

ÓPTICA

TÍTULO

Óptica: Incluindo 100 Problemas Resolvidos e 100 Problemas Propostos

AUTOR

Mário F. S. Ferreira

DESIGN E PAGINAÇÃO

Mafalda Frade

EDITORA

UA Editora

Universidade de Aveiro

Serviços de Biblioteca, Informação Documental e Museologia

1.^a EDIÇÃO – Julho 2022

ISBN

978-972-789-787-2

Por opção do autor, no presente livro não foi utilizado o novo Acordo Ortográfico.

Mário F. S. Ferreira

ÓPTICA

**Incluindo 100 problemas resolvidos
e 100 problemas propostos**

**UA Editora
2022**

Índice

PREFÁCIO	9
1. A NATUREZA DA LUZ	11
1.1 Modelos para a luz – Uma perspectiva histórica.....	11
1.2 Teoria electromagnética para a luz	15
1.2.1 Equações de Maxwell	16
1.2.2. Ondas electromagnéticas.....	17
1.2.3. Densidade e fluxo de energia	18
1.2.4. Fórmulas de Fresnel.....	19
1.2.5. O limite da óptica geométrica.....	21
1.3. Problemas resolvidos.....	23
1.4. Problemas propostos.....	31
1.5. Referências bibliográficas.....	32
2. ÓPTICA GEOMÉTRICA	33
2.1. Reflexão num espelho plano	33
2.2. Espelhos esféricos	34
2.3. Lei de Snell para a refracção.....	36
2.4. Refracção numa superfície esférica.....	36
2.5. A lente delgada.....	37
2.6. O método matricial	38
2.7. Matriz de sistema para a formação de imagem.....	41
2.8. Sistemas ópticos periódicos	42
2.9. Aberrações	43
2.9.1. Aberrações monocromáticas	43
2.9.2. Aberrações cromáticas	46
2.10. Problemas resolvidos.....	48
2.11. Problemas propostos.....	60
2.12. Referências bibliográficas.....	62
3. INTERFERÊNCIA	63
3.1. Interferência de duas ondas.....	63
3.2. Representação complexa	65
3.3. Interferência por divisão da frente de onda.....	67
3.3.1. A experiência de Young.....	67
3.3.2. O espelho duplo de Fresnel.....	68

3.3.3. O biprisma de Fresnel	69
3.3.4. O espelho de Lloyd	70
3.3.5. O interferómetro de Rayleigh	70
3.4. Interferência por divisão de amplitude	71
3.4.1. Franjas de Haidinger	72
3.4.2. Franjas de Fizeau	73
3.4.3. Anéis de Newton	73
3.5. O interferómetro de Michelson	74
3.6. O interferómetro de Mach-Zehnder	75
3.7. O interferómetro de Sagnac	76
3.8. Interferômetros com fibras ópticas	77
3.9. Interferência por reflexões múltiplas	79
3.10. O interferómetro de Fabry-Perot	80
3.11. Coerência	82
3.11.1. Comprimento e tempo de coerência	82
3.11.2. Função de coerência mútua e grau de coerência	83
3.11.3. Coerência temporal	84
3.11.4. Coerência espacial	85
3.12. Problemas resolvidos	87
3.13. Problemas propostos	96
3.14. Referências bibliográficas	98

4. DIFRACÇÃO

4.1. O integral de difracção	99
4.2. Difracção de Fraunhofer	101
4.2.1. Difracção por uma fenda simples	102
4.2.2. Difracção por várias fendas	103
4.2.3. Difracção por uma abertura circular	104
4.3. Difracção de Fresnel	105
4.3.1. Propagação livre de uma onda esférica	106
4.3.2. Difracção por aberturas ou obstáculos circulares	107
4.3.3. Placas zonadas	108
4.3.4. Difracção por uma abertura rectangular	110
4.3.5. Difracção por uma fenda	111
4.3.6. Difracção por um ecrã opaco semi-infinito	112
4.4. Problemas resolvidos	113
4.5. Problemas propostos	126
4.6. Referências bibliográficas	128

5. FIBRAS ÓPTICAS

5.1. Fibras ópticas com índice em degrau	129
5.1.1. Abertura numérica	130
5.1.2. Dispersão intermodal	131

5.2. Fibras ópticas com índice gradual	132
5.3. Modos guiados	133
5.4. Fibras ópticas monomodo	136
5.5. Atenuação	136
5.6. Dispersão cromática	138
5.7. Fibras ópticas microestruturadas	140
5.8. Acopladores de fibra óptica	141
5.9. Sensores de fibra óptica	142
5.10. Problemas resolvidos.....	144
5.11. Problemas propostos.....	153
5.12. Referências bibliográficas.....	154

6. LASERS E LUZ LASER

6.1. O meio activo - Absorção e emissão de radiação	156
6.2. Coeficientes de absorção e de ganho.....	158
6.3. Bombeamento do laser	159
6.4. Realimentação óptica	161
6.4.1. Condição limiar de um laser	161
6.4.2. Modos longitudinais	162
6.4.3. Condição de estabilidade da cavidade ressonante.....	162
6.5. Taxa de bombeamento e intensidade do campo óptico.....	163
6.6. Lasers semicondutores.....	165
6.6.1. Amplificação óptica num semicondutor	165
6.6.2. Díodos emissores de luz e lasers semicondutores	166
6.6.3. Lasers semicondutores de heterojunção	168
6.6.4. Materiais para os lasers semicondutores	169
6.6.5. Lasers semicondutores com um modo longitudinal	170
6.7. Outros lasers	171
6.7.1. O primeiro laser - laser de rubi	171
6.7.2. O laser de Hélio-Néon	171
6.8. A luz laser	172
6.8.1. O feixe laser	172
6.8.2. Direccionalidade	173
6.8.3. Focagem e expansão do feixe laser	174
6.8.4. Monocromaticidade	176
6.8.5. Brilho	176
6.8.6. Coerência	176
6.8.7. Granitado laser	177
6.9. Problemas resolvidos	179
6.10. Problemas propostos	188
6.11. Referências bibliográficas	190

