a antena quadrada ilustrada na Figura 7.13(a) for alimentada com uma sonda inserida 7.1mm para dentro, se consegue uma boa adaptação. Contudo a largura de banda é de apenas aproximadamente 2.5%. A estreita largura de banda é uma das mais sérias limitações na implementação deste tipo de antenas. Assim, um dos principais objetivos a atingir é o aumento da largura de banda recorrendo a diversas técnicas, pois existe uma variedade de parâmetros que condicionam o desempenho da antena *microstrip*, nomeadamente a forma da *patch*, as suas dimensões, a altura e a permitividade dielétrica relativa do substrato, o modo de alimentação e o seu ponto de alimentação.

A gama de operação de uma antena *microstrip* num substrato relativamente fino, na ordem de $0.01\lambda_0$ a $0.02\lambda_0$, é geralmente limitada pela sua estreita largura de banda. Estudos já efetuados neste campo, revelam que a largura de banda aumenta proporcionalmente com a altura do substrato, tornando-se ainda mais evidente para ϵ_r relativamente baixos. Resulta daqui que uma técnica possível para aumentar a largura de banda é usar substratos mais altos. Por exemplo, se simularmos uma antena semelhante à na ilustrada na Figura 7.13(a) mas com um substrato com o dobro da altura, isto é, $h=3.175\text{mm}$ obtém-se uma largura de banda de aproximadamente 5.5% que é um pouco mais do dobro da anterior. Importa salientar que a utilização de substratos relativamente altos com ϵ_r elevados provoca uma excitação de correntes de superfície elevada que conduz a uma eficiência de radiação mais baixa, degradando o diagrama de radiação e consequentemente o ganho.

Outra técnica para aumentar a largura de banda consiste em usar duas *patches*, uma ativa montada sobre um dielétrico e outra parasita, existindo entre elas um dielétrico multicamada composto por uma camada de ar e um outro dielétrico que suporta a *patch* parasita. Se as dimensões das *patches* ativa e parasita, forem aproximadamente iguais as respetivas frequências de ressonância serão relativamente próximas sem, no entanto, constituírem duas bandas de frequência distintas. As dimensões da *patch* parasita são ligeiramente superiores à *patch* ativa, pois a permitividade relativa equivalente diminui devido à interação eletromagnética entre os dois substratos e a altura da camada de ar que os separa.

Esta configuração está ilustrada na Figura 7.15(a). Variando a altura da camada de ar h_0 , pode-se obter uma boa largura de banda. Simulações mostram que h_0 deve ser da ordem de 0.05 a 0.09 de λ_0 .

Usando o ENSEMBLE simulou-se esta configuração, com os seguintes parâmetros: $W_1 = 60\text{mm}$; $L_1 = 45.8\text{mm}$; $W_2 = 66\text{mm}$; $L_2 = 64.5\text{mm}$; $\epsilon_{r1} = 4.7$; $h_1 = 3\text{mm}$; $\epsilon_{r2} = 4.7$; $h_2 = 1.5\text{mm}$ e $h_o = 18\text{mm}$.



(a) Configuração com duas patches, uma ativa e outra parasita.

(b) $|S_{11}|$

Figura 7.15

Na Figura 7.15(b) está representada a variação do parâmetro S_{11} , em função da frequência. A largura de banda obtida é aproximadamente 13%. O ganho dado pela simulação é de 9dBi.

7.7 Métodos de obter polarização circular

As geometrias canónicas estudadas atrás radiam uma onda com polarização linear. Pode-se, no entanto, projetar antenas impressas radiando uma onda com polarização circular alterando a sua geometria e ou a forma de alimentação de modo a produzir dois modos ortogonais dentro da cavidade. Estes modos radiam duas ondas com polarizações ortogonais na direção de máxima radiação. Consegue-se polarização circular se estes dois modos ortogonais forem excitados com igual amplitude e em quadratura de fase.

Há várias maneiras de se gerar polarização circular, sendo a mais óbvia a utilização de duas fontes independentes colocadas espacialmente em posições ortogonais e desfasadas de 90° , tal como se ilustra na Figura 7.16. Este método tem o inconveniente de recorrer a duas fontes independentes.

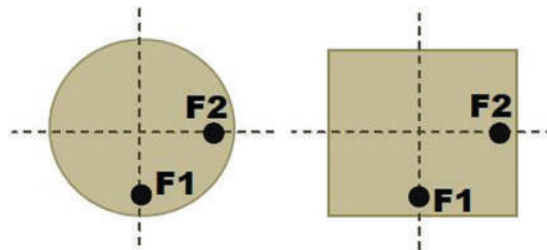


Figura 7.16 Duas fontes independentes colocadas ortogonalmente e desfasadas de 90° .

É evidente que é mais prático usar uma única fonte. Neste sentido, diversas técnicas foram desenvolvidas sendo uma delas a utilização dum acoplador híbrido que, a partir duma só fonte gera duas excitações com idêntica amplitude, mas desfasadas de $\pm 90^\circ$. Ligando as saídas do híbrido à *patch* em posições espacialmente ortogonais, consegue-se polarização circular, tal como se mostra na Figura 7.17(a). Outra maneira é usar um divisor de potência, Figura 7.17(b). Embora práticas, estas técnicas podem degradar o diagrama de radiação pelo facto das malhas de alimentação terem dimensões significativas e estarem no mesmo plano da *patch*.

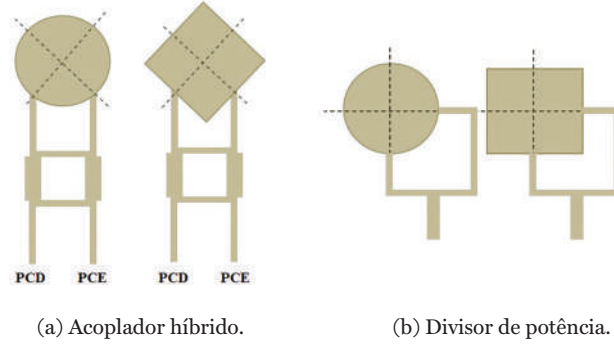


Figura 7.17

Para simplificar o modo de alimentação foram estudados outros métodos baseados na localização da alimentação combinada com alguma assimetria na geometria da *patch* de modo a excitar dois modos ortogonais com igual amplitude e em quadratura de fase. Três exemplos destes métodos estão ilustrados na Figura 7.18. São eles, a *patch* com uma fenda central segundo a diagonal (a), a *patch* com os cantos cortados (b) e a *patch* alimentada num canto (c).

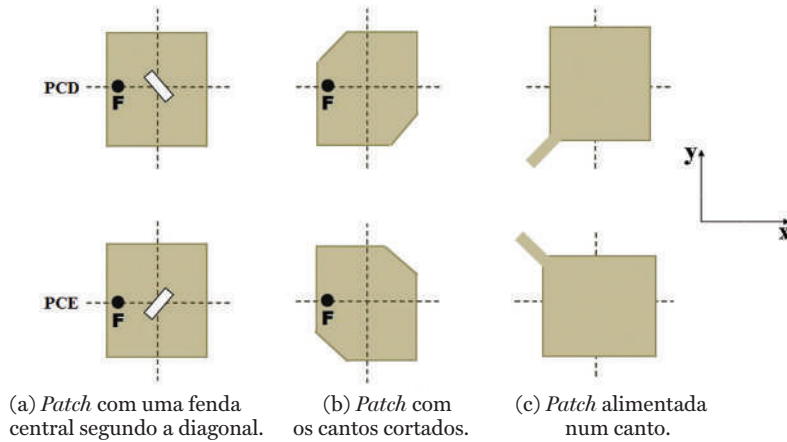


Figura 7.18

Usando o ENSEMBLE foram simuladas as três configurações da Figura 7.18 para a PCD. Todas as antenas estão num substrato com $\epsilon_r = 2.22$ e $h = 1.58\text{mm}$. A *patch* com uma fenda central é quadrada com $L = 21.7\text{mm}$ e a fenda é um retângulo com largura 0.7mm e comprimento 7mm . A *patch* com os cantos cortados é retangular com $L = 21.7\text{mm}$ e $W = 22.5\text{mm}$ sendo os cantos cortados triângulos com dois lados iguais a 3.6mm . A *patch* alimentada num canto é retangular com $L = 21.7\text{mm}$ e $W = 22.5\text{mm}$.

A geometria escolhida como base para estes exemplos foi uma *patch* quadrada com $L = 21.7\text{mm}$. No caso da *patch* com os cantos cortados e da *patch* alimentada num canto, a geometria foi ligeiramente alterada de modo a produzir a desejada PCD, resultando uma *patch* retangular com $L = 21.7\text{mm}$ e $W = 22.5\text{mm}$.

Na Figura 7.19 está representada razão axial (RA) destas três estruturas em função do ângulo em redor da direção de máxima radiação, $\theta = 0^\circ$, nos planos principais. Estes resultados mostram que a polarização

se mantém circular numa faixa angular de aproximadamente $\pm 50^\circ$, com a exceção da *patch* com os cantos cortados no plano, $\phi = 90^\circ$

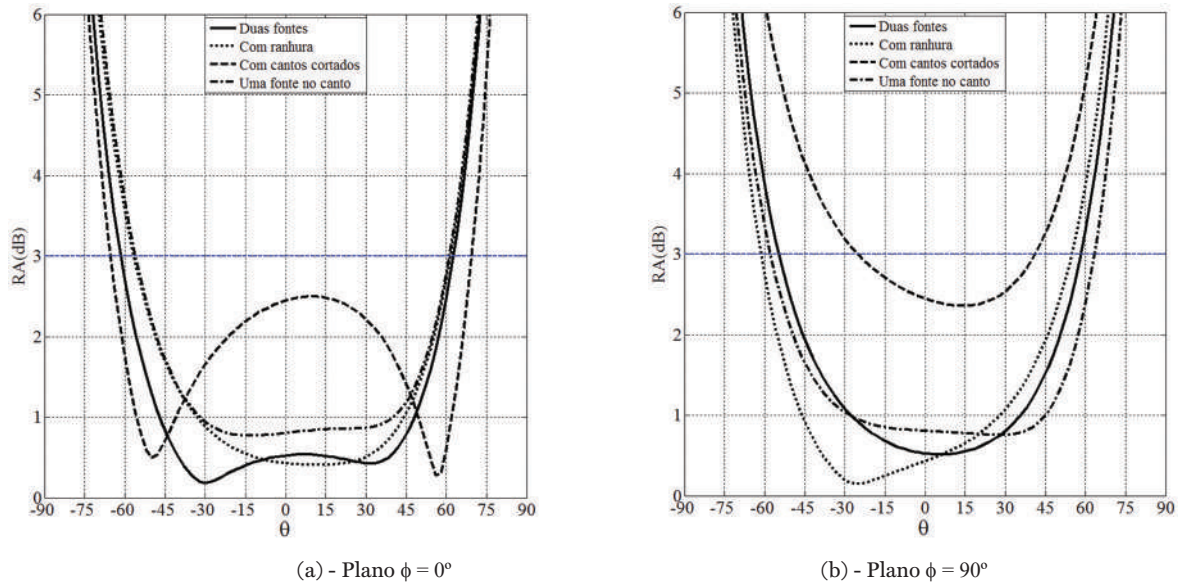


Figura 7.19 Razão axial das três estruturas da Figura 7.18 com PCD, em função do ângulo em redor da direção de máxima radiação.

Na Figura 7.20 está representada razão axial (RA) destas três estruturas segundo a direção de máxima radiação, $\theta = 0^\circ$, em função da frequência. A que apresenta menor largura de banda é a *patch* com os cantos cortados. As outras têm uma largura de banda um pouco maior, sendo mesmo assim apenas da ordem de 1%. Na mesma figura está representada a razão axial duma *patch* alimentada com duas fontes. Como seria de esperar esta é a estrutura que apresenta a maior largura de banda.

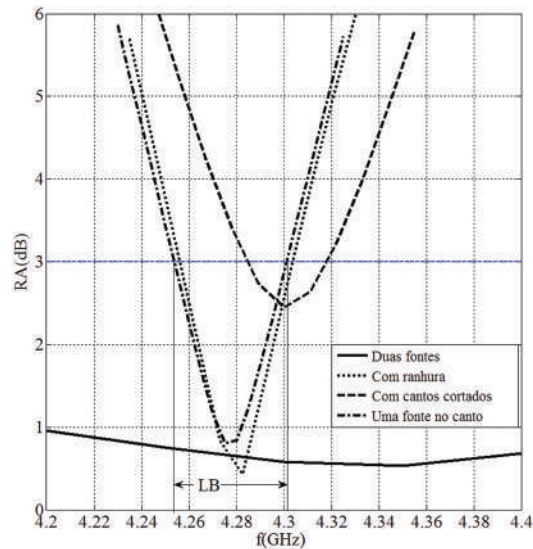


Figura 7.20 Razão axial das três estruturas segundo a direção de máxima radiação, $\theta = 0^\circ$, em função da frequência.

Outro resultado importante dado pelas simulações é a rejeição da componente cruzada, neste caso o valor da PCE. No caso da *patch* com uma fenda central a rejeição é de cerca de 32dB, para a *patch* com os cantos

cortados a rejeição é de cerca de 17dB e para a *patch* alimentada num canto a rejeição é de cerca de 26dB. Tendo em conta os diversos resultados das simulações pode-se concluir que a *patch* alimentada num canto é uma boa solução por ser simples e dar resultados satisfatórios.

7.8 Obtenção de dupla frequência

Mohamed Himdi [8] e Mounir Yazidi [9] mostraram que uma *patch* com duas fendas pode exibir características de dupla frequência.

Para exemplificar este conceito o autor projetou uma estrutura para dupla frequência usando uma *patch* quadrada com duas fendas e com os necessários circuitos de alimentação e adaptação, colocados no mesmo plano. A banda de frequências usada foi a banda K (18-24.6GHz).

Com base nos resultados apresentados nas referências [8] e [9] a *patch* com duas fendas para a banda K ficou com as seguintes dimensões: lado igual a 5mm, fendas com comprimento de 3.36mm e largura 0.3mm estando o lado maior a 0.3mm da aresta da *patch*. Esta *patch* está ilustrada na Figura 7.21.

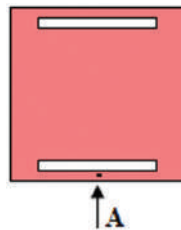


Figura 7.21 Patch com duas fendas.

A antena da Figura 7.21 foi simulada usando o ENSEMBLE. A simulação foi feita entre 17 e 25GHz e os valores do parâmetro S_{11} assim obtidos foram depois usados pelo TOUCHSTONE⁴ para dimensionar um circuito adaptador otimizado para duas frequências, uma em redor de 18.2GHz e a outra em redor de 23.8GHz.

As frequências que corresponderam à melhor adaptação, de acordo com os resultados dados pelo TOUCHSTONE, foram: $f_1=18.344\text{GHz}$ e $f_2=23.874\text{GHz}$, com $|S_{11}|$ igual a -28.6dB e -35.9dB respetivamente. Com as dimensões dadas pelo TOUCHSTONE para o circuito de adaptação, desenhou-se a estrutura completa representada na Figura 7.22.

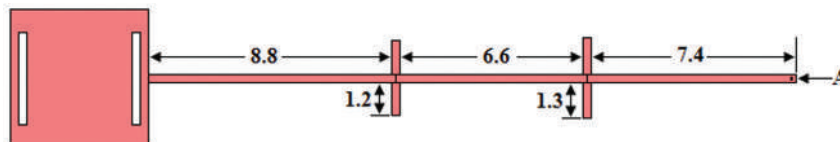


Figura 7.22 Estrutura completa. Patch e circuito de adaptação.

⁴ Desenvolvido pela EEsof atualmente Keysight EEsof EDA.

A estrutura completa foi simulada pelo ENSEMBLE tendo-se obtido a melhor adaptação às seguintes frequências: $f_1=18.56\text{GHz}$ e $f_2=24.3\text{GHz}$, com $|S_{11}|$ igual a -16.4dB e -18.4dB respetivamente. Os resultados desta simulação estão apresentados na Figura 7.23.

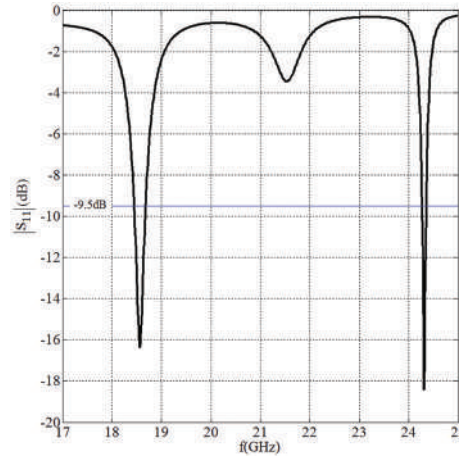


Figura 7.23 $|S_{11}|$ da estrutura completa dados pelo ENSEMBLE.

É claro da figura anterior que embora as duas bandas sejam muito estreitas a estrutura revela um comportamento de dupla frequência.

Resultados mais abrangentes relacionados com este trabalho constam da referência[10].

7.9 Agregados de antenas impressas

Uma *patch* isolada tem um ganho entre 5 e 8dBi. Para algumas aplicações este ganho não é suficiente e, portanto, recorre-se a agregados de *patches* para obter o ganho pretendido. Estes agregados não são difíceis de realizar, sendo além disso estruturas de baixo perfil o que é uma vantagem para muitas aplicações. Como exemplos deste tipo de agregados analisam-se de seguida três exemplos.

7.9.1 Agregado linear transversal de quatro *patches* para a frequência de 1.5GHz

Pretendeu-se com este exemplo projetar um agregado com um ganho moderado e relativamente compacto para a frequência de 1.5GHz. Começou-se por dimensionar uma *patch* para a frequência de 1.5GHz num substrato com as seguintes características: $\epsilon_r = 4.42$ e $h = 1.575\text{mm}$, tendo-se obtido as seguintes dimensões: $L = 47.2\text{mm}$ e $W = 55\text{mm}$.