7. HOLOGRAFIA	191
7.1. Fotografia versus Holografia	191
7.2. O processo holográfico	193
7.2.1. Registo holográfico	192
7.2.2. Reconstrução e localização da imagem	194
7.3. Hologramas de fase.....	195
7.4. Configurações holográficas.....	196
7.4.1. Holografia em linha.....	196
7.4.2. Holografia fora do eixo	197
7.5 Classificação dos hologramas.....	197
7.5.1. Hologramas finos	198
7.5.2. Hologramas espessos.....	198
7.5.3. Hologramas de reflexão	199
7.6. Interferometria holográfica.....	200
7.7. Outras aplicações da Holografia	201
7.8. Problemas resolvidos	201
7.9 Problemas propostos.....	208
7.10. Referências bibliográficas.....	208
8. ÓPTICA NÃO-LINEAR	209
8.1. O meio não-linear	209
8.2. Propagação de ondas num meio não-linear.....	210
8.2.1. Interacção de três ondas.....	211
8.3. Geração do segundo harmónico.....	212
8.4. Conjugação óptica da fase	213
8.5. Efeitos não-lineares em fibras ópticas	215
8.5.1. Dispersão Raman estimulada.....	215
8.5.2. Dispersão Brillouin estimulada.....	217
8.5.3. Auto-modulação da fase	219
8.5.4. Solitões em fibras ópticas	221
8.6. Problemas resolvidos	224
8.10. Problemas propostos.....	230
8.11.Referências bibliográficas.....	232

Prefácio

O propósito deste livro é o de apresentar uma introdução aos conceitos fundamentais da óptica e a algumas das suas aplicações. Com a sua publicação, pretende-se contribuir para uma maior divulgação deste domínio no espaço de língua portuguesa e tornar, possivelmente, mais fácil o seu estudo por alunos de física ou de outros cursos de ciências e de engenharia. Efectivamente, atendendo a que a área de influência da óptica tem vindo a extravasar os limites da física e a alargar-se progressivamente a outras áreas do saber, nomeadamente à química, à biologia, à engenharia e à medicina, pensamos que este livro poderá ser útil como texto de referência, não só em algumas disciplinas dos cursos de física, mas também em alguns programas de formação desenvolvidos nestas últimas áreas. Poderá também ser um instrumento útil para profissionais com uma formação de base diversa e que desejem iniciar o estudo desta área.

A forma como se apresenta este texto corresponde àquela que, na opinião do autor, mais interessa aos alunos, contribuindo para o sucesso no seu aproveitamento. De facto, o texto tem uma feição eminentemente teórico-prática: para cada um dos temas, apresenta-se primeiro o essencial da teoria, seguindo-se um conjunto de problemas completamente resolvidos. O objectivo destes problemas - num total de cem - é o de proporcionar uma melhor compreensão e um maior domínio da teoria apresentada antes. No final de cada capítulo são propostos outros problemas, também em número de cem, que se destinam a ser resolvidos pelos próprios alunos. Alguns destes problemas poderão ser seleccionados para uma discussão aprofundada no âmbito das aulas teórico-práticas das unidades curriculares em causa.

Universidade de Aveiro, Março de 2022

Capítulo 1

A NATUREZA DA LUZ

Desde muito cedo os homens interrogaram-se sobre a natureza da luz e elaboraram diferentes teorias para descrever os fenómenos ópticos. De facto, torna-se importante compreender a verdadeira natureza da luz, dado que ela representa um dos ingredientes básicos da vida sobre a Terra. Considere-se, por exemplo, a importância da luz solar para as plantas, que a convertem em energia química através do processo de fotossíntese. Por outro lado, a luz é o principal meio através do qual podemos transmitir e receber informação a partir dos seres que nos rodeiam ou que se encontram dispersos pelo Universo.

Neste capítulo começaremos por descrever, de um modo sumário, algumas ocorrências e ideias que se foram sucedendo ao longo dos séculos sobre a natureza da luz. Apresentaremos a seguir o modelo baseado na teoria electromagnética, que se revela capaz de descrever uma grande parte dos fenómenos ópticos observados no dia-a-dia.

1.1 Modelos para a luz – Uma perspectiva histórica

Vários filósofos da Grécia Antiga, entre os quais Pitágoras, Demócrito, Empédocles, Platão e Aristóteles, desenvolveram diversas teorias acerca da natureza da luz. A teoria de Aristóteles, em particular, era muito semelhante à teoria do éter que viria a ser desenvolvida no século XIX. Contudo, o trabalho sobre óptica mais antigo de que se tem conhecimento é o livro *Optics*, escrito por Euclides (300 a.C.), no qual se descreve a propagação rectilínea da luz, assim como a lei da reflexão. Segundo o ensinamento de Platão, Euclides supunha que os “raios” luminosos tinham a sua origem nos olhos do observador e se dirigiam para os objectos contemplados.

Ainda no século I a.C., Hero de Alexandria defendeu que a luz, ao viajar entre dois pontos, segue sempre o caminho mais curto. No caso de um meio homogéneo, esse caminho corresponde a uma trajectória rectilínea. Usando este princípio, Hero conseguiu demonstrar geometricamente a lei da reflexão. O princípio do caminho mais curto veio a revelar-se basicamente correcto, apesar de o seu autor admitir igualmente que os raios luminosos provinham dos olhos do observador e que a velocidade de propagação da luz era infinita.

A refracção da luz foi estudada por Cleomedes (50 d. C.) e, mais tarde, por Cláudio Ptolomeu (100-170), de Alexandria, cujas observações ficaram registadas no seu livro *Optics*. Ptolomeu realizou uma série de medidas bastante

rigorosas dos ângulos de incidência (θ_i) e de refracção (θ_r) para vários meios. A partir dessas medidas, chegou a uma relação empírica entre os dois ângulos, dada por $\theta_r = a\theta_i - b\theta_i^2$, onde a e b são constantes que dependem dos meios que formam a interface. É interessante notar que, apesar desta expressão ser válida apenas para ângulos de incidência bastante pequenos, ela permaneceu inalterada durante cerca de 1500 anos!

A queda do Império Romano do Ocidente, em 475 d. C., marca o início de um período durante o qual a actividade científica na Europa praticamente estagnou. Entretanto, a expansão do islamismo fez deslocar o centro da actividade intelectual para o mundo árabe. É neste contexto que surge, em Bagdad, a figura de Alhazen (965-1039), que escreveu uma coleção de sete livros sobre óptica. Entre outros assuntos, Alhazen elaborou a lei da reflexão, estudou as características dos espelhos esféricos e parabólicos e descreveu em detalhe o funcionamento do olho humano. Na sua concepção, os raios luminosos não tinham origem no olho, mas nas fontes que iluminavam os objectos, a partir dos quais a luz se dirigia para o olho. Alhazen defendeu igualmente que a luz se propagava com uma velocidade finita, ainda que muito elevada, e que essa velocidade deveria ser inferior num meio opticamente mais denso.