De acordo com as simulações a impedância de entrada desta *patch* é $R_{in} \cong 330\Omega$ e o ganho é $G \cong 5\text{dBi}$. Para que o agregado seja compacto, optou-se por uma distância entre elementos $d_x = 70\text{mm}$ que corresponde a $d_x = 0.35\lambda_0$. Convém notar que para um agregado transversal esta distância deve ser menor do que λ_0 , para evitar a repetição de lobos principais, mas que quanto maior for maior será o ganho. Uma boa solução é usar d_x da ordem dos $0.7\lambda_0$. Nestas condições, idealmente por cada duplicação o ganho deveria aumentar 3dB. Assim, um agregado com duas destas *patches* deveria ter um ganho de $G \cong 8\text{dBi}$, um agregado com quatro deveria ter um ganho de $G \cong 11\text{dBi}$ e assim sucessivamente. Como se optou por usar $d_x = 0.35\lambda_0$, é de prever ganhos mais baixos.

Tendo em consideração estas observações prévias optou-se por analisar o agregado de quatro destas *patches* ilustrado na Figura 7.24.

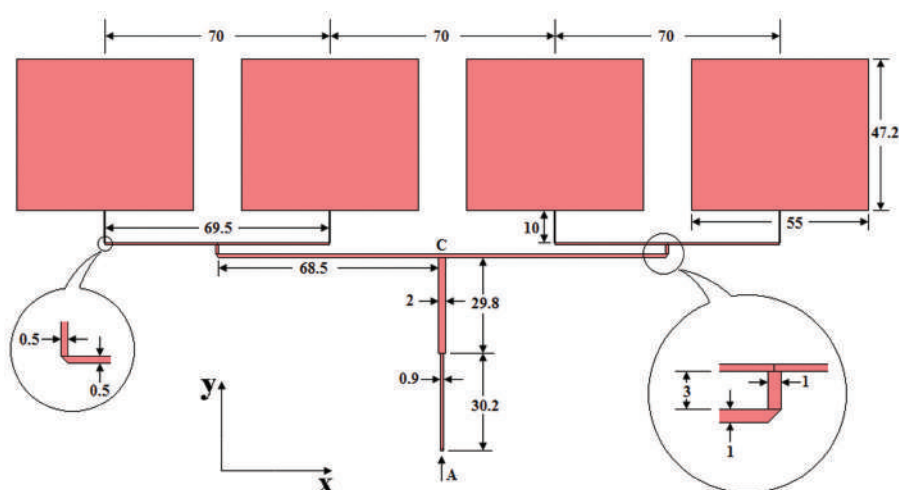


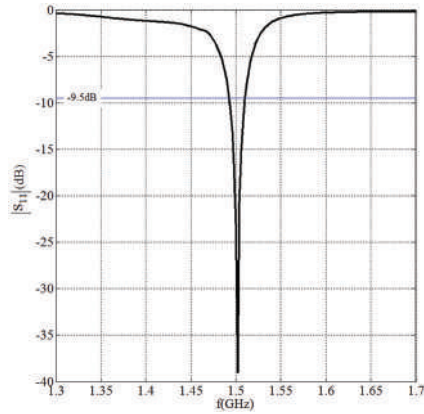
Figura 7.24 Agregado de quatro *patches* para a frequência de 1.5GHz. Todas as dimensões em mm.

Nesta figura está também representado o circuito de alimentação projetado para alimentar as quatro *patches* em fase e apresentar à entrada, no ponto A, uma impedância próxima de 50Ω .

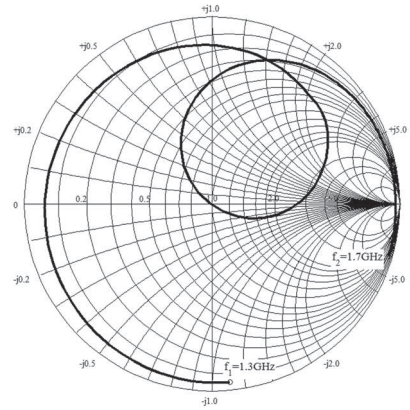
A abordagem para desenhar este circuito foi a seguinte:

- Utilizar linhas impressas finas de 0.5 e 1mm junto às *patches* para perturbar o menos possível a radiação por elas produzida e com comprimentos simétricos relativamente ao ponto C de modo a equalizar as distâncias deste ponto aos pontos de alimentação da cada *patch*.
- Determinar por simulação a impedância vista do ponto C. Esta impedância é de $Z_C \cong 30 - j4\Omega$. No ponto C inseriu-se uma linha de comprimento tal que, avançando em direção ao gerador, se obtenha uma impedância aproximadamente real e maior do que 50Ω . Escolheu-se uma linha de 2mm, isto é, com $Z_a \cong 63\Omega$ por facilidade de fabrico. Por simulação verificou-se que se o comprimento desta linha for de 29.8mm, a impedância vista à entrada é $Z_{in} \cong 160\Omega$. Dimensionando um transformador de $\lambda/4$ para adaptar esta impedância real a 50Ω , obteve-se uma linha com $Z_a \cong 89\Omega$ que neste substrato tem uma largura de 0.9mm e um comprimento de 28.5mm. Como resultado das simulações que foram feitas, o comprimento deste transformador foi ligeiramente aumentado para 30.2mm, tal como está ilustrado na Figura 7.24.

A evolução da impedância de entrada, vista do ponto A, em função da frequência está ilustrada na Figura 7.25. Da Figura 7.25(a) conclui-se que a melhor adaptação ocorre para $f = 1.502\text{GHz}$ com uma largura de banda da ordem de 1.1%. É uma largura de banda estreita como é característico deste tipo de antenas.



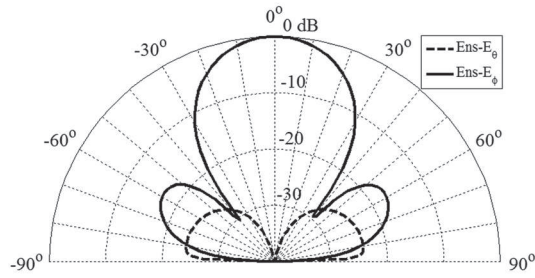
(a) - $|S_{11}|$



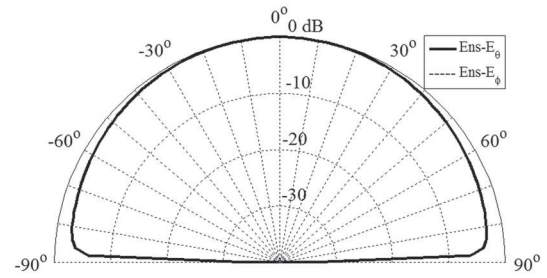
(b) - Carta de Smith

Figura 7.25 Impedância de entrada em função da frequência do agregado da Figura 7.24.

Na Figura 7.26 estão representados os diagramas de radiação simulados à frequência $f = 1.5\text{GHz}$ nos planos principais. Como seria de esperar, no plano $\phi = 90^\circ$ o diagrama é o do elemento, isto é, da *patch*. No plano $\phi = 0^\circ$ o diagrama é o produto do fator de agregado pelo do elemento, sendo essencialmente dominado pelo fator de agregado na região do lobo principal sentindo-se a influência do fator de elemento na formação do lóbulo secundário.



(a) - Plano $\phi = 0^\circ$



(b) - Plano $\phi = 90^\circ$

Figura 7.26 Diagramas de radiação do agregado da Figura 7.24.

O ganho previsto pelo ENSEMBLE é de 8.6dBi, que é inferior aos 11dBi possíveis para um agregado de quatro elementos, mas que é devido ao baixo valor da distância entre elementos que é de apenas $0.35\lambda_0$.

7.9.2 Agregado planar de quatro *patches* para a frequência de 2.4GHz

Neste exemplo analisa-se o projeto dum agregado de quatro *patches* para a frequência de 2.4GHz. Começou-se por dimensionar uma *patch* para esta frequência num substrato com as seguintes características: $\epsilon_r = 4.47$ e $h = 1.5\text{mm}$, tendo-se obtido as seguintes dimensões: $L = 28.16\text{ mm}$ e $W = 60\text{mm}$.

De acordo com as simulações a impedância de entrada desta *patch* é $Z_{in} \cong 106 - j76\Omega$ e o ganho é $G \cong 5.7\text{dBi}$. Para este agregado optou-se por uma distância entre elementos $d_x = 90\text{mm}$ que corresponde a $d_x = 0.72\lambda_0$ e $d_y = 58.16\text{mm}$ que corresponde a $d_y = 0.465\lambda_0$. Nestas condições este agregado com quatro elementos já deve ter um ganho próximo de 11.7dBi. Este agregado planar de quatro *patches* está ilustrado na Figura 7.27.

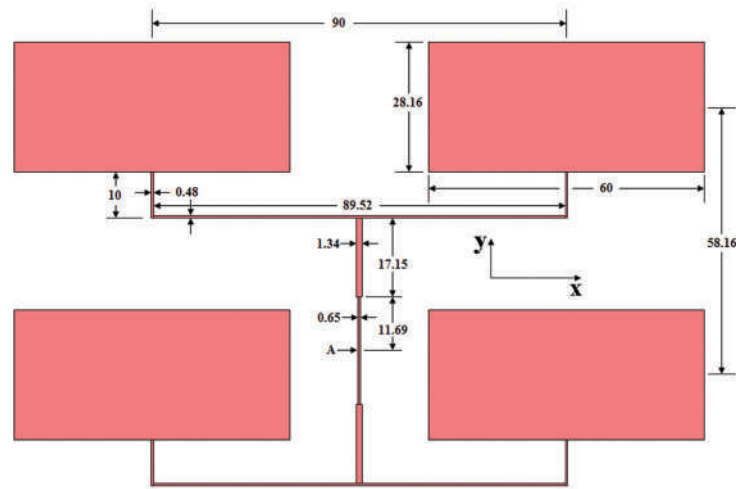
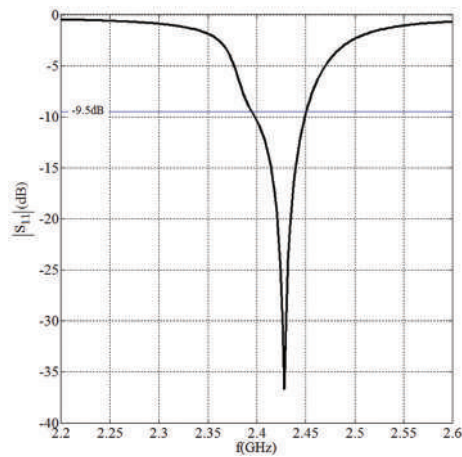


Figura 7.27 Agregado de quatro *patches* para a frequência de 2.4GHz. Todas as dimensões em mm.

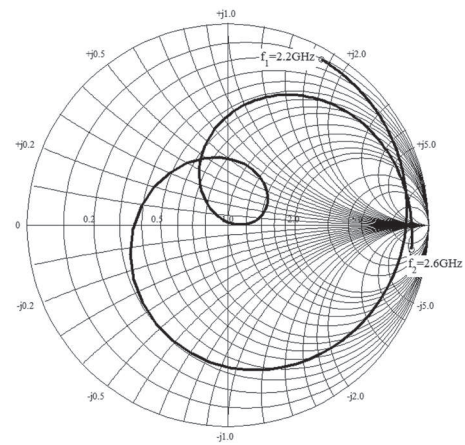
Nesta figura está também representado o circuito de alimentação projetado para alimentar as quatro *patches* em fase e apresentar à entrada, no ponto A, uma impedância próxima de 50Ω .

A abordagem para desenhar este circuito foi semelhante à do caso anterior tendo como objetivo que a impedância vista do ponto A para a parte superior, que é igual à vista para a parte inferior, seja de 100Ω para que em conjunto a impedância à entrada seja próxima de 50Ω .

A evolução da impedância de entrada, vista do ponto A, em função da frequência está ilustrada na Figura 7.28. Da Figura 7.28(a) conclui-se que a melhor adaptação ocorre para $f = 2.428\text{GHz}$ com uma largura de banda da ordem de 2.2%.



(a) - $|S_{11}|$



(b) - Carta de Smith

Figura 7.28 Impedância de entrada em função da frequência do agregado da Figura 7.27.

Na Figura 7.29 estão representados os diagramas de radiação simulados à frequência $f = 2.43\text{GHz}$ nos planos principais. No plano $\phi = 90^\circ$ o diagrama não apresenta lóbulos secundários devido ao valor de $d_y = 0.465\lambda_0$, como se pode confirmar pelas expressões deduzidas no capítulo 4. No plano $\phi = 0^\circ$ o diagrama já apresenta um lóbulo secundário devido ao valor de $d_x = 0.72\lambda_0$. A influência do fator de elemento faz-se notar na formação do lóbulo secundário.

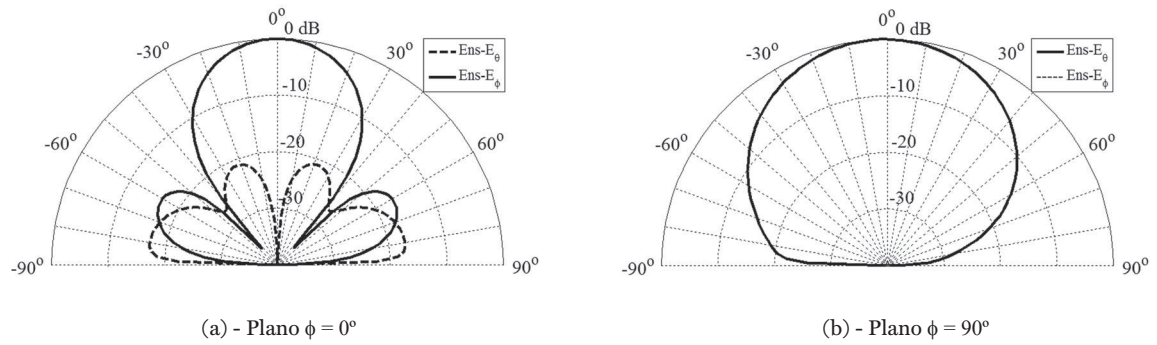


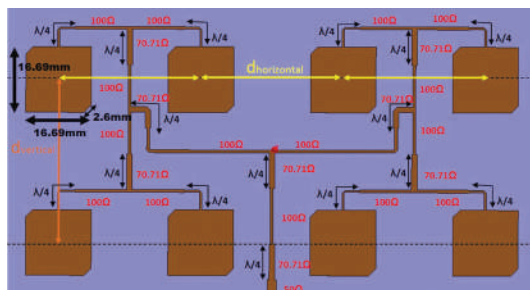
Figura 7.29 Diagramas de radiação do agregado da Figura 7.27.

O ganho previsto pelo ENSEMBLE é de 11.8dBi, que é próximo do valor 11.7dBi obtidos somando 6dB ao ganho 5.7dBi do elemento.

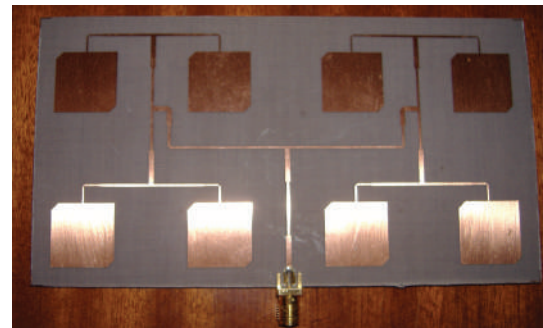
Nos dois exemplos anteriores os circuitos de alimentação estão no mesmo plano das *patches*. Esta é uma solução muito prática e de baixo custo, mas que pode implicar a interferência deste circuito com a radiação das *patches*. Para evitar este problema, pode-se recorrer a uma alternativa mais dispendiosa e de mais difícil construção que consiste em utilizar uma alimentação por acoplamento através duma fenda no plano de massa sendo a alimentação feita por uma linha impressa colocada noutro substrato que partilha o mesmo plano de massa, tal como se mostra na Figura 7.2(c). Esta técnica implica a utilização de três camadas condutoras separadas por dois substratos que podem ser diferentes.

7.9.3 Agregado planar com polarização circular esquerda para a frequência de 5.8GHz

Este exemplo é parte do trabalho feito na dissertação de mestrado referida em [11]. Trata-se dum agregado de 2x4 elementos com uma distância entre elementos, na horizontal $d_{\text{horizontal}} = 0.7\lambda_0$ e na vertical $d_{\text{vertical}} = 0.8\lambda_0$, e em que o elemento radiante é uma *patch* elementar quadrada projetada para 5.8GHz, com polarização circular esquerda, apresentando as seguintes dimensões: $L = W = 16.69\text{mm}$, como se mostra Figura 7.30.



(a) - Esquemático



(b) - Protótipo

Figura 7.30 Agregado de 2x4 *patches* para a frequência de 5.8GHz com polarização circular esquerda.

A abordagem para desenhar o circuito de alimentação foi semelhante à dos casos anteriores tendo como objetivo que a impedância vista do ponto de alimentação seja próxima de 50Ω .

Na Figura 7.31 está representada a razão axial simulada em função da frequência. Como se pode ver da figura, na gama de frequências de 5.778 a 5.819GHz, a razão axial é igual ou inferior a 3dB, o que mostra que a antena radia uma onda com boa polarização circular nesta banda, sendo a frequência ótima 5.779 para a qual a razão axial é de 1.4dB.