O trabalho de Alhazen foi traduzido para latim e acabou por ter uma grande influência nos estudos de óptica do Bispo Robert Grosseteste (1175-1253) e do matemático polaco Vitelo. Estes estudos foram continuados por Roger Bacon (1215-1294), que terá sido o primeiro a propor o uso de lentes para melhorar a visão e a combinar várias lentes para formar um telescópio. Mais tarde, apareceu o contributo de Leonardo da Vinci (1452-1519), que descreveu o funcionamento da chamada *camera obscura*. De notar, contudo, que este dispositivo havia sido já discutido, cerca de 500 anos antes, por Alhazen.

Usando um telescópio feito por si mesmo, Galileu Galilei (1564-1642) descobriu as luas de Júpiter e muitas outras maravilhas do espaço celeste. Após ter verificado as descobertas de Galileu, Johannes Kepler (1571-1630) publicou, em 1609, o seu livro *Dioptrice*, no qual se encontram sumariados muitos dos resultados obtidos até então. Entre outros assuntos, este livro apresenta a teoria para as combinações de lentes e descreve o fenômeno da refracção usando uma aproximação de ângulos pequenos.

A lei da refracção acabou por ser definitivamente descoberta em 1621 por Willebrord Snell (1591-1626), em Leyden. Contudo, o trabalho de Snell era, essencialmente, de natureza empírica e não foi publicado de imediato. René Descartes (1596-1650), que desconhecia aparentemente o trabalho de Snell, publicou, em 1637, a obra *La Dioptrique*, apresentando pela primeira vez a lei da refracção tal como hoje a conhecemos.

Pierre de Fermat (1601-1665) demonstrou em 1657 a lei da reflexão com base no seu *princípio do tempo mínimo*. Segundo este princípio, que é uma evolução da ideia do caminho mais curto defendida por Hero, a luz propaga-se de um ponto para outro seguindo um trajecto que minimiza o tempo de percurso, mesmo que para tal ela tenha de desviar-se da recta que passa por esses pontos. Com base no mesmo princípio, e introduzindo o conceito de resistência óptica do meio, Fermat obteve igualmente a lei da refracção.

Tanto Descartes como Fermat admitiam que a luz era constituída por uma corrente de partículas. Contudo, o principal arquitecto desta teoria corpuscular foi Isaac Newton (1642-1727), que explicou nessa base as principais características da luz observadas experimentalmente, nomeadamente as leis da reflexão e da refracção. Em 1704 ele publicou o livro *Opticks*, que se tornou durante bastante tempo numa obra de referência para a descrição das características da luz. Nesta obra, Newton descreveu uma série de experiências relativas à refracção e ao domínio actualmente designado por interferência. Uma dessas experiências ilustrava o fenômeno da dispersão da luz do sol num prisma. Newton verificou que o fenômeno da cor era uma característica intrínseca da luz e que a luz branca proveniente do sol era o resultado da combinação de raios de todas as cores. Esses raios eram entendidos como correntes de partículas que se moveriam através de um meio omnipresente, o éter.

Em oposição à teoria corpuscular, havia também quem defendesse, já no século XVII, teorias ondulatórias para a luz. Entre os defensores destas teorias encontra-se Robert Hooke (1635-1703), que chegou a afrontar directamente Newton na Royal Society of London. Entre outros trabalhos, Hooke descreveu os padrões de

interferência com várias cores que ocorrem em filmes dieléctricos delgados. Tendo por base a hipótese do meio etéreo, propôs uma analogia entre as ondas luminosas e as ondas que se formam na água.

O físico holandês, Christian Huygens (1629-1695) pode ser considerado o principal arquitecto do modelo ondulatório para a luz, com base no qual explicou as leis da reflexão e da refracção. Esse modelo ondulatório foi exposto na obra *Traité de la Lumière*, publicada em 1690, na qual foi enunciado pela primeira vez o que viria a ser conhecido por princípio de Huygens: *cada ponto de uma frente de onda primária constitui uma fonte de ondas esféricas elementares, a sobreposição das quais permite obter a frente de onda primária num instante posterior*. Na Fig. 1.1 ilustra-se a utilização do princípio de Huygens para descrever a propagação de uma onda esférica.

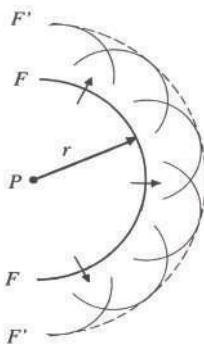


Figura 1.1 – Ilustração do princípio de Huygens para uma onda esférica.

Por várias razões, a teoria ondulatória da luz acabou por não ter um grande acolhimento na comunidade científica da época. Na realidade, todos os tipos de ondas então conhecidas (ondas sonoras, ondas na água, etc.) propagavam-se através de algum meio material, enquanto a luz vinda das estrelas, por exemplo, deveria chegar até nós através do espaço vazio. Por outro lado, a descrição ondulatória parecia inverosímil a muitos cientistas também pela dificuldade em explicar a propagação rectilínea da luz. Esses cientistas defendiam que, se a luz tivesse, de facto, uma natureza ondulatória, então ela deveria espalhar-se em todas as direcções e ser mesmo capaz de contornar os obstáculos. Este fenómeno – conhecido por *difracção* – não é facilmente observado com a luz, devido ao seu pequeno comprimento de onda.

De facto, Francesco Grimaldi (1618-1663) chegou a observar experimentalmente o fenómeno da difracção da luz. Contudo, a grande reputação de Newton na comunidade científica fez com que a teoria corpuscular acabasse por prevalecer claramente sobre a teoria ondulatória durante mais de um século. De entre os poucos cientistas do século XVIII que aceitaram a teoria ondulatória e rejeitaram a teoria corpuscular de Newton podem-se referir os nomes de Leonard Euler (1707-1783) e de Benjamin Franklin (1706-1790).

A primeira demonstração experimental da natureza ondulatória da luz foi realizada, em 1801, por Thomas Young (1773-1829). Young calculou aproximadamente o comprimento de onda da luz e introduziu o conceito de interferência, que pode ser considerado como um princípio de sobreposição linear de ondas. Combinando este princípio com a teoria de Huygens, Augustin Fresnel (1788-1827) estudou a difracção da luz por vários objectos. Nessa altura, pensava-se que a luz era constituída por ondas longitudinais. Foi o fenómeno da polarização que levou Young a admitir que a luz era uma onda transversal.

Em 1850, Jean Foucault (1791-1868) demonstrou experimentalmente que a velocidade da luz nos líquidos era menor do que no ar. Este facto constituiu uma vitória importante para a teoria ondulatória da luz, uma vez que a teoria corpuscular previa um resultado oposto. Entretanto, sucederam-se outros desenvolvimentos que levaram à aceitação generalizada da teoria ondulatória.

O desenvolvimento mais importante no plano teórico deveu-se ao trabalho de James Clerk Maxwell (1831-1879), que mostrou, em 1873, ser a luz um fenómeno ondulatório de natureza electromagnética. A sua teoria previa que as ondas electromagnéticas se propagariam no espaço com uma velocidade de cerca de 3×10^8 m/s,

um resultado que era igual ao valor obtido experimentalmente para a velocidade da luz. O físico alemão Heinrich Hertz (1857-1894) acabaria por confirmar, em 1888, a teoria de Maxwell.

A tarefa seguinte consistiu em determinar as propriedades do meio que serviria de suporte às ondas electromagnéticas e, em particular, à luz. A este respeito, cedo apareceram várias dificuldades, dado que o éter, que havia sido postulado para o efeito, deveria apresentar algumas propriedades bastante estranhas. Por um lado, ele teria de ser muito transmissivo, dado que os corpos celestes atravessá-lo-iam sem serem minimamente afectados. Por outro, deveria apresentar forças restauradoras bastante intensas, de modo a produzir frequências extremamente elevadas ($\approx 10^{15}$ Hz).

Os esforços tendentes a medir a velocidade da Terra relativamente ao éter culminaram, em 1881, na experiência de Albert Michelson (1852-1931). Nessa experiência, Michelson não verificou qualquer influência do movimento da Terra na propagação da luz através do éter. De facto, para explicar, com base na teoria ondulatória, o fenómeno da aberração estelar, conhecido já desde James Bradley (1693-1762), tinha de se admitir um movimento relativo entre a Terra e o éter. A solução para estas dificuldades foi dada pelo físico alemão Albert Einstein (1879-1955), quando enunciou em 1905 o princípio da relatividade restrita, que considerava desnecessária a existência do dito éter.

Apesar da teoria clássica do electromagnetismo, desenvolvida por Maxwell, ser capaz de descrever a maior parte das características da luz, ela não conseguia explicar alguns resultados experimentais obtidos já no final do século XIX. Entre esses resultados encontrava-se o *efeito fotoeléctrico*, descoberto por Hertz, que consiste na ejeção de electrões por um metal cuja superfície é exposta à luz. As observações experimentais revelam que a energia cinética dos electrões emitidos pelo metal não depende da intensidade da luz, o que contraria as previsões baseadas na teoria ondulatória. A explicação deste fenómeno foi dada por Einstein, em 1905, que usou o conceito de quantização desenvolvido por Max Planck (1858-1947) em 1900.

Segundo o modelo quântico, a energia de uma onda luminosa encontra-se distribuída por unidades, chamadas *fotões*. De acordo com a teoria de Einstein, a energia de um fotão é proporcional à frequência da onda electromagnética:

$$E = h\nu \quad (1.1)$$

onde $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J.s é a chamada *constante de Planck*. É importante notar que esta teoria conjuga algumas noções, tanto da teoria ondulatória como da teoria corpuscular da luz. De facto, o efeito fotoeléctrico é o resultado da transferência de energia entre um dado fotão e um electrão do metal. Ou seja, o electrão interage com um fotão como se ele fosse uma partícula. Contudo, este fotão apresenta algumas características reminiscentes de uma onda. Por exemplo, a sua energia é determinada pela frequência, que é uma grandeza tipicamente ondulatória.

A teoria quântica desenvolveu-se rapidamente entre os anos 1925-1930 com a mecânica ondulatória de Erwin Schrödinger (1887-1961) e a mecânica matricial de Werner Heisenberg (1901-1976). A equivalência entre as duas teorias foi demonstrada por John von Neumann (1903-1957). Como resultado dessa teoria, considera-se hoje que qualquer partícula exibe igualmente propriedades ondulatórias. De facto, segundo Louis de Broglie (1892-1987), uma partícula com momento linear p tem associado um comprimento de onda λ , dado por :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.2)$$

A confirmação experimental da hipótese sugerida por Louis de Broglie aconteceu durante os anos de 1927-1928 quando Clinton Davisson (1881-1958) e Lester Germer (1896-1971), nos EUA, e Sir George Thomson (1892-1975), em Inglaterra, observaram o fenómeno da difracção com um feixe de electrões.

O facto de tanto os fotões como os electrões se comportarem como partículas ou como ondas parecia, numa fase inicial, uma contradição, dado que esses dois aspectos são aparentemente irreconciliáveis. Contudo, o chamado *princípio da complementariedade*, elaborado por Niels Bohr (1885-1962), pôs em evidência que tanto os fotões como os electrões não são nem partículas nem ondas, mas algo mais complexo que a ideia traduzida por esses modelos.

A mecânica quântica, juntamente com a teoria da relatividade, mostra que o momento, p , e a velocidade, v , tanto das partículas materiais como dos fotões, são dados pelas mesmas expressões:

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{c} \quad (1.3)$$

$$v = \frac{pc^2}{E} \quad (1.4)$$

enquanto que o comprimento de onda, λ , é dado, em ambos os casos, pela Eq. (1.2). Nas Eq.s (1.3) e (1.4), m é a *massa em repouso* e E é a energia total da partícula, dada pela soma da energia correspondente à massa em repouso, mc^2 , e da sua energia cinética.

Uma diferença essencial entre os electrões e os fotões é que os últimos não têm massa em repouso. Deste modo, as Eq.s (1.3) e (1.4) assumem um aspecto mais simples para este segundo tipo de partículas:

$$p = \frac{E}{c} \quad (1.5)$$

$$v = \frac{pc^2}{E} = c \quad (1.6)$$

Verifica-se, assim, que enquanto as partículas com massa em repouso diferente de zero apresentam uma velocidade inferior a c , partículas como os fotões têm uma velocidade constante c . A energia de um fotão não é uma função da sua velocidade, mas da sua frequência, como é indicado pela Eq. (1.1).