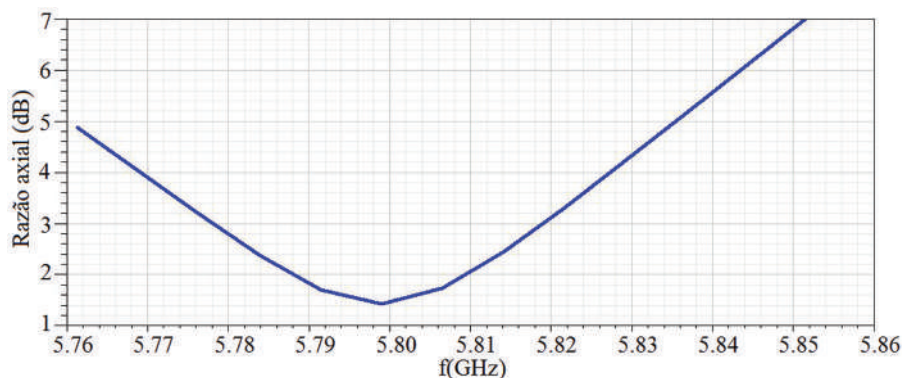


Figura 7.31 Razão axial simulada, em função da frequência do agregado da Figura 7.30.

Foi construído um protótipo semelhante ao ilustrado na Figura 7.30(b) com as dimensões indicadas na Figura 7.30(a) que foi testado experimentalmente. Como se verificou um ligeiro afastamento da frequência pretendida, foi construído outro agregado semelhante, mas com *patches* ligeiramente maiores, com as dimensões: $L = W = 16.75\text{mm}$. Os resultados experimentais deste novo protótipo cumprem praticamente os objetivos pretendidos.

Na Figura 7.32 está representada a evolução das polarizações circular esquerda e direita com a frequência na direção de máxima radiação. Como se pode ver pela figura, para a frequência ótima, a rejeição da componente de polarização inversa é superior a 40dB. À frequência de projeto, isto é, para 5.8GHz é menor, mas mesmo assim da ordem dos 20dB.

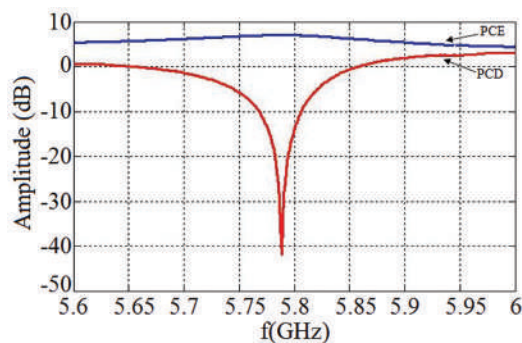


Figura 7.32 Evolução das polarizações circular esquerda e direita, com a frequência, na direção de máxima radiação do agregado da Figura 7.30.

Na Figura 7.33 está representada a variação do parâmetro S_{11} medido em função da frequência. Da figura conclui-se que a melhor adaptação ocorre para $f \cong 5.79\text{GHz}$ com uma largura de banda da ordem de 4.3%.

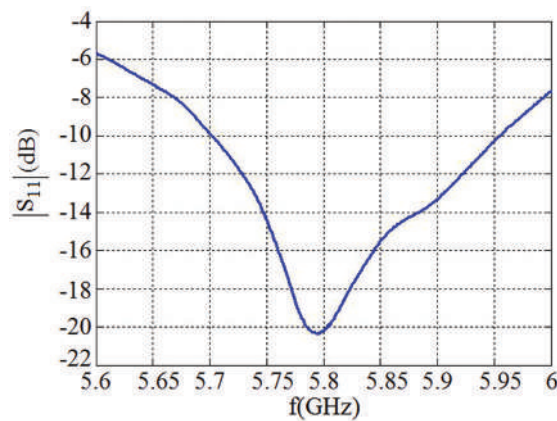
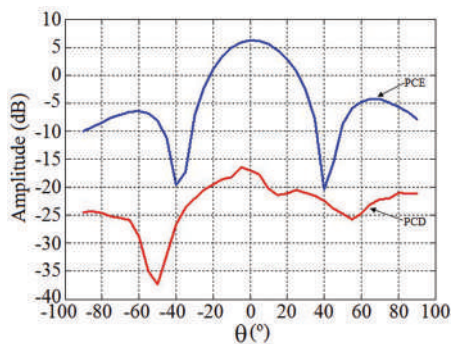
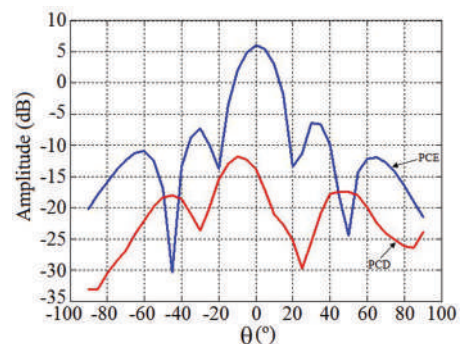


Figura 7.33 Parâmetro $|S_{11}|$ medido em função da frequência do agregado da Figura 7.30.

Na Figura 7.34 estão representados os diagramas de radiação medidos à frequência $f = 5.8\text{GHz}$ nos planos principais. Da Figura 7.34(a) vê-se que no plano vertical a LFMP é aproximadamente de 35° e que a rejeição da polarização inversa, para $\theta = 0^\circ$, é de cerca de 22dB. Da Figura 7.34(b) vê-se que no plano horizontal a LFMP é aproximadamente de 18° e que a rejeição da polarização inversa, para $\theta = 0^\circ$, é de cerca de 20dB.



(a) - Plano vertical



(b) - Plano horizontal

Figura 7.34 Diagramas de radiação do agregado da Figura 7.30.

7.9.4 Antena adaptativa para a frequência de 1.5GHz

Este exemplo é extraído do trabalho feito na dissertação de mestrado referida em [12]. Grande parte deste trabalho foi desenvolvido no âmbito do projeto AGORA (AGregado de antenas com ORientação Automática do feixe) financiado pela PT Inovação.

A adaptabilidade é uma característica que está a ser cada vez mais explorada nos sistemas de comunicação rádio móvel das últimas gerações, aparecendo neste contexto o emprego de antenas adaptativas (AA). As antenas adaptativas usam agregados de antenas associados a eletrônica de radiofrequência, mais ou menos complexa, controlada por um processador que modifica o diagrama de radiação de uma forma automática e dinâmica em resposta às condições do canal de propagação. A implementação de uma antena adaptativa requer tipicamente três partes essenciais: o agregado de antenas, isto é, o sistema radiante propriamente dito, o circuito formatador do diagrama de radiação e o processador indispensável para o cálculo dos pesos em amplitude e fase através de algoritmos adaptativos. O sistema radiante é tipicamente um agregado de antenas composto por um certo número

de elementos colocados numa determinada disposição espacial, tipicamente linear, planar, circular ou elíptica podendo ser realizado em diferentes tecnologias, circuito impresso, filiforme, etc. O circuito de formatação do diagrama de radiação é responsável pelo controlo da amplitude e fase a aplicar a cada um dos sinais recebidos pelos elementos do agregado através de amplificadores/atenuadores variáveis e variadores de fase respetivamente, sintonizados à frequência das portadoras. O condicionamento e processamento do sinal é realizado através da placa de aquisição de dados e de um computador pessoal sendo responsável pela amostragem do sinal proveniente do acoplador direcional e pelo seu tratamento de acordo com o algoritmo adaptativo implementado. Pela correta interação entre estes blocos são gerados os sinais de controlo necessários para obter os desvios de fase adequados e a amplificação conveniente através de mecanismos de realimentação para a formatação do diagrama de radiação, orientando o feixe principal para a direção do sinal mais forte a receber. As principais características do diagrama de radiação, nomeadamente a sua forma, diretividade, nível dos lobos secundários, largura de feixe a meia potência (LFMP), são impostas tanto pela disposição espacial dos elementos que compõem o agregado como também pela forma como são tratados os sinais. Através do conhecimento da fase e amplitude de cada sinal recebido individualmente em cada instante, o sistema formatador de feixe está capacitado para ajustar o diagrama de radiação de uma forma dinâmica e contínua de acordo com as condições do sinal a receber pela introdução, de forma adequada, dos respetivos pesos de fase e amplitude. Isto deixa antever dois modos de funcionamento distintos duma antenna adaptativa: malha aberta e malha fechada.

No modo de funcionamento em malha aberta, a formatação do diagrama de radiação é feita através da introdução de determinados pesos (desvios de fase e amplitudes) de uma forma determinista orientando o feixe para uma direção conhecida à priori. No modo de funcionamento em malha fechada, a direção espacial do sinal desejado pode variar continuamente com o tempo, o que implica um ajuste contínuo do diagrama de radiação de acordo com as características do sinal a receber (*signal environment*). O varrimento espacial (*scanning range*) e o seguimento do sinal desejado (*signal tracking*) é possível através de mecanismos de realimentação por comando eletrónico para controlo de fases e amplitudes recorrendo a algoritmos de estimação da direção de chegada DOA (*Direction of Arrival*) e a algoritmos adaptativos baseados na potência média recebida. A Figura 7.35 apresenta, de uma forma sumária, o diagrama de blocos da antenna adaptativa implementada e as respetivas interfaces. Todos os blocos foram desenhados para funcionarem à frequência de 1.5GHz.

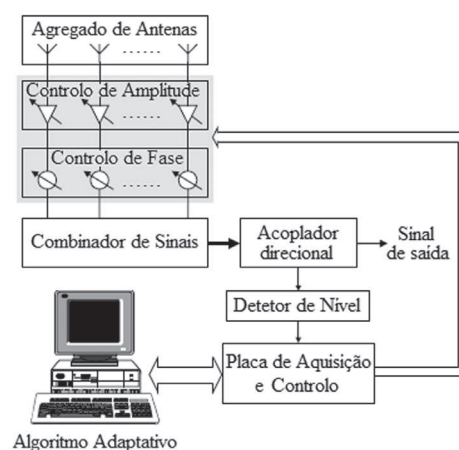


Figura 7.35 Diagrama de blocos da antenna adaptativa.

O diagrama de radiação de um agregado de antenas depende do fator de elemento (FE) e do fator de agregado (FA). O primeiro depende exclusivamente das características de radiação do elemento fundamental que constitui o agregado, sendo estas dependentes do tipo de tecnologia utilizada na sua implementação. Por outro lado, o fator de agregado depende da disposição espacial dos elementos radiantes, do seu número e da

distribuição de correntes utilizada para a sua excitação. Estes parâmetros determinam o conjunto de especificações do agregado adaptativo, tais como o ganho, a largura de feixe nos planos E e H, o nível dos lobos secundários e o varrimento angular de feixe pretendido (*scanning range*). Neste trabalho foram feitos diversos estudos com o fim de escolher o melhor FA tendo como critérios de avaliação o nível dos lobos secundários, a largura de feixe a meia potência (LFMP) e a máxima variação angular do lobo principal do diagrama de radiação pela variação da fase de cada elemento. Face aos resultados obtidos optou-se por um agregado de 8 elementos alimentados em corrente segundo uma distribuição do tipo triangular com um fator de amplificação de 10, espaçados entre si de $0.4\lambda_0$ com $\lambda_0 = 200\text{mm}$. A atenuação máxima dos lobos secundários conseguida foi aproximadamente de -30dB para uma variação angular no plano do agregado de $\pm 70^\circ$ considerando um fator de elemento isotrópico.

Para o elemento do agregado foi escolhido um subagregado de dois elementos base alimentados em fase para se conseguir obter mais diretividade no plano vertical como se mostra na Figura 7.36. Os elementos base são a antena de duas *patches* representada na Figura 7.15.

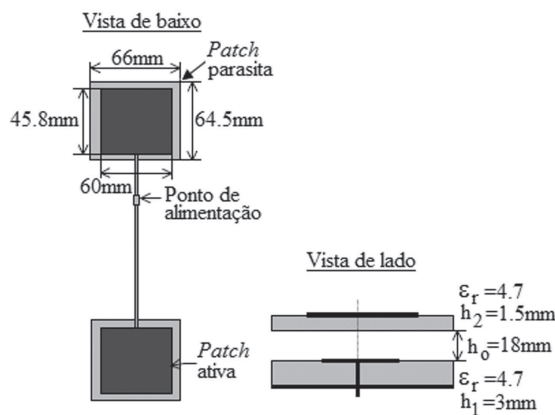


Figura 7.36 Elemento usado no agregado: geometria, disposição e alimentação da *patch* ativa e parasita.

O diagrama de radiação do elemento no plano E foi medido experimentalmente na câmara anecoica da Universidade de Aveiro a três frequências por forma a verificar se o lobo principal do diagrama de radiação sofria algum desvio angular introduzido pelas diferenças do comprimento elétrico das linhas *microstrip* que alimentam as duas *patches* do subagregado. Os diagramas de radiação, representados na Figura 7.37, apresentam alguma assimetria relativamente à direção de máximo (0°) devido à variação do comprimento elétrico com a frequência das linhas *microstrip* que alimentam as duas *patches*, embora não se tenha verificado qualquer desvio angular. O nível dos lobos secundários é inferior a -13dB típico duma distribuição de corrente uniforme. O diagrama de radiação do elemento no plano H tem apenas um lobo principal com uma LFMP da ordem dos 70° .

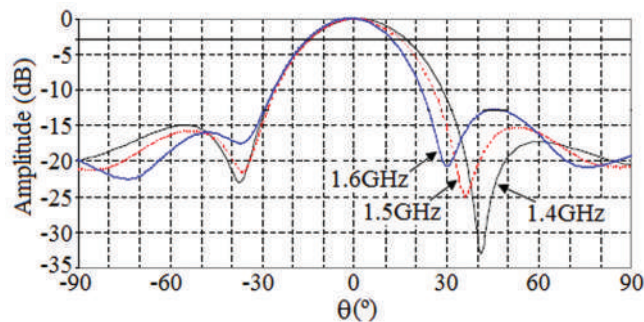
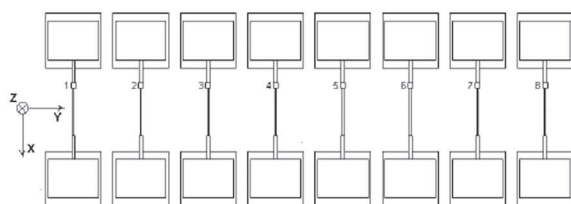


Figura 7.37 Diagrama de radiação do elemento fundamental do agregado no plano E para diferentes frequências.

A Figura 7.38(a) mostra a disposição e geometria final do agregado linear de 8 elementos, vista de baixo. A Figura 7.38(b) mostra a vista frontal do protótipo construído.



(a) - Vista de baixo



(b) - Vista frontal do protótipo

Figura 7.38 Geometria do agregado linear de 8 elementos.

Os sinais provenientes de cada elemento radiante são todos somados e o resultado ligado a uma única saída. Esta operação é realizada por um divisor/combinador de 8 vias, desenvolvido especialmente para o efeito, constituído por vários divisores de Wilkinson de duas vias de iguais características colocados em cascata tal como se mostra na Figura 7.39.

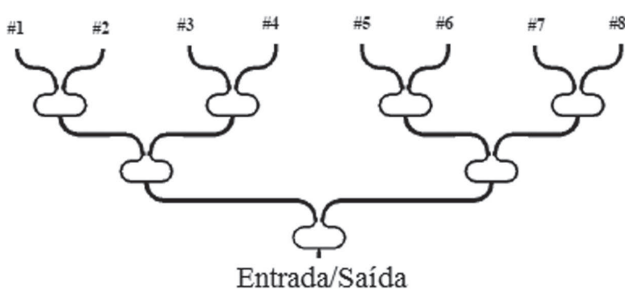


Figura 7.39 Combinador/divisor de 8 vias em três andares de Wilkinson (2 vias).

Foram obtidos resultados experimentais tanto em malha aberta como em malha fechada colocando a antena na câmara anecoica tal como se mostra na Figura 7.40.

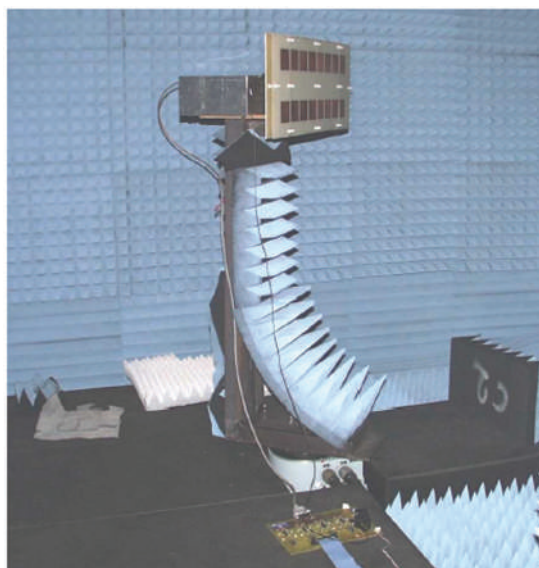


Figura 7.40 Fotografia da AA, incluindo o formatador de feixe RF e a placa de controlo, no interior da câmara anecoica.

No que diz respeito ao funcionamento em malha aberta, apontou-se o feixe principal do diagrama de radiação para as direções de 0° , -30° e 60° e selecionou-se a distribuição de amplitudes triangular. Através de procedimentos matemáticos internos são calculados os desvios de fase e os níveis de amplitude pretendidos para excitação de cada elemento do agregado, sendo o formatador de feixe responsável pela formatação dos diagramas de radiação a serem medidos na câmara anecoica. Os diagramas medidos estão representados na Figura 7.41. Os diagramas mostram ser possível apontar o feixe para a direção pretendida mantendo o nível dos lobos secundários inferior a -22dB .