Uma outra diferença significativa entre os electrões e os fotões é que os primeiros obedecem à estatística de Fermi, enquanto os segundos obedecem à estatística de Bose. A estatística de Fermi não permite a existência, num dado sistema, de dois electrões no mesmo estado, enquanto a estatística de Bose não impõe essa proibição aos fotões. Deste modo, pode-se ter um grande número de fotões exactamente com as mesmas características, o que faz com que um dado feixe de luz possa ser representado por uma onda electromagnética contínua.

1.2 Teoria electromagnética para a luz

Como se referiu na secção anterior, a luz pode ser encarada como um fenómeno electromagnético, sendo, por isso, descrita com base nos mesmos princípios teóricos que governam todas as formas de radiação electromagnética. As frequências ópticas ocupam no espectro electromagnético uma banda relativamente estreita, que se estende desde o infravermelho até ao ultravioleta. Devido ao seu curto comprimento de onda, as técnicas usadas para gerar, transmitir e detectar ondas ópticas diferem, geralmente, das utilizadas para as ondas electromagnéticas de comprimento de onda superior. Contudo, a recente miniaturização dos componentes ópticos fez com que estas diferenças se tornassem menos significativas.

A radiação electromagnética propaga-se na forma de dois campos vectoriais ondulatórios mutuamente acoplados: o campo eléctrico e o campo magnético. A teoria ondulatória, na qual a luz é descrita através de uma única função escalar da posição e do tempo (a função de onda), constitui uma aproximação da teoria electromagnética, válida para ondas paraxiais dentro de certas condições. A óptica geométrica constitui, por sua vez, uma aproximação da óptica ondulatória, sendo válida no caso em que o comprimento de onda é muito menor

que as dimensões dos componentes encontrados pela luz. Deste modo, a óptica electromagnética abarca a óptica ondulatória, que, por sua vez, abarca a óptica geométrica. Na última secção deste capítulo mostra-se como a óptica geométrica pode ser considerada, de facto, como um limite da óptica electromagnética.

1.2.1 Equações de Maxwell

Na sua manifestação ondulatória, a luz comporta-se como uma onda electromagnética, ou seja, como uma perturbação envolvendo variações temporais e espaciais dos campos eléctrico e magnético acoplados. Deste modo, as suas características podem ser descritas a partir das equações de Maxwell, que se podem escrever na forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (1.10)$$

onde \vec{E} é o campo eléctrico, \vec{D} é o deslocamento eléctrico, \vec{H} é o campo magnético, \vec{B} é a indução magnética, \vec{J} é o vector densidade de corrente e ρ é a densidade de carga. O deslocamento eléctrico relaciona-se com o campo eléctrico na forma:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.11)$$

onde ε é a *permittividade* ou *constante dieléctrica* do meio. Por outro lado, o campo magnético relaciona-se com a indução magnética na forma:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.12)$$

onde μ é a *permeabilidade magnética*. No caso do vazio, as constantes μ e ε assumem os valores:

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \quad (1.13)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Fm}^{-1} \quad (1.14)$$

As Eq.s (1.7) e (1.8) correspondem às leis de Gauss para a electricidade e para o magnetismo, respectivamente, enquanto a Eq. (1.9) corresponde à lei de Faraday e a Eq. (1.10) corresponde à lei de Ampere, modificada por Maxwell.

Ao escrever as Eq.s (1.7)-(1.10) considerou-se que o meio é uniforme e isotrópico. No caso desse meio estar liberto de fontes ($J = 0$ e $\rho = 0$), os campos eléctrico e indução magnética aparecem com uma notável simetria nessas equações.

1.2.2. Ondas electromagnéticas

Partindo das equações de Maxwell e considerando o caso de um meio liberto de fontes, mostra-se no problema PR 1.1 que o campo eléctrico satisfaz a seguinte equação de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (1.15)$$

De um modo semelhante, pode-se mostrar que o campo indução magnética satisfaz a mesma equação de onda:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \quad (1.16)$$

Verifica-se das Eq. (1.15) e (1.16) que os campos eléctrico e magnético se propagam com a mesma velocidade, v , dada por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1.17)$$

A velocidade da luz para o vazio foi calculada por Maxwell usando os valores medidos experimentalmente para μ_0 e ϵ_0 por Wilhelm Weber (1804-1891) e Rudolph Kohlrausch (1809-1858). Ele obteve então um resultado que estava em acordo com o valor obtido experimentalmente para a velocidade da luz por Fizeau, em 1849. Esta coincidência levou Maxwell a concluir que a luz deveria ser um fenómeno electromagnético. A velocidade da luz no vazio é:

$$v = c = 2.997924562 \times 10^8 \text{ m/s} \pm 1,1 \text{ m/s} \quad (1.18)$$

A razão entre a velocidade da luz no vazio, c , e a velocidade da luz num dado meio, v , define o *índice de refracção*, n , desse meio:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \quad (1.19)$$

Geralmente, as propriedades magnéticas do meio têm uma influência desprezável na velocidade de propagação da onda, podendo-se considerar $\mu \approx \mu_0$. O índice de refracção do meio é, assim, basicamente determinado pela sua permitividade ϵ , a qual depende da frequência da onda electromagnética que nele se propaga.

As Eq.s (1.15) e (1.16) têm soluções na forma de ondas planas harmónicas, dadas por:

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} \right\} \quad (1.20)$$

$$\vec{B} = \text{Re} \left\{ \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} \right\} \quad (1.21)$$

onde \vec{E}_0 e \vec{B}_0 são vectores, representando a amplitude das oscilações, ω é a frequência angular, \vec{k} é o vector de onda, que define a direcção de propagação, e Re indica a parte real da expressão dentro das chavetas. Não escreveremos a seguir, de modo explícito, o “Re”, entendendo-se, no entanto, que os campos físicos são dados sempre pela parte real dos campos complexos que aparecem nas equações.

Usando as equações de Maxwell e as Eq.s (1.20) e (1.21), mostra-se no problema PR 1.3 que os campos \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares entre si e ambos perpendiculares à direcção de propagação, satisfazendo a relação:

$$\vec{B} = \frac{1}{v} (\hat{s} \times \vec{E}) \quad (1.22)$$

onde $\hat{s} = \vec{k} / k$ é o vector unitário na direcção de propagação. A Eq. (1.22) condensa três características importantes das ondas electromagnéticas:

- i) \vec{B} é perpendicular a \vec{E} ,
- ii) \vec{B} está em fase com \vec{E} ,
- iii) as grandezas de \vec{B} e de \vec{E} relacionam-se na forma $B = E/v$.

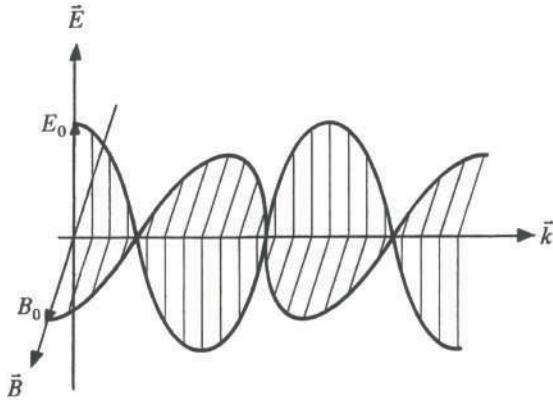


Figura 1.2 – Propagação de uma onda electromagnética plana.

A Fig. 1.2 representa esquematicamente a propagação de uma electromagnética plana numa direcção indicada pelo vector de onda \vec{k} .

1.2.3. Densidade e fluxo de energia

A teoria electromagnética permite obter a seguinte expressão para a densidade de energia associada com os campos eléctrico e magnético no vazio:

$$U = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B} \right] \quad (1.23)$$

Contudo, atendendo a que

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{E} \quad (1.24)$$

pode-se escrever:

$$U = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (1.25)$$

A densidade do fluxo de energia na direcção de propagação é definida pelo chamado *vector de Poynting*:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1.26)$$

A densidade de fluxo de energia numa direcção arbitrária, indicada por um dado vector unitário \hat{u} , é dada pelo produto escalar $\hat{u} \cdot \vec{S}$.

No caso de ondas planas que se propagam no vazio, mostra-se no problema PR 1.5 que a média temporal da grandeza do vector de Poynting é dada por:

$$I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}_0|^2 \quad (1.27)$$

onde \vec{E}_0 é o vector amplitude do campo eléctrico. A grandeza $I = \langle |\vec{S}| \rangle$ é conhecida por *densidade de fluxo radiante*, ou *intensidade*, (W/m^2) e é designada por *emitância* ou *irradiância*, consoante esse fluxo se afasta ou incide, respectivamente, numa dada superfície.

1.2.4. Fórmulas de Fresnel

Quando uma onda electromagnética incide na fronteira de separação entre dois meios com índices de refracção diferentes, n_1 e n_2 , ela é, em geral, parcialmente reflectida e parcialmente transmitida. Mostra-se no problema PR 1.8 que a relação entre o ângulo de incidência, θ_i , e o ângulo de reflexão, θ_r , é dada por:

$$\theta_i = \theta_r \quad (1.28)$$

Este resultado traduz a chamada *lei da reflexão*. Mostra-se ainda no mesmo problema que a relação entre o ângulo de incidência, θ_i , e o ângulo de transmissão, θ_t , é dada por

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (1.29)$$

Este resultado traduz a chamada *lei da refracção ou lei de Snell*.

A razão entre as amplitudes das ondas reflectida e incidente é conhecida por *coeficiente de reflexão*, enquanto a razão entre as amplitudes das ondas transmitida e incidente define o chamado *coeficiente de transmissão*. As *fórmulas de Fresnel* traduzem o modo como estes coeficientes dependem dos ângulos de incidência, de reflexão e de transmissão, assim como da polarização da onda.

Na Fig. 1.3 mostra-se os raios incidente, reflectido e transmitido quando o vector campo eléctrico (a) se encontra no plano de incidência ou (b) é perpendicular a este plano. Os vectores \vec{E} e \vec{B} estão relacionados com o vector de onda através da Eq. (1.22).

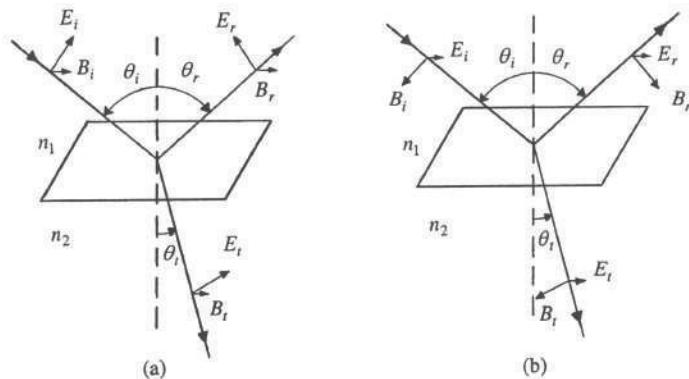


Figura 1.3 – Representação dos raios incidente, reflectido e transmitido quando o vector campo eléctrico (a) se encontra no plano de incidência ou (b) é perpendicular a este plano.

As componentes dos campos \vec{E} e \vec{H} paralelas à interface devem ser iguais em ambos os lados da fronteira. No caso de os dois meios serem dieléctricos não magnéticos, as componentes paralelas do campo \vec{B} satisfazem a mesma condição. Neste caso, e tendo em consideração a Fig. 1.3(a), pode-se escrever as seguintes relações:

$$B_i + B_r = B_t \quad (1.30)$$

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t \quad (1.31)$$

Substituindo na Eq. (1.30) $B = (n/c)E$ e combinando com a Eq. (1.31) pode-se obter os seguintes resultados para os coeficientes de reflexão e de transmissão correspondentes à Fig. 1.3(a):

$$r_{\parallel} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (1.32)$$

$$t_{\parallel} = \left(\frac{E_t}{E_i} \right)_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (1.33)$$

Usando a lei de Snell pode-se escrever os resultados anteriores na forma:

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad (1.34)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \quad (1.35)$$

Uma análise semelhante para o caso da Fig. 1.3(b), em que o campo eléctrico é perpendicular ao plano de incidência, permite obter os seguintes resultados para os coeficientes de reflexão e de transmissão.

$$r_{\perp} = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (1.36)$$

$$t_{\perp} = \left(\frac{E_t}{E_i} \right)_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (1.37)$$

Usando a lei de Snell pode-se escrever os resultados anteriores na forma:

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (1.38)$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (1.39)$$

A Fig. 1.4 ilustra a variação destes coeficientes com o ângulo de incidência para o caso da interface entre o ar ($n_1 \approx 1$) e o vidro ($n_2 \approx 1.5$).