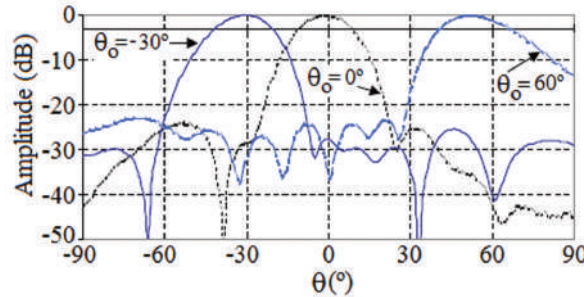


Figura 7.41 Diagramas de radiação medidos na câmara anecoica para as direções de 0° , -30° e 60° usando distribuição triangular de amplitudes.

O funcionamento em malha aberta, permite ainda orientar pelo menos dois feixes para os sinais desejáveis e impor nulos para sinais interferentes desde que se conheça à priori a direção de chegada (DOA) de cada um deles, como se mostra na Figura 7.42.

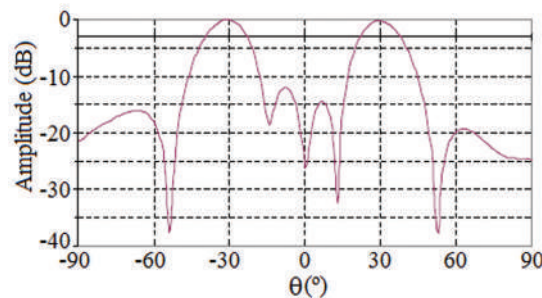


Figura 7.42 Direcionamento de dois feixes para as direções impostas de -30° e 30° e um nulo em 0° , utilizando o formatador de feixe Frost modificado.

Uma vez testado o desempenho da AA em funcionamento em malha aberta, seguiu-se a demonstração da capacidade de seguimento da AA, de um sinal proveniente de uma antena emissora na câmara anecoica, em modo de malha fechada. Para tal, variando a posição angular física da antena relativamente à antena emissora de forma aleatória e a diferentes velocidades de rotação, a AA deverá ser capaz de orientar eletricamente o seu feixe principal em função da deslocação física angular provocada, por forma a maximizar o nível de potência recebida. O nível de potência recebida independentemente da direção que esta faz com a antena emissora deverá ser, a menos do fator elemento do agregado, igual para todas as posições angulares percorridas. A Figura 7.43 mostra a curva de potência recebida normalizada quando se faz uma rotação angular física do agregado de uma variação de -90 a 90 graus. Esta curva toma a forma do diagrama de radiação do elemento de agregado em valores relativos de potência no plano que contém o eixo do agregado (plano horizontal), ou seja, se o fator de elemento fosse isotrópico neste plano o nível de potência recebido deveria ser constante nesta variação angular. No entanto a AA consegue obter um ganho relativo face ao elemento para direções próximas dos extremos angulares considerados em cerca de 3dB .

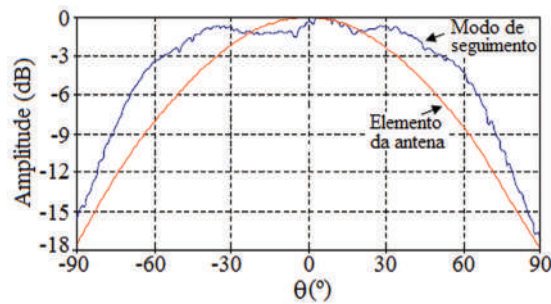


Figura 7.43 Teste de seguimento do sinal pela AA na câmara anecoica.

Referências

- [1] BALANIS, C. A., *Antenna Theory-Analysis and Design*. New York: Harper & Row, Publishers, 1982.
- [2] STUTZMAN, Warren L.; THIELE, Gary . A., *Antenna Theory and Design*. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [3] KILDAL, Per-Simon, *Foundation of Antennas-A Unified Approach*. Lund: Studentlitteratur, 2000.
- [4] CARVER, K. R.; MINK, J. W., "Microstrip Antenna Technology", *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, Vol. AP-29, pp. 2-24, Jan.1981.
- [5] DERNERYD, A. G., "Linearly Polarized Microstrip Antennas", *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, Vol. AP-24, pp. 846-851, Nov.1976.
- [6] PINHO, Pedro R. Tavares; ROCHA, A. C. Domingues; PEREIRA, J. F. Rocha, *Propagação Guiada de Ondas Eletromagnéticas*. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2014.
- [7] DUBOST, G., *Flat Radiating Dipoles and Applications to Arrays*. New York: Research Studies Press, John Wiley & Sons, 1981.
- [8] HIMDI, Mohamed, *Analyse et Synthèse d'Antennes Imprimées Alimentée par Fente, Application aux Réseaux*. Tese de doutoramento, Universidade de Rennes I, 1990.
- [9] EL YAZIDI, Mounir, *Modelisation d'Antennes Imprimées de Type Fente, Microruban et Mixte*. Tese de doutoramento, Universidade de Rennes I, 1990.
- [10] ... PEREIRA, J. F. Rocha; HIMDI, Mohamed; DANIEL, Jean-Pierre, *Estudo de Estruturas para Dupla Frequência e Dupla Polarização Usando Patches com Fendas*, 1ª Conferência Nacional de Telecomunicações, Aveiro, Portugal, Abril de 1997.
- [11] VARUM, Tiago Miguel Valente, *Antena para comunicações DSRC*. Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, 2010.
- [12] JESUS, Paulo José Henriques de, *Implementação e Avaliação do Desempenho de um Agregado de Antenas Adaptativo*. Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, 2001.

Exercícios

1.

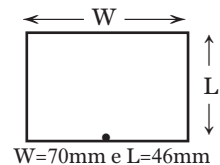
- Projete uma antena *microstrip* retangular para a frequência de 2GHz, utilizando um substrato com $\epsilon_r = 2.32$ e $h = 1.59\text{mm}$.
- Determine a impedância de entrada usando o modelo simplificado da linha de transmissão e supondo que a antena está em ressonância.
- Determine a diretividade.

2. Considere uma antena *microstrip* retangular realizada num substrato com $\epsilon_r = 2.32$ e $h = 1.59\text{mm}$. A largura da *patch* é $W = 30\text{mm}$ e o seu comprimento é $L = 24.2\text{mm}$. Estando a *patch* alimentada na borda a meio do lado maior, determine a sua resistência de entrada.

3. Pretende-se construir uma antena impressa retangular para funcionar à frequência de 5GHz utilizando um substrato com as seguintes características: $\epsilon_r = 4.7$; $\tan\delta = 0.001$ e $h = 1.6\text{mm}$. Os condutores são de cobre com $\sigma = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$.

- Determine as dimensões da *patch*.
- Estime a largura de banda segundo o critério $\text{SWR} \leq 2$.
- Determine a resistência de entrada, na periferia da *patch* quando ela está em ressonância.
- Assumindo que a *patch* é alimentada por uma sonda coaxial, determine a localização dessa sonda de modo a garantir a largura de banda estimada e calcule a impedância de entrada da antena incluindo o efeito da sonda.

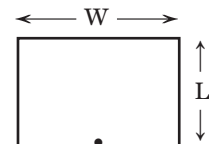
4. Considere a *patch* retangular representada na figura, colocada num substrato com $\epsilon_r = 4.7$ e $h = 1.6\text{mm}$ e projetada para funcionar à frequência de 1.5GHz.



- Determine a resistência de entrada, usando o modelo simplificado da linha de transmissão.
- Projete um agregado com duas destas *patches* de modo que o diagrama de radiação seja, no plano E idêntico ao da *patch* isolada e no plano H tenha um feixe com uma largura entre nulos de 80° .
- Dimensione uma malha de adaptação de modo que a impedância de entrada do agregado seja 50Ω .
- Determine a diretividade do agregado.

5.

- Projete uma *patch* retangular, como a que está representada na figura ao lado, de modo que a impedância de entrada seja 200Ω à frequência de 5GHz. A *patch* está colocada num substrato com $\epsilon_r = 2.55$ e $h = 3.2\text{mm}$ e a largura W deve ser maior que $0.35\lambda_0$ e menor que λ_0 .



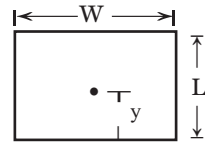
- Projete um agregado com duas destas *patches* que seja o mais compacto possível e de modo que o diagrama de radiação, no plano H, seja idêntico ao da *patch* isolada. Dimensione uma malha de adaptação de modo que a impedância de entrada do agregado seja 50Ω .
- Determine a largura de feixe entre nulos no plano E.
- Determine a diretividade do agregado.

6.

a) Dimensione uma *patch* retangular, como a que está representada na figura ao lado, para a frequência de 5GHz.

A *patch* está colocada num substrato com $\epsilon_r = 2.55$ e $h = 1\text{mm}$.

b) Determine o valor de y de modo que a resistência de entrada seja 50Ω .



7. Dimensione uma *patch* circular para a frequência de 5GHz. A *patch* está colocada num substrato com $\epsilon_r = 4.7$ e $h = 1.6\text{mm}$.

Capítulo 8

Antenas e agregados impressos multibanda para comunicações sem fios¹

8.1 Introdução

Monopolos impressos compactos e multibanda têm muito interesse numa variedade de aplicações tais como WLAN, RFID e terminais móveis. Se as antenas puderem ser fabricadas numa estrutura planar usando as técnicas de circuitos impressos (PCB), o seu custo pode ser baixo e o processo de fabricação grandemente simplificado.

É bem conhecido que a redução do tamanho duma antena implica o decréscimo da sua eficiência de radiação, sobretudo se o seu tamanho é muito pequeno comparado com o comprimento de onda em espaço livre correspondente à sua menor frequência de ressonância. Substratos convencionais de elevada permitividade podem ser usados para reduzir as dimensões duma antena impressa, mas isso acarreta outros problemas de projeto. Quando se usa esta abordagem a largura de banda diminui e são excitadas ondas de superfície as quais, no caso de agregados com varrimento de feixe (*phased arrays*), podem dar origem a ângulos cegos. Por tudo, isto, é portanto importante investigar técnicas de projeto de antenas compactas e de baixo custo com características de radiação promissoras.

Este capítulo aborda várias técnicas de projetar antenas do tipo monopolo de baixo custo e de dimensões reduzidas e está organizado do seguinte modo. Na secção 8.2 são analisadas técnicas de miniaturização, baseadas em geometrias fractais e no emprego de componentes concentrados inseridos nos elementos radiantes. Na secção 8.3 é apresentado um monopolo planar impresso multibanda e de baixo custo para terminais móveis. Seguidamente na secção 8.4 é abordado o projeto de agregados de monopolos de pequeno tamanho sendo dados dois exemplos, um que pode ser empregue para aumentar o ganho da antena e o outro adequado para aplicações MIMO em terminais portáteis. Finalmente na secção 8.5 apresentam-se os desenvolvimentos recentes no campo das antenas compactas de baixo custo.

¹ Este capítulo é um resumo da Tese de doutoramento que o Doutor Qi Luo efetuou na Universidade do Porto sob a orientação do Professor Doutor Henrique Salgado e a coorientação do autor.

8.2 Monopolos impressos multibanda compactos e eletricamente pequenos

Os atuais e futuros sistemas comerciais de comunicações sem fios requerem antenas com grande largura de banda para suportar elevados tráfegos de dados e capazes de operar nas múltiplas bandas definidas nos diversos protocolos. Antenas do tipo monopolo impressos compactos são importantes para aplicações sem fios por serem fáceis de fabricar, terem uma radiação omnidirecional e uma larga largura de banda.

É do conhecimento geral que para se atingir a condição de ressonância, a dimensão da antena tem que ser uma fração do comprimento de onda da frequência de ressonância. Isto significa que quanto menor for a frequência de ressonância, maior terá que ser a antena. Tendo em conta as limitações das antenas eletricamente pequenas definidas por Chu [1], é claro que estas antenas de pequenas dimensões têm sempre um elevado fator de qualidade sendo a largura de banda inversamente proporcional ao fator de qualidade. Por conseguinte a redução das dimensões duma antena conduz à deterioração das suas características de radiação. Portanto conseguir projetar antenas multibanda compactas com características de radiação promissoras tem atraído a atenção dos investigadores.

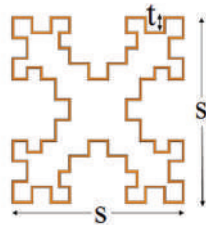
Para ser uma solução de baixo custo, é conveniente fabricar os monopolos usando as técnicas de circuitos impressos (PCB) numa estrutura planar com uma só camada de substrato. Sendo uma estrutura planar, o elemento radiante tem que ter uma geometria que possa excitar modos de ordem superior dentro dum volume limitado para ter um funcionamento multibanda. Uma abordagem que pode ser usada é recorrer a geometrias fractais para projetar antenas do tipo monopolo impressos compactos e multibanda. Uma geometria fractal é uma família de geometrias que têm a característica inerente de auto similaridade e de auto afinidade, que foram usadas para descrever e modelar formas complexas encontradas na natureza tais como cadeias de montanhas, ondas e árvores [2]. Recentemente, as técnicas de fractais foram trazidas para o campo da teoria eletromagnética, um ramo de investigação que se passou a denominar eletrodinâmica fractal; também foram implementadas no projeto de antenas com a designação de engenharia de antenas fractais. É um tópico atual que tem atraído muitos investigadores. Existem várias vantagens na utilização de geometrias fractais. Em primeiro lugar permitem reduzir o tamanho da antena, o que faz com que sejam boas candidatas para a miniaturização de antenas, sendo além disso estruturas com autopreenchimento que podem ser escaladas sem aumento do tamanho total. Esta característica proporciona oportunidades para os projetistas de antenas poderem assim explorar novas geometrias adequadas para o projeto de antenas pequenas. Em segundo lugar, um fractal é uma geometria com auto repetição em diferentes escalas, o que significa que a técnica fractal pode ser explorada para a conceção de antenas com operação de banda múltipla e diagramas de radiação semelhantes.

É importante salientar que, embora as geometrias fractais sejam estruturas com autopreenchimento que podem ser escaladas, sem aumentar o tamanho global, nem todas as geometrias podem servir para o projeto duma antena compacta. Pesquisas já realizadas mostraram que algumas geometrias fractais tais como as curvas de Hilbert e as curvas de Peano, que exibem um alto grau de preenchimento do espaço, não conseguem reduzir eficazmente a frequência de ressonância da antena devido ao cancelamento das correntes entre linhas muito próximas [3].

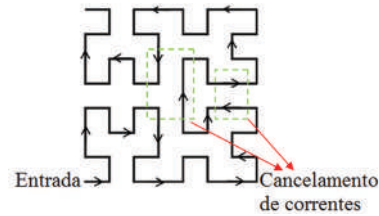
8.2.1 Monopolo fractal dual banda

Estudos já realizados mostram que a geometria Minkowski Island é uma boa solução para a conceção de antenas multibanda do tipo monopolo impresso. Em comparação com outras geometrias fractais tais como as curvas de Hilbert, a geometria Minkowski Island pode operar de modo mais eficiente no que diz respeito à redução da

frequência, devido à sua configuração em forma de meandros [3]. Como se ilustra na Figura 8.1, quando uma curva de Hilbert é utilizada para conceber uma monopolo impresso, as linhas muito próximas podem causar um grande cancelamento de correntes quando comparado com a geometria Minkowski Island, o que significa que o comprimento elétrico efetivo da antena de Hilbert não pode beneficiar muito da capacidade de preenchimento do espaço disponível que esta geometria tem.



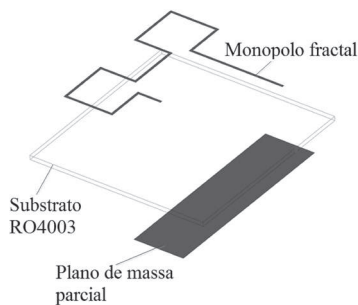
(a) Segunda iteração da geometria Minkowski Island



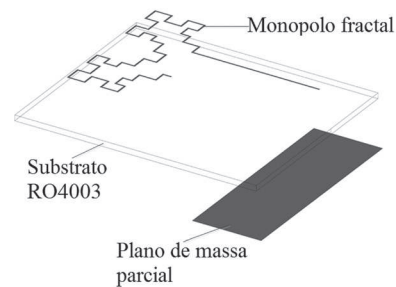
(b) Cancelamento de correntes numa curva de Hilbert.

Figura 8.1

Em [4] são apresentados dois monopolos impressos compactos de banda dupla para aplicações WLAN. Estes dois monopolos são projetados usando a primeira e segunda iteração da geometria fractal Minkowski Island, como se ilustra na Figura 8.2. A Figura 8.2(a) mostra o monopolo impresso com base na primeira iteração Minkowski Island. O seu tamanho é de 28x18mm com um plano de terra parcial no lado de trás do substrato com uma largura de 35mm e um comprimento de 10mm. A largura da linha *microstrip* é de 0.5mm. A Figura 8.2(b) mostra uma outra proposta dum monopolo fractal usando a segunda iteração Minkowski Island. O seu tamanho é de 21.5x18mm e o tamanho do plano de terra é de 30x10mm. A profundidade t , definida na Figura 8.1, é em ambas as antenas de $1/4$ do comprimento do lado ($S/4$) a cada iteração. A largura da linha em ambas as antenas foi definida com base em dois fatores: a impedância de entrada da antena e o facto de a linha *microstrip* ter de ser suficientemente estreita para evitar a intersecção entre linhas adjacentes. Esse problema é mais significativo para fractais de iterações mais elevadas. Como consequência do uso de um fractal com uma iteração mais elevada, mais estreita a linha *microstrip* precisa de ser, passando a ser reduzida para 0.25mm. Ambas as antenas são impressas no lado superior do substrato Roger 4003 com 0.813mm de espessura e permitividade relativa $\epsilon_r = 3.38$ enquanto o plano de terra é impresso na parte inferior. Por trás dos elementos radiantes não há nenhum plano de terra.



(a) - Primeira iteração



(b) - Segunda iteração

Figura 8.2 Vista expandida do monopolo fractal projetado usando a geometria Minkowski Island.

Ambas as antenas monopolo propostas têm um tamanho compacto em relação ao dum monopolo impresso convencional, que precisa de ter um comprimento de cerca de um quarto de comprimento de onda. Além disso, verificou-se que sem utilizar quaisquer técnicas adicionais de adaptação de impedâncias, ambas as antenas propostas apresentam uma boa adaptação de impedância em múltiplas bandas de frequência, o que é confirmado pelos resultados medidos mostrados na Figura 8.3. Estes resultados mostram que a antena impressa com base na primeira iteração Minkowski Island exibe uma perda de retorno inferior a 10dB nas bandas 2.30-2.48, 3.3-3.7 e 4.9-6.0GHz, que cobrem todas as faixas de frequências exigidas para a norma 802.11a/b/g e para as comunicações WiMAX. A

antena baseada na segunda iteração Minkowski Island exibe uma perda de retorno inferior a 10dB nas bandas 2.31-2.47 e 5.0-5.5GHz, que abrangem as duas faixas de frequências desejadas para as normas WLAN 802.11b/g.

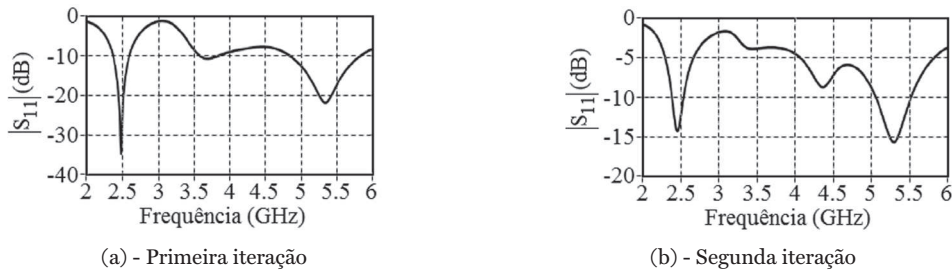


Figura 8.3 Parâmetro $|S_{11}|$, medido, das antenas propostas.

Os resultados das medições mostram também que os diagramas de radiação no plano H são quase isotrópicos e que no plano E têm máximos nas direções transversais, como é típico dum monopolo. O ganho máximo é de cerca de 1.5dBi a 2.45GHz e de 2.3dBi a 5.2GHz para ambas as antenas. De acordo com os resultados da simulação, a eficiência da radiação é de 94% e 88% para 2.45GHz e de 97% e de 93% para 5.26GHz respetivamente, para as antenas da primeira e da segunda iteração Minkowski Island.

A partir destes resultados verifica-se que, embora a maior redução de tamanho possa ser conseguida utilizando maior iteração da geometria fractal, a largura de banda, bem como a eficiência da radiação diminuem. Isto deve ser considerado como um compromisso entre a redução do tamanho da antena e o seu desempenho. A Figura 8.4 mostra os diagramas de radiação medidos nos planos E e H do monopolo fractal usando a segunda iteração Minkowski Island às suas duas frequências ressonantes. As outras medições mostraram que ambas as antenas têm diagramas de radiação semelhantes de modo que os resultados das medições para o outro protótipo (monopolo fractal usando a primeira iteração Minkowski Island) não são mostrados para evitar a repetição.

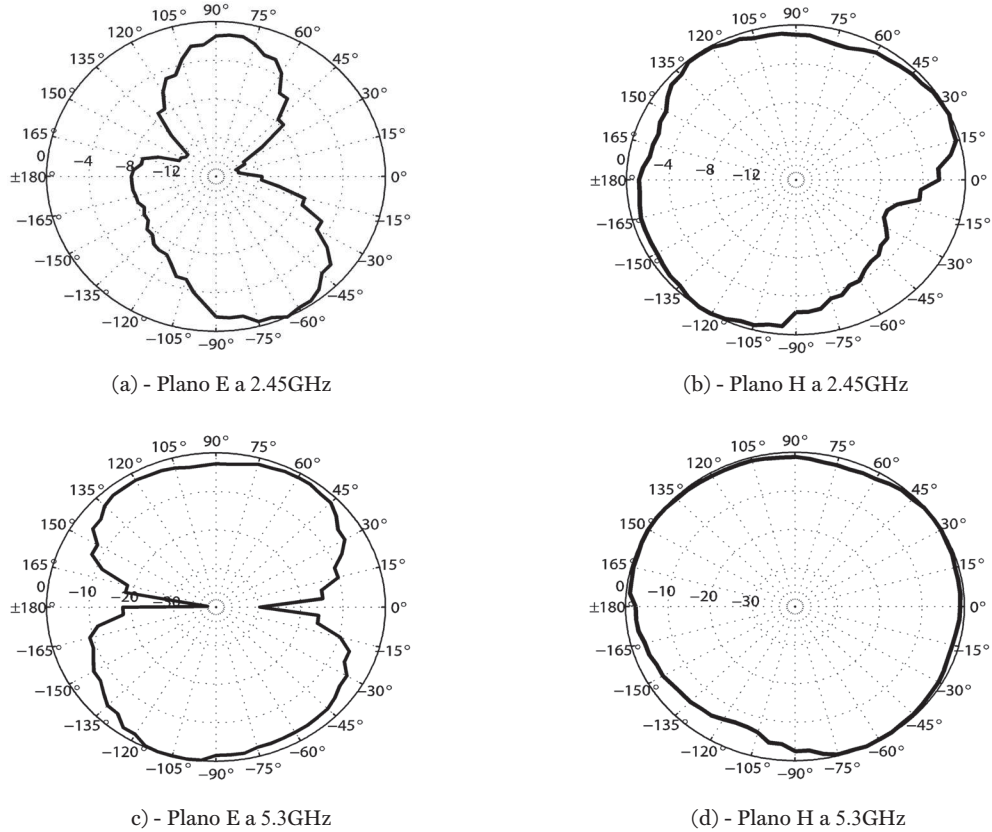


Figura 8.4 Diagramas de radiação, medidos, da antena baseada na segunda iteração Minkowski Island.

8.2.2 Antena fractal tipo ILA

Para uma antena de banda múltipla define-se razão de frequência como o quociente entre a frequência mais alta e a frequência mais baixa. Por exemplo, se tivermos uma antena de banda dupla para operar nas bandas de GPS L1(1.575GHz) e L2(1.227), a razão de frequência é de 1.28. A razão de frequência numa antena fractal de banda múltipla foi investigada em [4], tendo-se concluído que para uma antena utilizando a geometria fractal Minkowski, a razão de frequência da antena é quase fixa. Isto indica que, para aplicar a técnica fractal ao projeto de outras antenas de banda múltipla, há necessidade de explorar uma solução eficaz para superar este limite. Uma técnica que pode ser utilizada para aumentar a razão de frequência em antenas fractais de banda múltipla é combinar a geometria fractal com uma linha meândrica, isto é, com meandros. Uma antena compacta adequada para um dispositivo USB comercial para comunicações sem fios é proposta em [5], usando essa técnica. Como o objetivo é projetar uma antena monopolo fractal impressa para inserir num dispositivo USB do tipo *dongle* para aplicações WLAN, é necessário ter em conta os requisitos industriais pelo que as dimensões globais desta antena, incluindo o plano de massa, são de 20x60mm sendo o espaço disponível para o desenho do monopolo limitado a não mais do que 20x10mm.

Uma variante do fractal Koch, também designada como dipolo de geometria Cohen, foi utilizada neste dispositivo. Esta geometria foi proposta pela primeira vez por Nathan Cohen [6] para conceber uma antena dipolo com a alimentação no centro. Uma possível geometria é a que habitualmente se usa num monopolo impresso típico em que o elemento radiante e a respetiva linha de alimentação são impressos no lado superior do substrato e o plano de terra impresso no lado inferior, ficando o ponto de alimentação localizado na extremidade do substrato tal como se mostra na Figura 8.5.

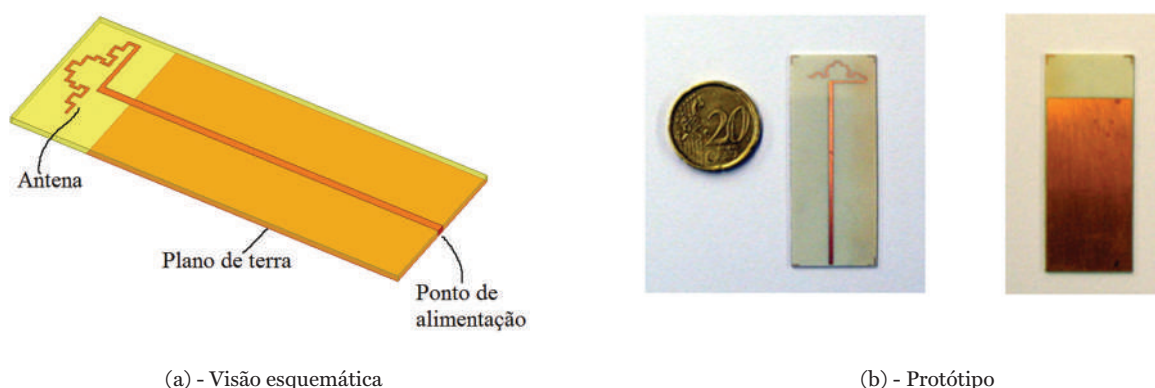
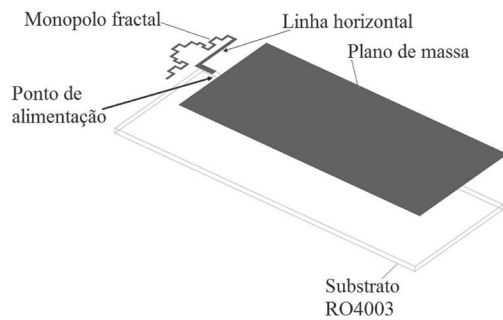


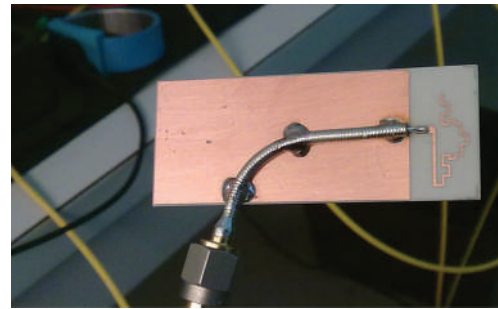
Figura 8.5 Geometria dum monopolo impresso típico.

Isso pode ser um problema num protótipo industrial pois os outros componentes eletrónicos, tais como o módulo de RF, também precisam de ser montados no lado superior do substrato para partilharem o mesmo plano de terra. Tal problema pode ser resolvido usando uma geometria diferente da de um monopolo impresso convencional, colocando o elemento radiante da antena sobre a mesma camada do plano de massa. Este tipo de antena é designado por antena em L invertido *Inverted-L Antenna* (ILA).

A Figura 8.6 mostra a antena ILA proposta em [5]. Esta antena foi projetada para o substrato Roger 4003 com uma constante dielétrica de 3.38 e uma espessura de 0.813mm. O espaço ocupado no substrato pelo monopolo é de 10x20mm e o tamanho do plano de terra é de 50x20mm, que é um tamanho típico para um *dongle* USB. Esta estrutura foi ainda mais aperfeiçoada, fazendo simulações numéricas com o *software* Ansoft HFSS, para se conseguir uma melhor adaptação de impedância nas faixas de frequências pretendidas. Verificou-se que o tamanho da geometria fractal é crítico na definição de ambas as frequências de ressonância enquanto a existência da linha impressa horizontal desempenha o papel de ajustar as frequências de ressonância à região desejada.



(a) - Vista expandida



(b) - Protótipo

Figura 8.6 Antena ILA proposta.

Sem a linha *microstrip* horizontal, verifica-se que a antena proposta só apresenta ressonâncias em torno de 2 e 6GHz, que não cobrem as frequências desejadas para aplicações WLAN de dupla banda. No entanto, acrescentando a linha de *microstrip* horizontal com um comprimento adequado, a razão de frequência da antena fractal pode ser mais controlada. Depois de uma otimização do coeficiente de reflexão na banda de frequências desejada, decidiu-se que a largura da linha *microstrip* seria de 1mm e que a largura da *microstrip* horizontal seria de 0.5mm. Para a largura da linha *microstrip* do elemento fractal optou-se por 0.35mm.

A Figura 8.7 compara os valores do coeficiente de reflexão simulados e medidos. Como se pode observar, existe uma boa concordância entre os valores simulados e medidos. Os resultados experimentais mostram que a antena proposta tem um $|S_{11}| < 10\text{dB}$ nas bandas 2.25-2.60 e 5.06-5.62GHz.

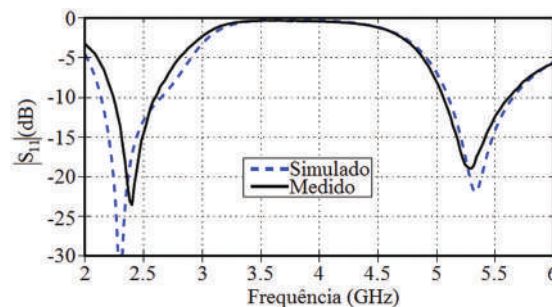


Figura 8.7 Valores do coeficiente de reflexão da antena ILA proposta.

8.2.3 Monopolos impressos compactos com uma indutância do tipo *chip*

Além de se utilizar técnicas fractais para projetar monopolos impressos de tamanho reduzido, outra técnica que pode ser empregue é a de introduzir um elemento concentrado, mais especificamente uma indutância do tipo *chip*, no elemento radiante da antena. Desta forma, o comprimento elétrico efetivo do monopolo impresso é aumentado pelo elemento concentrado, o que é melhor do que empregar geometrias fractais que podem implicar a utilização duma linha *microstrip* de grande comprimento numa área de dimensões limitadas.

A Figura 8.8 mostra a configuração da antena proposta em [7]. A estrutura desta antena é um monopolo com dois braços, sendo a frequência de ressonância obtida fazendo com que o comprimento total de cada braço

seja cerca dum quarto do comprimento de onda efetivo no substrato. O indutor *chip* é incorporado no meio do braço esquerdo e de um modo geral, quanto maior o valor da indutância, menor será a frequência de ressonância que pode ser conseguida. No entanto, o aumento da indutância também vai reduzir a largura de banda e a eficiência de radiação da antena, pelo que um indutor *chip* com uma elevada indutância não foi escolhido.

Esta antena foi impressa num substrato Roger 4003 com uma permissividade relativa de 3.38 e uma espessura de 0.813mm. A antena e o plano de terra foram impressos em lados diferentes do substrato e não há nenhum cobre por baixo da antena.

A área da antena propriamente dita é de 10mm×10.5mm, que é de apenas $0.08\lambda_{2.4\text{GHz}} \times 0.084\lambda_{2.4\text{GHz}}$, onde $\lambda_{2.4\text{GHz}}$ representa o comprimento de onda em espaço livre correspondente à frequência de 2.4GHz.

A banda mais elevada é determinada pelo comprimento global $L4+L5$, que é cerca de um quarto de comprimento de onda a 5.3GHz. Com o indutor *chip*, o comprimento total $L1+L2+L3$, o qual determina a frequência ressonante da banda inferior, é apenas de 12.5 milímetros. Este valor é menor do que o comprimento que seria necessário para antenas monopolo convencionais. Depois de adicionar o indutor *chip*, as frequências de ressonância inferior e superior podem ser ajustadas alterando o comprimento do braço $L3$ e do braço $L5$, respetivamente, como se demonstra na secção seguinte. Otimizando o comprimento e a largura de cada braço, esta antena pode ser sintonizada para ser ressonante às frequências desejadas. Mais detalhes sobre como escolher o valor do indutor *chip* e como modelá-lo podem ser obtidos consultando [7].

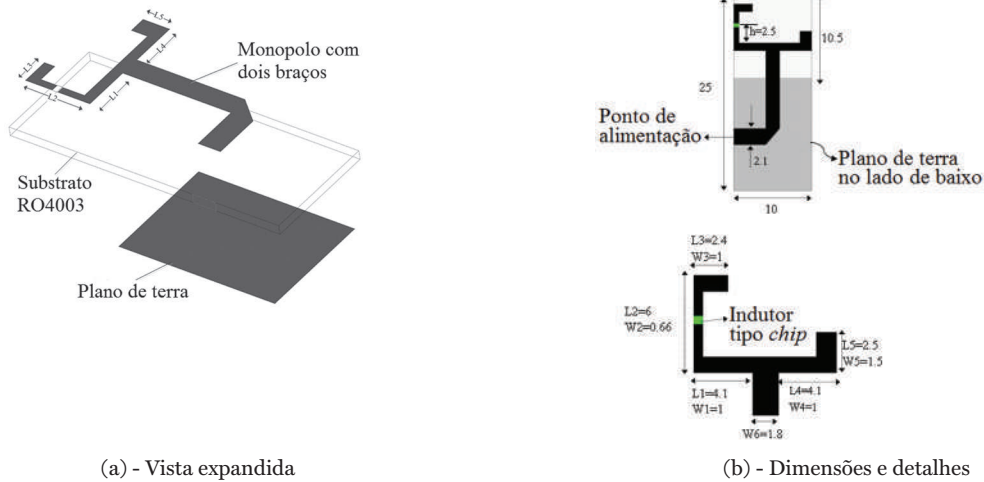


Figura 8.8 Monopolo com dois braços.

Os diagramas de radiação do monopolo de dois braços medidos às frequências de 2.45 e 5.3GHz mostram que a antena tem diagramas de radiação omnidirecionais como um monopolo típico. A Tabela 8-1 apresenta os resultados medidos e simulados, bem como o fator de qualidade calculado, da antena monopolo proposta. O fator de qualidade foi calculado com base nas equações (8-1) obtidas a partir de [8].

$$Q(\omega_0) = \frac{2\sqrt{\beta}}{\text{FBW}_v(\omega_0)}$$

$$\text{FBW}_v(\omega_0) = \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0}$$

$$\sqrt{\beta} = \frac{s - 1}{2\sqrt{s}}$$
(8-1)

onde o parâmetro s é o máximo VSWR assumido e ω_+ , ω_- e ω_0 são respectivamente a frequência mais alta, a frequência mais baixa e a frequência central.