Pode-se verificar da Eq. (1.34) que r_{\parallel} se anula quando $\theta_i + \theta_t = \pi/2$. O ângulo de incidência $\theta_i = \theta_B$ correspondente a esta situação é conhecido por *ângulo de Brewster* e está indicado na Fig. 1.4. Para este ângulo de incidência, a luz reflectida encontra-se completamente polarizada, sendo o seu campo eléctrico normal ao plano de incidência. Por outro lado, uma placa de vidro posicionada segundo o ângulo de Brewster é completamente transparente para a luz cujo campo eléctrico seja paralelo ao plano de incidência.

Quanto aos coeficientes de reflexão e de transmissão em potência, tem-se:

$$R = \frac{P_r}{P_i} = r^2 \quad (1.40)$$

$$T = \frac{P_t}{P_i} = \left(\frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \right) t^2 \quad (1.41)$$

Os coeficientes R e T são chamados *reflectância* e *transmitância*, respectivamente.

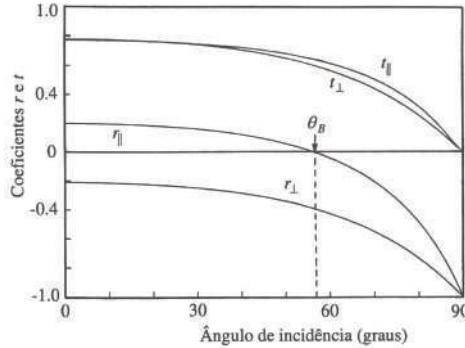


Figura 1.4 – Variação dos coeficientes de reflexão e de transmissão com o ângulo de incidência para o caso da fronteira entre o ar ($n_1 \approx 1$) e o vidro ($n_2 = 1.5$).

1.2.5. O limite da óptica geométrica

A óptica geométrica pode ser encarada como uma aproximação da óptica electromagnética, válida no limite em que o comprimento de onda tende para zero. Neste limite, as equações de Maxwell permitem obter uma equação que descreve a trajectória da normal à frente de onda. Esta normal corresponde ao chamado *raio óptico* e a sua equação de movimento designa-se por *equação da eikonal*.

Considere-se o caso de um meio linear, liberto de fontes e isotrópico, mas não-homogéneo, com uma permitividade eléctrica $\varepsilon = \varepsilon(r)$. Os campos eléctrico e magnético podem ser escritos na forma:

$$\vec{E}(r, t) = \text{Re} \{ \vec{E}_e(r) e^{i\omega t} \} \quad (1.42)$$

$$\vec{B}(r, t) = \text{Re} \{ \vec{B}_e(r) e^{i\omega t} \} \quad (1.43)$$

onde \vec{E}_e e \vec{B}_e são as respectivas amplitudes complexas. Neste caso, as equações de Maxwell podem ser apresentadas com o aspecto:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_r \vec{E}_e) = 0 \quad (1.44)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_e = 0 \quad (1.45)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_e = -ik_0 c \vec{B}_e \quad (1.46)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_e = i \frac{k_0}{c} \varepsilon_r \vec{E}_e \quad (1.47)$$

onde

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (1.48)$$

é a constante de propagação no vazio e

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon(r)}{\epsilon_0} \quad (1.49)$$

é a chamada permitividade relativa. Considere-se soluções do tipo

$$\vec{E}_e(r) = \vec{E}_0(r) e^{ik_0 L(r)} \quad (1.50)$$

$$\vec{B}_e(r) = \vec{B}_0(r) e^{ik_0 L(r)} \quad (1.51)$$

onde $L(r)$ é uma função chamada *eikonal*. Substituindo as Eq.s (1.50) e (1.51) nas Eq.s (1.44)-(1.47) e considerando o caso-limite $\lambda_0 \rightarrow 0$, ou seja, $k_0 \rightarrow \infty$, mostra-se no problema PR 1.10 o seguinte resultado:

$$|\vec{\nabla}L|^2 = \epsilon_r = n^2 \quad (1.52)$$

As superfícies $L(r) = \text{constante}$ correspondem às chamadas *frentes de onda*. As normais a estas superfícies têm a direcção de $\vec{\nabla}L$, que satisfaz a chamada *equação da eikonal*:

$$\vec{\nabla}L = n\hat{s} \quad (1.53)$$

O vector unitário \hat{s} é normal à frente de onda e tangente ao raio luminoso, sendo dado por:

$$\hat{s} = \frac{\vec{\nabla}L}{|\vec{\nabla}L|} = \frac{\vec{\nabla}L}{n} \quad (1.54)$$

No caso geral de um meio não-homogéneo, os raios luminosos têm uma trajectória curvilínea. Contudo, se o meio for homogéneo, o índice de refracção n não depende da posição, tendo-se:

$$L(r) = n(x \cos \theta_x + y \cos \theta_y + z \cos \theta_z) \quad (1.55)$$

onde $\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z$ são os chamados co-senos directores. A direcção do raio óptico é dada por

$$\vec{\nabla}L = n(\cos \theta_x \hat{i} + \cos \theta_y \hat{j} + \cos \theta_z \hat{k}) = n\hat{s} \quad (1.56)$$

Usando a definição dada pela Eq. (1.26), tem-se que o valor médio do vector de Poynting pode ser expresso na forma:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2c\mu_0} (\vec{E}_0 \times (\vec{\nabla}L \times \vec{E}_0)) \quad (1.57)$$

Considerando a Eq. (1.54), tem-se:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{n|\vec{E}_0|^2}{2c\mu_0} \hat{s} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n |\vec{E}_0|^2 \hat{s} \quad (1.58)$$

Este resultado é equivalente ao obtido na Eq. (1.27) no caso de se considerar o vazio ($n = 1$) e mostra que a direcção do vector de Poynting coincide com a direcção da normal à frente de onda geométrica.

1.3. Problemas resolvidos

PR 1.1. Partindo das equações de Maxwell (1.7)-(1.10) e assumindo um meio material liberto de fontes, mostre que o campo eléctrico satisfaz a equação de onda dada pela Eq. (1.15).