O limite inferior do fator de qualidade, Q_{lb} da antenna foi calculado usando a equação (8-2) obtida de [8].

$$Q_{lb} = \left[\frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka} \right] \quad (8-2)$$

onde a é o raio da esfera que envolve a maior dimensão da antenna e k é o número de onda.

Da Tabela 8-1 pode-se ver que a antenna tem um valor ka menor do que 0.5 e um fator de qualidade muito próximo do seu limite teórico inferior.

Propriedades	Antena da Figura 8.8
Frequência (GHz)	2.45
Dimensões (WxL)mm	10x10.5
a (mm)	7.25
ka	0.37
Eficiência de radiação simulada (%)	72
Q_{lb}	15.9
Largura de banda (%) para um VSWR de 3:1	5.10
Fator de qualidade Q	22.6

Tabela 8-1 Resumo dos principais resultados medidos e simulados da antenna da Figura 8.8

8.3 Monopolo impresso planar de baixo custo para terminais móveis

O rápido crescimento das comunicações móveis acarreta o aumento da necessidade de projetar antenas multibanda o mais compactas possível, para inserir em terminais móveis. A antenna plana em forma de F invertido PIFA (*Planar Inverted-F Antena*) é um dos tipos de antenas convencionais que tem sido amplamente utilizada em telemóveis. Em [9] e [10], foram propostas duas PIFA compactas multibanda para redes WWAN (*Wireless Wide Area Networks*). As antenas são alimentadas por acoplamento capacitivo e a redução do tamanho foi conseguida curto-circuitando um canto da antenna à massa e dobrando a parte plana em forma de calha em U. Antenas impressas do tipo dipolo de ranhura baseados no princípio de Babinet e antenas impressas em forma de anel, também têm sido amplamente estudadas para aplicar em telemóveis multibanda. Em [11] e [12], dois monopolos dobrados do tipo ranhura, que podem cobrir as cinco bandas WWAN, foram propostos para telemóveis do modelo concha (*clam-shell*). Estas duas antenas foram projetadas fazendo várias fendas na parte superior do plano de massa. Em

[13], [14] e [15], antenas em anel de meio comprimento de onda impressas usando linhas meândricas, foram propostas para o projeto de antenas multibanda para telefones celulares. No entanto, todas essas antenas são operacionais apenas nas bandas GSM850/900 e DCS/PCS/UMTS, que não são suficientes para as comunicações sem fios do presente. Para tornar a antena ressonante em mais bandas, incluindo aplicações WLAN, em [16] foi apresentada uma nova estrutura do tipo PIFA combinando *patches* parasitas em curto-circuito, cargas capacitivas e ranhuras para suportar as quatro bandas das comunicações móveis e as duas bandas das redes WLAN. Embora esta antena possa operar em várias bandas, é extremamente difícil de fabricar devido à sua estrutura complexa. Em [17], o funcionamento em multibanda, incluindo a WWAN e a WLAN 2.4GHz, foi conseguido fazendo ranhuras de diferentes comprimentos, no bordo do plano de terra do telefone móvel. O funcionamento em bandas adicionais, incluindo GSM/DCS/PCS/UMTS/WLAN/WiMAX, foi conseguido combinando um monopolo, feito com uma espiral retangular, com um anel também retangular. Ambos os elementos são impressos no mesmo plano do plano de massa, sendo o anel formado ao ligar um dos seus lados ao plano de massa. Esta estrutura é apresentada em [18]. No entanto, o curto-circuito do anel ao plano de massa, faz com que as frequências de ressonância da antena sejam vulneráveis às dimensões do plano de massa. De facto, o tamanho do plano de terra usada em [18] é menor do que o tamanho do plano de massa usado habitualmente num telefone móvel. Outras técnicas também têm sido desenvolvidas para projetar antenas multibanda compactas para comunicações sem fios. Em [19], uma antena multibanda, que pode suportar as bandas WWAN e 2.4GHz WLAN, foi implementada mudando o ponto de alimentação ou variando a ligação da antena à massa. Em [20], uma antena de banda múltipla de dimensões reduzidas para sistemas móveis sem fios foi projetada com base num ressonador de ordem zero (ZOR) feita com um metamaterial artificial designado por *double-negative* (DNG) *composite right/left-handed transmission line* (CRLH-TL) que é a combinação dum material *epsilon-negative* (ENG) e dum material *mu-negative* (MNG). No entanto, analisando esta referência, percebe-se que esta antena tem uma estrutura bastante complexa e, portanto, muito difícil de fabricar. Em [21] um indutor *chip* foi incorporado num monopolo impresso, dando origem a uma antena compacta que pode ter aplicações em terminais móveis.

Um monopolo impresso multibanda compacto para aplicações móveis foi apresentado em [3]. A sua conceção supera algumas das limitações discutidas acima. A Figura 8.9(a) mostra a estrutura da antena proposta e as dimensões principais dos elementos de antena são dadas na Figura 8.9(b). O elemento radiante é impresso no lado de cima do substrato, enquanto que o plano de massa é situado no lado inferior. Por trás da antena monopolo, não há massa. O indutor *chip*, da série Coilcraft 0402HP com uma indutância de 20nH, está inserido entre os ramos A e B como se mostra na Figura 8.9(b).

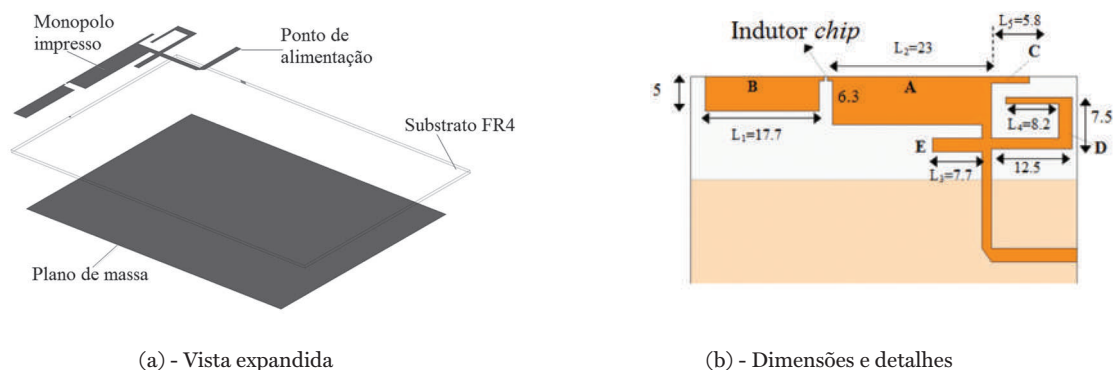


Figura 8.9 Monopolo impresso multibanda apresentado em [3].

Esta antena tem uma estrutura com múltiplos ramos, cada um dos quais determina diferentes frequências de ressonância. A frequência de ressonância mais baixa, 960MHz, é determinada pela indutância do indutor *chip* e pelo comprimento total dos ramos A e B. Embora o indutor *chip* também possa de alguma forma influenciar a frequência

de 1800MHz, esta frequência é determinada essencialmente pelo comprimento do ramo A. O comprimento total do ramo D e o comprimento do ramo E determinam as frequências de 2.4 e 5.2GHz, respetivamente. A banda de frequência de 3.8GHz, está relacionada com o comprimento do ramo C e a largura do ramo A.

Esta antena foi fabricada num substrato barato FR4 com uma permissividade relativa de 4.4 e uma espessura de 0.8mm. A área ocupada é de 100x60mm, que é um tamanho razoável para um PDA ou um *smartphone*. Para conseguir uma melhor adaptação de impedância em cada banda, o comprimento e a largura de cada ramo foram otimizados através de simulações numéricas. Na simulação, usa-se para o indutor *chip* um modelo construído com base nos estudos apresentados em [7]. Como afirmado anteriormente, o indutor *chip* influencia principalmente as primeiras duas faixas de frequências mais baixas. Dentro destas duas bandas de frequência, o valor do indutor *chip* é mais crítico na determinação da frequência mais baixa; como resultado, na determinação dos parâmetros do indutor *chip* a indutância equivalente e resistência em série do modelo foram calculados para 960MHz utilizando as fórmulas fornecidas em [7], sendo de 20.6nH e 2Ω , respetivamente.

A Figura 8.10 compara os valores do coeficiente de reflexão simulados e medidos da antena proposta. A antena foi medida usando um analisador de redes Agilent PNA E8363B. Como se pode observar existe uma boa concordância entre os resultados medidos e de simulados. Os resultados experimentais mostram que, considerando um VSWR de 3:1, isto é $|S_{11}| < 6\text{dB}$, a antena proposta cobre as bandas de 860-1060MHz, 1710-2067MHz, 2360-2500MHz, 3250-4625MHz e 5080-5410MHz, as quais incluem quase todas as faixas de frequências necessárias para as bandas GSM900 (890-960MHz), DCS (1710-1880MHz), PCS (1850-1990MHz), UMTS (1920-2170MHz), as duas bandas WLAN (2400-2484/5150-5350MHz) e ainda a banda WiMAX (3400-3600MHz).

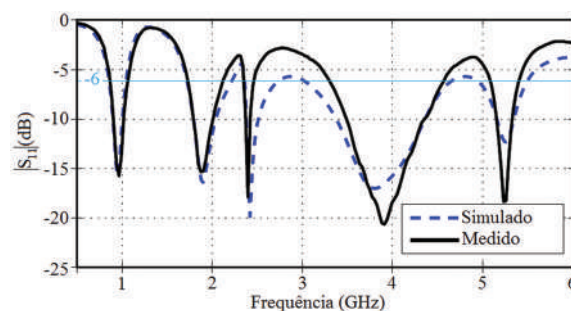


Figura 8.10 Valores do coeficiente de reflexão da antena da Figura 8.9.

A Figura 8.11 apresenta a comparação entre os coeficientes de reflexão da antena simulados com e sem o indutor *chip* embutido. Verificou-se que, sem o indutor *chip* na banda de frequência mais baixa da antena só é ressonante para cerca de 1.1GHz. Introduzindo o indutor *chip*, esta frequência reduz-se para 960MHz e também faz baixar outros modos mais elevados tornando-se ressonante para 1.8GHz. Observa-se também que o indutor *chip* tem pouca influência sobre as frequências de ressonância a 2.4 e 5.2GHz.

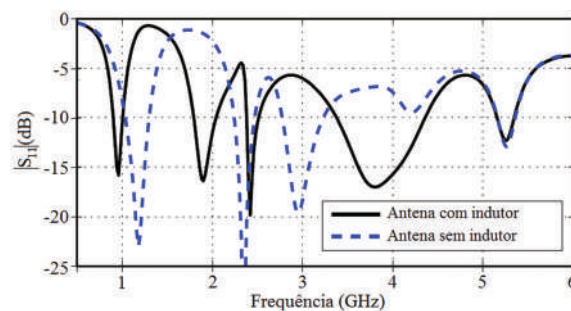


Figura 8.11 Comparação entre os coeficientes de reflexão simulados da antena com e sem o indutor.

A Figura 8.12 mostra a distribuição das correntes superficiais da antenna simuladas para cada uma das frequências de ressonância. Observa-se que a 960MHz existe uma forte corrente nos ramos A e B. A 1800 e 1900MHz, a corrente ocorre principalmente no ramo B. É também claro que os ramos D e E são responsáveis pelas frequências de ressonância de 2.4 e 5.2GHz, respectivamente. Em relação à ressonância a 3.8GHz, vê-se que é determinada principalmente pelo ramo C e pelo acoplamento entre os ramos C e D.

Além de ser uma estrutura completamente plana, a antenna proposta tem ainda a vantagem do tamanho do plano de massa ter pouca influência sobre as suas características ressonantes quando se compara com projetos em que a estrutura da antenna é curto-circuitada ao plano de massa. O monopolo proposto, com diferentes comprimentos do plano de massa, foi investigado. A Figura 8.13 mostra o coeficiente de reflexão simulado da antenna proposta com planos de massa de diferentes comprimentos. Verificou-se que ao diminuir o comprimento do plano de massa, nas bandas de frequência desejadas a antenna apenas exibe pequenos desvios de frequência e pequenas variações da amplitude do coeficiente de reflexão.

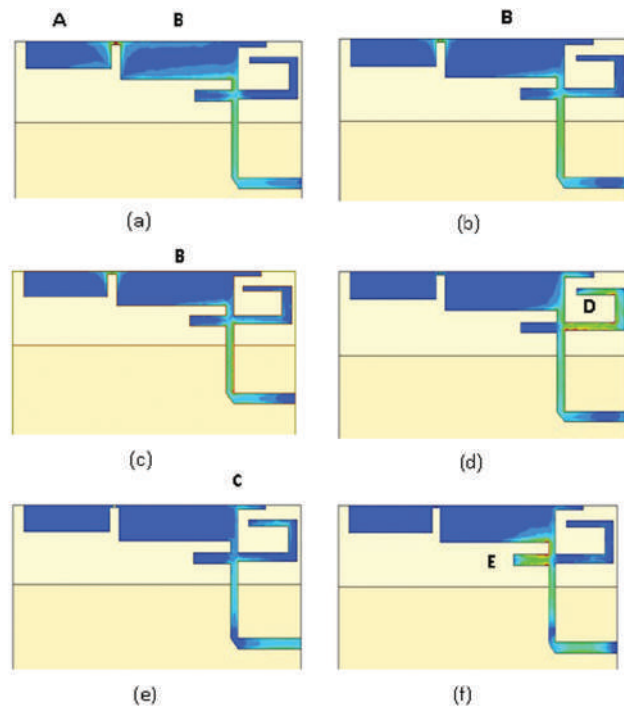


Figura 8.12 Distribuição das correntes superficiais simuladas nos diversos ramos da antenna.

(a) 960MHz (b) 1800MHz (c) 1900MHz (d) 2.4GHz (e) 3.8GHz (f) 5.25GHz.

As correntes mais fortes são representadas pelas cores mais claras.

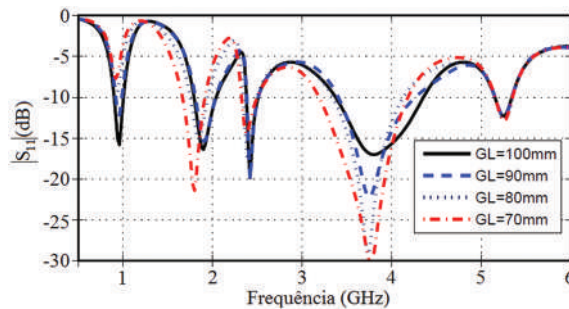


Figura 8.13 Valores do coeficiente de reflexão da antenna da Figura 8.9, para diferentes comprimentos do plano de massa.

O cenário em que a antena é colocada no centro de uma caixa de plástico foi também investigado. No modelo de simulação, a parede da caixa de plástico tem 1mm de espessura, 14mm de altura e uma permitividade dielétrica de 3.5. Os resultados da simulação mostrados na Figura 8.14 indicam que, em comparação com o caso em que a antena irradia no espaço livre, não há quase nenhuma influência no coeficiente de reflexão da antena exceto um pequeno desvio de frequência na banda de 3.8GHz.

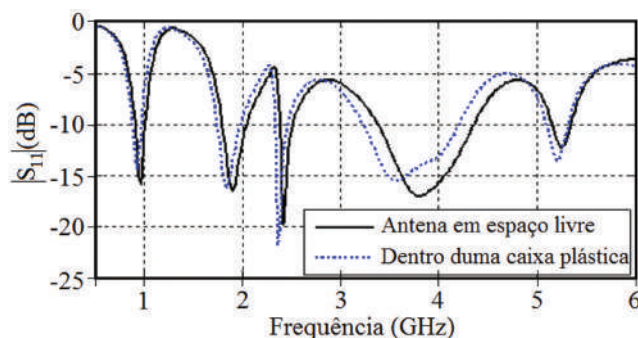


Figura 8.14 Comparação entre os coeficientes de reflexão simulados da antena em espaço livre e dentro uma caixa de plástico.

Os diagramas de radiação da antena medidos em espaço livre estão representados na Figura 8.15. Verificou-se que a todas as frequências pretendidas a antena tem diagramas de radiação semelhantes a um monopolo típico, que normalmente tem diagramas de radiação omnidirecionais. Os resultados das simulações sugerem também que a antena tem um ganho e uma eficiência com valores modestos nas bandas de frequência de interesse. A Tabela 8-2 resume o ganho máximo e a eficiência de radiação nas frequências desejadas. Observou-se que a 5.2GHz, a eficiência da radiação é bastante baixa em comparação com as outras frequências ressonantes. Isto pode ser explicado pelo facto de existir um forte acoplamento entre o ramo B e o ramo E (ver Figura 8.9), e também por o ramo E estar muito próximo do plano de massa, o que origina um impacto negativo sobre a eficiência de radiação.

A taxa de absorção específica (*Specific Absorption Ratio*) SAR também foi analisada. O resultado da simulação indica que o valor SAR médio, sobre 1 grama de tecido da cabeça, é de 1.4W/kg o qual está abaixo do limite de 1.6W/kg recomendado. Espera-se que o valor de SAR, na utilização prática, seja menor do que o simulado devido à influência da caixa exterior dos telefones móveis.

Frequência(GHz)	Ganho máximo(dBi) (Eficiência de radiação)
0.96	1.5 (93.7%)
1.8	2.6 (91.9%)
1.9	2.5 (92.2%)
2.4	2.7 (77.3%)
3.5	2.8 (86.8%)
5.2	1.7 (67.9%)

Tabela 8-2 Ganho máximo e eficiência de radiação nas frequências desejadas da antena da Figura 8.9

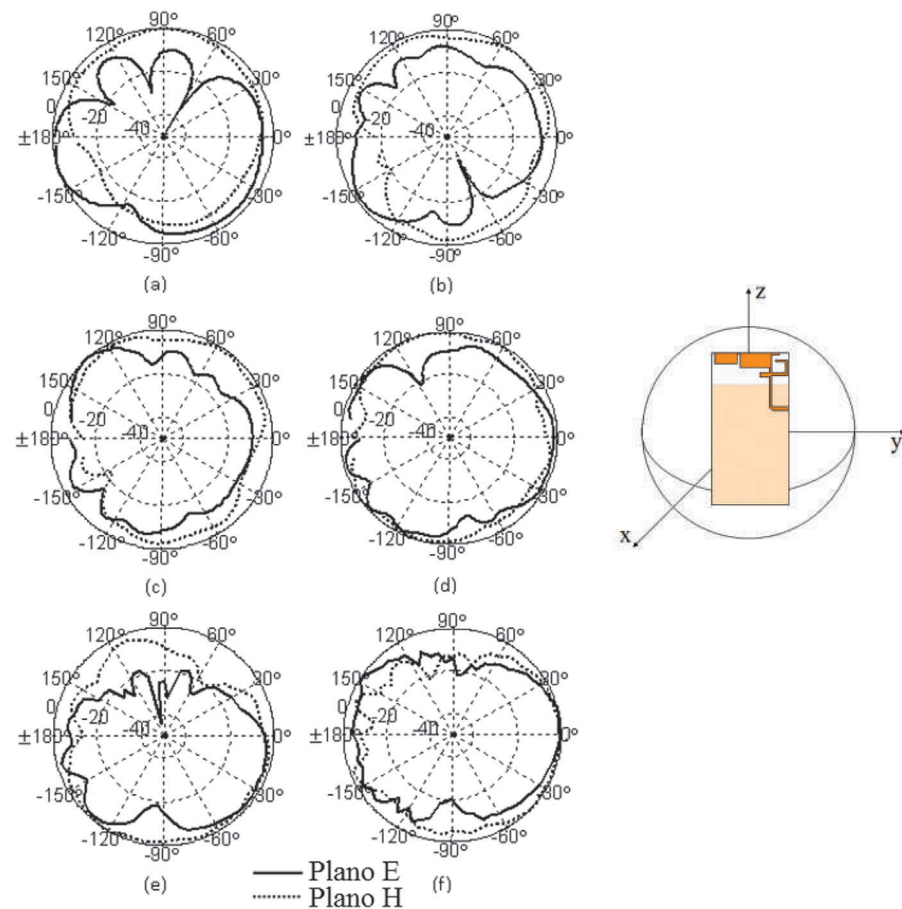


Figura 8.15 Diagramas de radiação medidos da antena da Figura 8.9 nos planos E e H.

(a) 960MHz (b) 1800MHz (c) 1900MHz (d) 2.4GHz (e) 3.5GHz (f) 5.2GHz.

8.4 Agregados de monopolos impressos

Para aumentar a diretividade de um sistema radiante, a utilização de agregados de antenas é uma solução eficaz se houver espaço no equipamento. Agregados com uma única alimentação são fáceis de fabricar e não precisam de componentes de RF extra, tais como variadores de fase. É desejável conceber tal antena como uma estrutura plana, pois isso simplifica o processo de fabrico e reduz o seu custo.

8.4.1 Agregado de monopolos fractais

Um agregado compacto com uma alimentação única, usando monopolos baseados na segunda iteração do fractal Minkowski, concebido para aplicações WLAN de banda dupla é apresentado em [22]. A segunda iteração da geometria fractal Minkowski (ver Figura 8.1) foi escolhida para este projeto devido ao seu tamanho compacto. A Figura 8.16 mostra a geometria proposta para o agregado de monopolos fractais. A antena foi fabricada num substrato Roger 4003 com 0.813mm de espessura e permitividade relativa de 3.38. O substrato tem 112mm de comprimento e 65mm de largura, que é o tamanho típico dum terminal PDA. A antena é constituída por dois monopolos iguais baseados na segunda iteração Minkowski alimentados por uma única linha *microstrip* de 1.89mm de largura. A largura das linhas dos fractais é de 0.25mm que estão ligadas à linha de alimentação por outra linha *microstrip* horizontal com uma largura de 1.2mm. O plano de massa parcial é impresso no lado de trás do substrato e a antena é impressa no lado de cima.

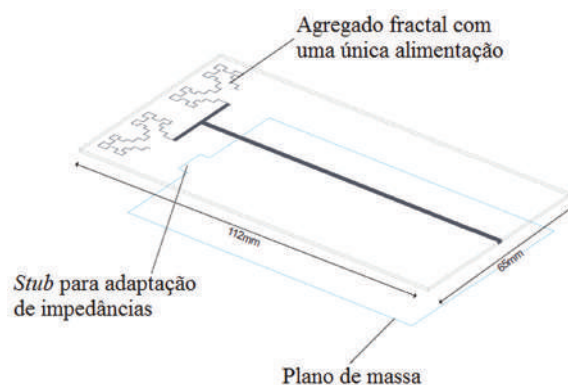


Figura 8.16 Agregado de dois monopolos fractais com uma alimentação única.

Como se pode ver na Figura 8.16, na parte superior do plano de massa foi adicionado um *stub* retangular. Sem a introdução deste *stub* retangular no plano de massa parcial, verifica-se que a largura de banda da antena não é tão boa como seria de esperar: a largura de banda na banda mais alta de 5GHz é bastante estreita. É, portanto, necessário encontrar um método para melhorar a largura de banda da antena na banda mais alta, sem afetar muito a banda inferior. Alguns métodos comuns de adaptar impedâncias tais como o transformador dum quarto de comprimento de onda ou uma linha *microstrip* de largura variável, para além do seu grande tamanho, não são adequados neste caso, uma vez que só podem ser aplicados a antenas de banda única. Depois de várias tentativas, verificou-se que acrescentando um *stub* na borda superior do plano de massa, a adaptação da impedância da antena melhorava sem influir significativamente nas bandas de frequências originais.

A melhoria da adaptação da impedância da antena pela inclusão dum *stub* na borda superior do plano de massa, pode ser explicada através da modelação do *stub* pelo circuito equivalente em L, ilustrado na Figura 8.17 onde Z_a representa a impedância da antena. O valor da indutância L_1 e da capacidade C_1 para cada frequência de ressonância é determinada pelo tamanho/forma do *stub* e pela espessura/permitividade do substrato. Para a antena proposta em [22], devido ao uso da geometria fractal, a qual tem a vantagem de auto-afinidade e de exibir características de radiação semelhantes em múltiplas frequências de ressonância, a adaptação de impedância foi melhorada simultaneamente a ambas as frequências de ressonância com a inserção de um circuito equivalente em L. Isso é uma vantagem adicional da utilização de monopolos fractais no projeto de antenas.

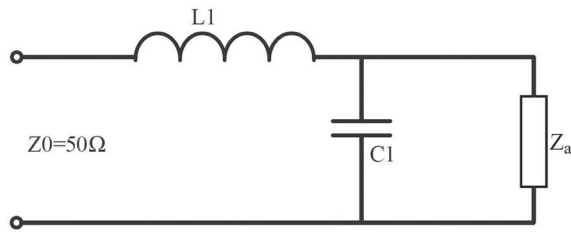


Figura 8.17 Antena com um circuito equivalente em L.

A Figura 8.18 compara os valores do coeficiente de reflexão simulados e medidos da antena proposta. Pode-se observar que após a otimização do *stub* foi possível aumentar a largura de banda da antena que tem um $|S_{11}| < 10\text{dB}$ nas bandas 2.32-2.49 e 5.1-5.88GHz, que cobrem as bandas de 2.4, 5.2 e 5.8GHz necessárias para as aplicações de 802.11a/b/g. Comparando os resultados medidos e simulados, observam-se alguns desvios de frequência, que podem ser causados pela precisão de fabrico ou pela incerteza da constante dielétrica do substrato. Ajustando o tamanho da geometria fractal, as frequências de ressonância podem ser facilmente sintonizadas para os valores desejados.

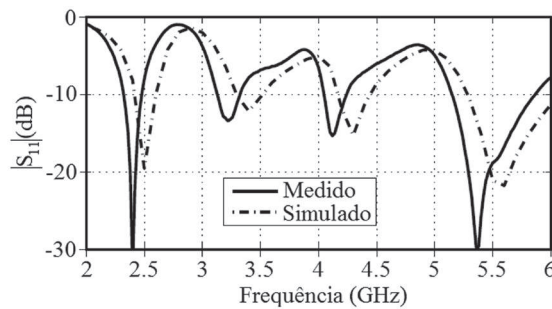


Figura 8.18 Coeficiente de reflexão da antena da Figura 8.16 adequada às dimensões dum PDA.

Os diagramas de radiação medidos estão representados na Figura 8.19. Estes diagramas mostram que na faixa inferior, o diagrama de radiação deste agregado é semelhante ao dum monopolo impresso normal, o qual tem um diagrama de radiação isotrópico no plano H e dois lobos transversais no plano E. Na banda superior, os diagramas de radiação, tanto a 5.2 como a 5.8GHz são mais ou menos omnidirecionais, mas apresentam alguns mínimos no plano E, que são devidos ao cancelamento da radiação proveniente dos dois elementos radiantes. Os resultados das medições indicam também que o ganho máximo deste agregado pode chegar a 2.3dBi na banda inferior e a 5.6dBi na banda superior. Em comparação com o caso de um único elemento, uma melhoria de pelo menos 2dB foi obtida. Com base nos resultados da simulação, a eficiência da radiação deste agregado é de 86% a 2.4GHz, de 82% a 5.2GHz e de 89% a 5.8GHz.

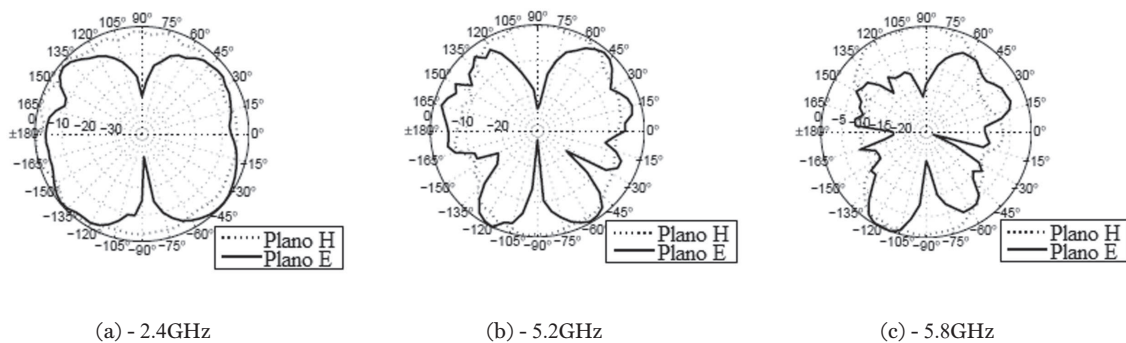


Figura 8.19 Diagramas de radiação medidos da antena da Figura 8.16 nos planos E e H.

8.4.2 Agregado antenas em L invertido para aplicações MIMO

As técnicas de *Multiple-Input-Multiple-Output* (MIMO) permitem que um terminal sem fios possa transmitir ou receber dados com maiores taxas de transferência. O protocolo IEEE 802.11n recentemente anunciado e a norma *Long Term Evolution* (LTE) exigem que os dispositivos de redes LAN e os terminais móveis suportem a técnica MIMO. A utilização de agregados pode melhorar o desempenho da antena em termos de diversidade, a qual por sua vez, aumenta a capacidade do canal por reduzir o desvanecimento do sinal e suprimir tanto a modulação de frequência aleatória como a interferência entre canais. O maior desafio na conceção de agregados compactos é conseguir manter um bom isolamento entre as antenas que o compõem estando elas tão pouco espaçadas. Para se ter uma boa diversidade espacial, tradicionalmente a distância entre cada um dos elementos deve ser cerca de metade do comprimento de onda. No entanto, para a maior parte dos terminais disponíveis no mercado é impossível seguir essa regra devido às restrições de tamanho.

Projetar uma antena WLAN para um dispositivo USB tipo *dongle* requer técnicas de miniaturização, pois o volume disponível para a implementação da antena é muito pequeno comparado com o comprimento de onda correspondente à frequência a usar. Trata-se realmente dum grande desafio. Como um exemplo, em [23] é apresentada uma antena para WLAN a 2.4GHz do tamanho dum cartão de memória USB recorrendo a uma antena trapezoidal dobrada. Num *dongle* USB, o volume disponível para a montagem da antena é tipicamente cerca de $10 \times 17 \times 5 \text{ mm}^3$. Na conceção de agregados de antenas para dispositivos USB, melhorar o isolamento entre cada elemento de antena é um enorme desafio, uma vez que os elementos têm que ser colocados muito próximos. Em [24] foi proposto um agregado de duas antenas de banda dupla. Um elemento é colocado num canto do circuito impresso (PCB) e é constituído por uma *patch* em forma de L, um pino de passagem e uma linha impressa ligando o pino de passagem à massa. O segundo elemento é a imagem do primeiro e está colocado no outro canto do PCB. Para se atingir o desempenho esperado, esta antena precisa duma fabricação precisa e os resultados experimentais mostram que o isolamento deste agregado a 2.4GHz é inferior a 9dB. Em [25] é apresentado um agregado MIMO para WiMAX móvel a 3.5GHz. Esta antena tem uma estrutura 3D e o elevado isolamento foi conseguido através de um plano de massa comum em forma de T. As desvantagens deste agregado são a sua dificuldade de fabrico e o facto do tamanho do plano de massa ter um grande efeito sobre o desempenho de radiação da antena.

Recentemente, um novo método, denominado técnica de neutralização foi proposto em [26]. Usando este método, o isolamento entre duas PIFAs (*Planar Inverted-F Antennas*) pode ser melhorado por meio de neutralização da corrente mútua induzida entre as duas antenas, sem a necessidade de aumentar o espaço destinado ao agregado.

Em [27] é proposto um agregado de antenas em forma de L invertido, de baixo custo e compacto para aplicações MIMO. Este agregado é projetado para ser aplicado em *dongles* USB destinados a serem usados em redes WLAN a 5.8GHz. A Figura 8.20 mostra a estrutura duma antena ILA (*Inverted-L Antenna*) clássica. A ILA pode ser vista como um monopolo dobrado devendo o seu comprimento total, $L_1 + L_2$, ser cerca de um quarto do comprimento de onda da frequência de interesse. No entanto, na conceção do agregado a dificuldade é que as duas antenas têm que ficar colocadas na pequena área ocupada por um *dongle* USB.

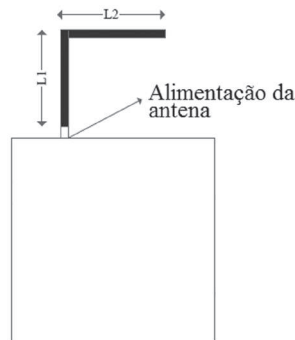
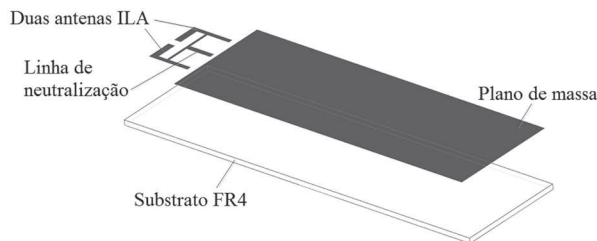
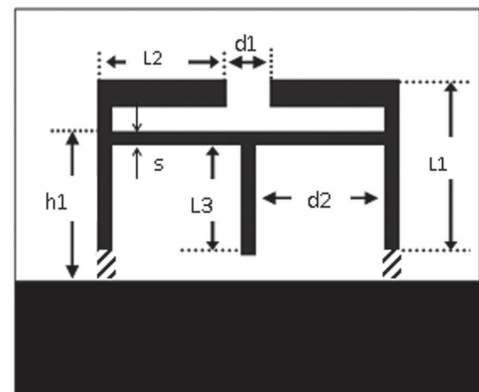


Figura 8.20 Estrutura dum antena ILA (*Inverted-L Antenna*) clássica.

A Figura 8.21 ilustra a estrutura proposta para um agregado de duas antenas em forma de L invertido. A Tabela 8-3 resume as principais dimensões deste agregado. A antena proposta é fabricada num substrato FR4 com 0.8mm de espessura, com uma permissividade relativa de 4.4 e uma tangente de perdas de 0.02. A distância entre os dois pontos de alimentação é de $0.15\lambda_{5.8\text{GHz}}$ e o espaçamento d_1 entre as antenas é apenas de $0.02\lambda_{5.8\text{GHz}}$ onde $\lambda_{5.8\text{GHz}}$ representa o comprimento de onda em espaço livre correspondente à frequência de 5.8GHz. Este agregado é constituído por duas antenas ILA iguais que estão localizadas dentro de uma pequena área na placa PCB do *dongle* USB. Com base no conceito proposto em [26], uma linha de neutralização é inserida entre os dois elementos para aumentar o isolamento entre eles. O comprimento da linha de neutralização é crítico na determinação da banda de frequências na qual o isolamento entre os dois pontos de alimentação das antenas pode ser melhorado. Aumentando o comprimento da linha de neutralização pode-se conseguir que o agregado tenha um bom isolamento na banda de frequências mais baixa. De acordo com [26], a linha neutralizante deve ser colocada onde a corrente de superfície é máxima (E mínimo) e o seu comprimento deve ser de aproximadamente um quarto de comprimento de onda.



(a) - Vista expandida



(b) - Dimensões e detalhes

Figura 8.21 Estrutura dum agregado de duas antenas em forma de L invertido.

Parâmetro	Dimensões (mm)
L_1/W_1	6.65/0.7
L_2/W_2	4/1.1
L_3/W_3	4.1/0.8
h_1	5.1
d_1	1.2
d_2	3.5
s	0.4

Tabela 8-3 Principais dimensões deste agregado da Figura 8.21

Em [27] mostra-se que este agregado apresenta uma baixa adaptação de impedância à frequência desejada. A baixa impedância de entrada da antena ILA é uma das suas desvantagens [28]. O método típico empregue para resolver este problema da ILA é curto-circuitar a antena ao plano de massa e mudar a posição da alimentação, o que aumenta a sua impedância de entrada. Fazendo isto, a antena se torna-se uma antena em F invertido IFA (*Inverted-F Antenna*), cuja impedância de entrada é mais fácil de ser adaptada. No entanto, curto-circuitar a antena ao plano de massa vai aumentar o impacto do seu tamanho no desempenho de radiação da antena.

Ao conectar o *dongle* USB a um PC, por exemplo, o tamanho equivalente do plano de massa aumenta. Neste cenário, a antena pode deixar de funcionar como devia na faixa de frequências desejada. Além disso, o isolamento entre as antenas pode também ser influenciado pelo facto de as curto-circuitar a um plano de massa comum. Portanto, é melhor resolver esta limitação, sem recorrer ao curto-circuito direto das antenas ao plano de massa. Em vez disso, a técnica proposta em [27] melhora a adaptação da impedância do agregado ao incluir um *stub* vertical no meio da linha de neutralização, tal como ilustrado na Figura 8.21. No que diz respeito ao agregado, em que o isolamento entre as antenas é a maior preocupação, a inclusão deste *stub* tem pouca influência no isolamento pois este é controlado principalmente pelo comprimento, pela largura e pela posição da linha de neutralização horizontal. Considerando uma única antena, a sua estrutura equivalente é a dum monopolo dobrado com um *stub* em forma de L, que funciona como um transformador de impedâncias, como se mostra na Figura 8.22.

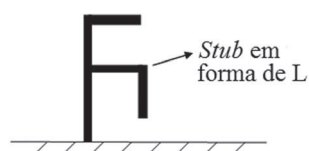


Figura 8.22 Antena ILA com um stub em forma de L.

A Figura 8.23 mostra o coeficiente de reflexão medido e o isolamento do agregado proposto. Os resultados das medições sugerem que o agregado tem perdas de retorno inferiores a 10dB na banda de 5.7 a 6.0GHz, que é mais do que a especificação necessária para a banda WLAN 5.8GHz (5.725-5.875GHz). Isso faz com que o desempenho da antena proposta seja mais robusto durante a fase de integração no produto, tais como a imunidade à proximidade de outros componentes e ao encapsulamento, proporcionando assim alguma margem de manobra contra possíveis efeitos de proximidade que se traduzam por desvios de frequência. Também se verifica que o isolamento entre as duas antenas é sempre melhor do que 10dB desde 5.5 até 6.0GHz e dentro da banda WLAN desejada, um isolamento de 12dB ou superior é obtido. Observa-se que há algumas diferenças de frequência (menos do que 100MHz) entre os coeficientes a reflexão medidos nas duas entradas do agregado. Isto é devido à precisão de fabrico e à soldadura do cabo de alimentação, que resulta na resposta assimétrica dos dois elementos do agregado. Os resultados medidos indicam que o agregado proposto exibe um ganho máximo da ordem de 2.5dBi a 5.8GHz.

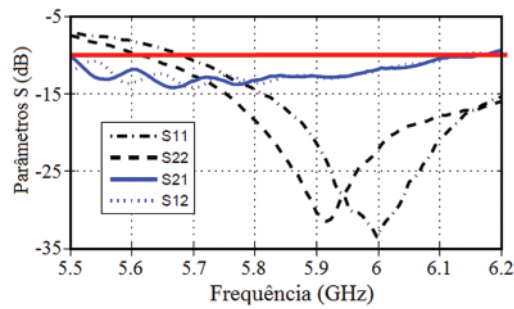


Figura 8.23 Coeficientes de reflexão e transmissão da antena da Figura 8.21.

8.5 Desenvolvimentos recentes

Já se viu neste capítulo que a utilização de duas linhas impressas pode contribuir para a conceção de um monopolo de banda dupla. De acordo com [29], se em vez de se usar duas linhas se usar três, pode-se projetar um monopolo de banda tripla. A estrutura do monopolo de banda tripla está ilustrada na Figura 8.24. Como se pode ver, a antena tem três linhas cada uma das quais corresponde a uma dada frequência de ressonância.

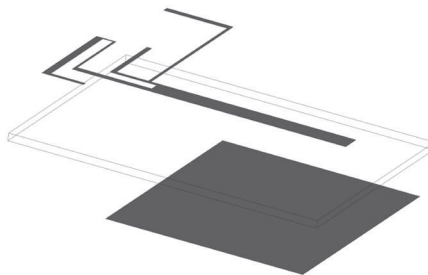


Figura 8.24 Estrutura esquemática do monopolo de banda tripla descrito em [29].

Isto parece sugerir que, com a introdução de múltiplas linhas, se pode obter uma antena multibanda. Esta é uma das vantagens das antenas do tipo monopolo impresso em comparação com outros tipos de antenas. No entanto, a dificuldade desta abordagem reside na forma de adaptar a impedância do monopolo às diferentes frequências e em reduzir a influência dos acoplamentos mútuos entre as diferentes linhas. Já se viu também que, utilizando linhas meândricas ou inserindo um indutor *chip* se pode conseguir a redução do tamanho do monopolo. Recentemente, em [30] foi proposta uma antena de banda larga para ser aplicada num *tablet* PC com vista a aplicações LTE/WWAN. Este monopolo foi projetado usando linhas meândricas e um indutor *chip*, reduzindo-se assim significativamente o tamanho da antena e conseguindo-se simultaneamente obter um funcionamento multibanda. Do mesmo modo, em [31] propõe-se um pequeno monopolo impresso para aplicações DVB constituído por uma linha meândrica com um varator nela introduzido. Inserindo o varator no elemento radiante, não só o tamanho da antena é reduzido, como também alguma reconfigurabilidade de frequência pode ser alcançada. Portanto, pode-se concluir que a combinação de diferentes técnicas de miniaturização de antena para projetar um monopolo impresso pequeno é uma abordagem eficaz. A Figura 8.25 ilustra um exemplo da introdução dum elemento concentrado numa estrutura com uma linha meândrica.

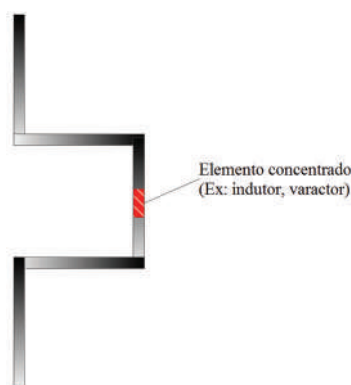


Figura 8.25 Exemplo da introdução dum elemento concentrado numa linha meândrica.

Para projetar um agregado compacto de monopolos para aplicações MIMO, a questão chave é manter um isolamento elevado entre dois ou mais elementos radiantes quando eles estão muito próximos. Os resultados das simulações apresentados em [32] mostram que a orientação dos elementos pode ser crítica para determinar o isolamento entre eles. Por exemplo, com o espaçamento entre os dois elementos de apenas um décimo do comprimento de onda, quando os dois são ortogonalmente orientados, conforme se mostra na Figura 8.26, uma melhoria no isolamento de cerca de 10dB pode ser obtida. Isto pode ser explicado pela diversidade de polarização. No entanto, esta abordagem não será possível se for necessária uma única polarização para o sinal a receber.

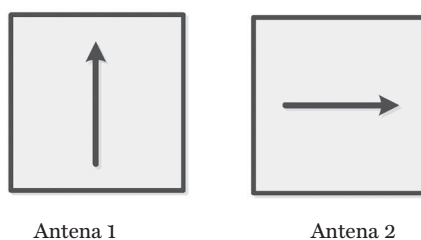


Figura 8.26 Exemplo de dois elementos colocados ortogonalmente.

Recentemente, uma nova abordagem com base na técnica de neutralização, que já foi introduzida neste capítulo, foi proposta em [33]. A Figura 8.27 mostra a configuração da linha de neutralização. Nesta abordagem, um elevado isolamento numa banda larga de frequência é alcançado através da criação de quatro caminhos de correntes entre os dois elementos da antena, o que se consegue unindo a linha de neutralização aos elementos e também à linha de alimentação no ponto de máxima corrente. Os resultados experimentais fornecidos em [33] mostram que este é um método eficaz para projetar um agregado compacto de banda larga para aplicações MIMO. Este método constitui um novo desenvolvimento da técnica de neutralização convencional proposta em [26].

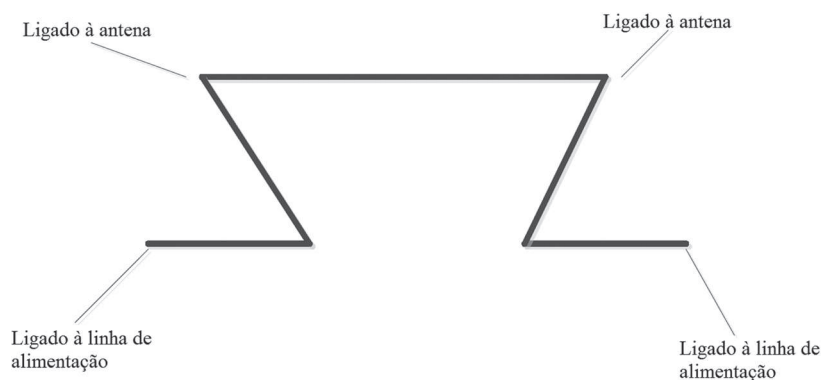


Figura 8.27 Linha de neutralização proposta em [33].

8.6 Conclusões

Neste capítulo foram introduzidas várias técnicas que podem ser utilizadas para conceber antenas do tipo monopolos impressos e agregados compactos de baixo custo. Quer utilizando algumas geometrias especiais (por exemplo, fractais) quer inserindo elementos concentrados nos elementos radiantes, é possível implementar monopolos multibanda de tamanho reduzido. Os estudos recentes também indicam que a combinação de ambos os métodos dá origem a uma redução adicional do tamanho. No entanto, a desvantagem é que o desempenho da radiação da antena será influenciado. No caso dos agregados compactos de monopolos impressos, a utilização da técnica de neutralização tem provado ser um método eficaz revelando-se simples e de baixo custo. Para se obter um funcionamento de banda larga, a linha de neutralização modificada proposta em [33] fornece uma boa solução.

Referências

- [1] CHU, L. J., "Physical Limitations of Omni-Directional Antennas," *Journal of Applied Physics*, vol. 19, no. 12, pp. 1163-1175, 1948.
- [2] MANDELROT, B. B., *The fractal geometry of nature*, Updated and augmented ed., New York:W.H. Freeman, 1983.
- [3] LUO, Q., *Design synthesis and miniaturization of multiband and reconfigurable microstrip antenna for future wireless applications*, Tese de doutoramento, Universidade do Porto, 2012.
- [4] LUO, Q.; SALGADO, H. M.; PEREIRA, J. R., "Fractal Monopole Antenna Design Using Minkowski Island Geometry," *2009 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium and URSI National Radio Science Meeting*, Vols 1-6, pp. 2639-2642, 2009.
- [5] LUO, Q.; PEREIRA, J. R.; SALGADO, H. M., "Inverted-L Antenna (ILA) Design Using Fractal for WLAN USB Dongle," *In Proceedings of Conference on Electronics, Telecommunications and Computers*, Lisbon, Portugal, November 2011.
- [6] COHEN, N., "Fractal antenna applications in wireless telecommunications," *In Electronics Industries Forum of New England, 1997. Professional Program Proceedings*, pages 43-49, 1997.
- [7] LUO, Q.; PEREIRA, J. R.; SALGADO, H. M., "Compact Printed Monopole Antenna With Chip Inductor for WLAN," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 10, pp. 880-883, 2011.
- [8] YAGHJIAN, A. D.; BEST, S. R., "Impedance, bandwidth, and Q of antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 4, pp. 1298-1324, 2005.
- [9] WONG, K. L.; HUANG, C. H., "Compact multiband PIFA with a coupling feed for internal mobile phone antenna," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 50, no.10, pp. 2487-2491, Oct, 2008.
- [10] CHANG, C. H.; WONG, K. L.; ROW, J. S., "Coupled-Fed Small-Size Pifa for Penta-Band Folder-Type Mobile Phone Application," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 51, no. 1, pp. 18-23, Jan, 2009.
- [11] LIN, C. I.; WONG, K. L., "Printed monopole slot antenna for penta-band operation in the folder-type mobile phone," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 50, no. 9, pp. 2237-2242, Sep, 2008.

- [12] CHU, F. H.; WONG, K. L., "Simple Folded Monopole Slot Antenna for Penta-Band Clamshell Mobile Phone Application," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 11, pp. 3680-3684, Nov, 2009.
- [13] WONG, K. L.; HUANG, C. H., "Printed loop antenna with a perpendicular feed for penta-band mobile phone application," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 7, pp. 2138-2141, Jul, 2008.
- [14] LIN, C. I.; WONG, K. L., "Internal meandered loop antenna for GSM/DCS/PCS multiband operation in a mobile phone with the user's hand," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 49, no. 4, pp. 759-765, Apr, 2007.
- [15] CHI, Y. W. ; WONG, K. L., "Half-wavelength loop strip capacitively fed by a printed monopole for penta-band mobile phone antenna," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 49, no. 4, pp. 759-765, Apr, 2007.
- [16] CIAIS, P.; STARAJ, R.; KOSSIAVAS, G.; et al., "Compact internal multiband antenna for mobile phone and WLAN standards," *Electronics Letters*, vol. 40, no. 15, pp. 920-921, Jul 22, 2004.
- [17] LIN, C. I.; WONG, K. L., "Printed monopole slot antenna for internal multiband mobile phone antenna," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 12, pp. 3690-3697, Dec, 2007.
- [18] HSUAN-WEI, H.; YI-CHIEH, L.; KWONG-KAU, T.; et al., "Design of a Multiband Antenna for Mobile Handset Operations," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 8, pp. 200-203, 2009.
- [19] MAK, A. C. K.; ROWELL, C. R.; MURCH, R. D.; et al., "Reconfigurable Multiband Antenna Designs for Wireless Communication Devices," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 7, pp. 1919-1928, 2007.
- [20] JI, J. K.; KIM, G. H.; SEONG, W. M., "A Compact Multiband Antenna Based on DNG ZOR for Wireless Mobile System," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 8, pp. 920-923, 2009.
- [21] WONG, K. L.; CHEN, S. C., "Printed Single-Strip Monopole Using a Chip Inductor for Penta-Band WWAN Operation in the Mobile Phone," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 3, pp. 1011-1014, Mar, 2010.
- [22] LUO, Q.; SALGADO, H. M.; PEREIRA, J. R., "Printed fractal monopole antenna array for WLAN," *International Workshop on Antenna Technology (iWAT)*, Lisbon, 2010, pp. 1-4.
- [23] SEKINE, K.; IWASAKI, H., "USB Memory Size Antenna for 2.4 GHz Wireless LAN and UWB," *38th European Microwave Conference*, Amsterdam, 2008, pp. 1173-1176.
- [24] GUMMALLA, A.; ACHOUR, M.; POILASNE, G.; et al., "Compact Dual-Band Planar Metamaterial Antenna Arrays for Wireless Lan," *2008 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Vols 1-9, pp. 4595-4598, 2008.
- [25] KWON, J.; KIM, D.; LEE, Y.; CHOI, J., "Design of a MIMO antenna for USB dongle application using common grounding," *13th International Conference on Advanced Communication Technology (ICACT)*, Seoul, 2011, pp. 313-316.
- [26] LUXEY, C., "Design of multi-antenna systems for UMTS mobile phones," *Loughborough Antennas & Propagation Conference, 2009*, Loughborough, 2009, pp. 57-64.
- [27] LUO, Q.; QUIGLEY, C.; PEREIRA, J. R.; SALGADO, H. M., "Inverted-L antennas array in a wireless USB dongle for MIMO application," *6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, Prague, 2012, pp. 1909-1912.
- [28] CHEN, Z. N., "Note on impedance characteristics of L-shaped wire monopole antenna," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 26, no. 1, pp. 22-23, 2000.
- [29] KU, C. H.; LI, L. K.; MAO, W. L., "Compact Monopole Antenna with Branch Strips for Wlan/Wimax Operation," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 52, no. 8, pp. 1858-1861, Aug, 2010.
- [30] CHANG, S. H.; LIAO, W. J., "A Broadband LTE/WWAN Antenna Design for Tablet PC," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 9, pp. 4354-4359, Sep, 2012.
- [31] KOMULAINEN, M.; BERG, M.; JANTUNEN, H.; et al., "Compact varactor-tuned meander line monopole antenna for DVB-H signal reception," *Electronics Letters*, vol. 43, no. 24, pp. 1324-1326, 2007.
- [32] ABUTARBOUSH, H. F.; NILAVALAN, R.; CHEUNG, S. W.; et al., "Compact Printed Multiband Antenna With Independent Setting Suitable for Fixed and Reconfigurable Wireless Communication Systems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 8, pp. 3867-3874, Aug, 2012.
- [33] SEE, C. H.; ABD-ALHAMEED, R. A.; ABIDIN, Z. Z.; et al., "Wideband Printed MIMO/Diversity Monopole Antenna for WiFi/WiMAX Applications," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 4, pp. 2028-2035, Apr, 2012.