Resolução

Num meio material liberto de fontes tem-se $J = 0$ e $\rho = 0$. Aplicando o rotacional a ambos os membros da Eq. (1.9), tem-se:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (1)$$

O membro esquerdo da Eq. (1) pode ser reescrito usando a seguinte identidade:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} \quad (2)$$

Atendendo a que, para $\rho = 0$, se tem $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, a relação anterior permite escrever:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (3)$$

A Eq. (1) fica então:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (4)$$

Utilizando as Eq.s (1.10)-(1.12), e passando tudo para o membro esquerdo na Eq. (4), obtém-se:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (5)$$

A Eq. (5) é a equação de onda para o campo eléctrico, sendo a velocidade de propagação da onda, v , dada por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (6)$$

PR 1.2. Considere uma onda electromagnética plana que se propaga num meio dielétrico e cujo campo eléctrico é dado por:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos \left[\pi \left(6 \times 10^{14} t - \frac{z}{3 \times 10^{-7}} \right) \right] \quad (1)$$

tendo-se $E_y = E_z = 0$. Na Eq. (1), t é dado em segundos e z em metros. Determine a velocidade de propagação da onda, o seu comprimento de onda no vazio e o índice de refracção do meio para a frequência em causa.

Resolução

A fase da onda dada é:

$$\phi = \omega t - kz = 6\pi \times 10^{14} t - \frac{\pi}{3 \times 10^{-7}} z \quad (2)$$

Deste modo, tem-se

$$\omega = 6\pi \times 10^{14} \text{ rad/s}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3 \times 10^{-7}} \text{ rad/m} \quad (3)$$

A velocidade de propagação e o comprimento de onda no meio em causa são dados, respectivamente, por:

$$v = \frac{\omega}{k} = (6\pi \times 10^{14}) \frac{3 \times 10^{-7}}{\pi} = 1.8 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (4)$$

e

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = (2\pi) \frac{3 \times 10^{-7}}{\pi} = 600 \text{ nm} \quad (5)$$

O índice de refracção do meio é:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^8}{1.8 \times 10^8} = 1.67 \quad (6)$$

O comprimento de onda no vazio é:

$$\lambda_0 = n\lambda = 1000 \text{ nm} \quad (7)$$

PR 1.3. Usando as equações de Maxwell, assumindo um meio liberto de fontes e considerando o caso de ondas electromagnéticas planas, descritas pelas Eq.s (1.20) e (1.21), mostre que os campos \vec{E} e \vec{B} são:

- a) perpendiculares à direcção de propagação da onda electromagnética;
- b) perpendiculares entre si, satisfazendo a Eq. (1.22).

Resolução

a) Considerando as Eq.s (1.7) (com $\rho = 0$), (1.11) e (1.20) tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

De modo semelhante, usando as Eq.s (1.8), e (1.21), tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

As Eq.s (1) e (2) mostram que os campos \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares à direcção de propagação, indicada pelo vector de onda \vec{k} .

b) Assumindo os campos na forma indicada pelas Eq.s (1.20) e (1.21), a Eq. (1.9) fica:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (3)$$

ou seja,

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{vk} (\vec{k} \times \vec{E}) \quad (4)$$

Pode escrever-se a Eq. (4) na forma:

$$\vec{B} = \frac{1}{v} (\hat{s} \times \vec{E}) \quad (5)$$

onde $\hat{s} = \vec{k}/k$ é o vector unitário na direcção de propagação. A Eq. (5) mostra que os campos \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares entre si.

PR 1.4. Dada uma onda electromagnética plana e harmónica, cujo campo eléctrico é dado por:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \operatorname{sen} \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi \right], \quad (1)$$

determine o correspondente campo indução magnética \vec{B} .

Resolução

Dado que $E_y = E_z = 0$, tem-se da Eq. (1.9) que

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2)$$

Ou seja, usando a expressão dada para o campo eléctrico,

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\omega}{c} E_{0x} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi \right] \quad (3)$$

Integrando ambos os membros da equação anterior em ordem a t obtém-se:

$$B_y(z, t) = \frac{1}{c} E_{0x} \operatorname{sen} \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi \right] = \frac{1}{c} E_x(z, t) \quad (4)$$

Confirma-se, neste caso particular, que os campos eléctrico e indução magnética são perpendiculares entre si e ambos perpendiculares à direcção de propagação, dada pelo eixo dos z . Por outro lado, as grandezas dos dois campos estão relacionadas na forma $B = E/c$.

PR 1.5. Considerando o caso de ondas planas que se propagam no vazio, mostre que a média temporal da grandeza do vector de Poynting, que corresponde à intensidade I , é dada pela Eq. (1.27). Encontre uma relação entre a intensidade I e o valor médio da densidade de energia $\langle U \rangle$.

Resolução

No caso da propagação de ondas planas no vazio, tem-se as seguintes expressões para os campos reais:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \phi, \quad \phi = \omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \varphi \quad (1)$$

e

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \phi = \frac{1}{c k_0} (\vec{k}_0 \times \vec{E}_0) \cos \phi \quad (2)$$

onde se usou a Eq. (1.22) para escrever o membro da direita na Eq. (2). Deste modo, o vector de Poynting é dado, a partir da Eq. (1.26), por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \times \frac{1}{ck} (\vec{k}_0 \times \vec{E}_0) \cos^2 \phi = \epsilon_0 c |\vec{E}_0|^2 \hat{s} \cos^2 \phi \quad (3)$$

onde se considerou $\hat{s} = \vec{k} / k$ e $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Devido à rápida variação temporal dos campos eléctrico e magnético, cujas frequências são da ordem de 10^{14} a 10^{15} Hz na zona visível do espectro, a grandeza do vector de Poynting varia também rapidamente com o tempo. Dado que o valor médio de $\cos^2 \phi$, sobre muitos ciclos, é $1/2$, a média temporal da grandeza do vector de Poynting vem dada por:

$$I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}_0|^2 \quad (4)$$

Para uma onda no vazio, a densidade de energia é dada, a partir da Eq. (1.25), por:

$$U = \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \cos^2 \phi \quad (5)$$

e apresenta uma média temporal

$$\langle U \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2 \quad (6)$$

Deste modo, considerando as Eq.s (4) e (6), verifica-se que a densidade de fluxo I se relaciona com o valor médio da densidade de energia na forma:

$$I = c \langle U \rangle \quad (7)$$

PR 1.6. Mostre que a equação de onda, dada pelas Eq.s (1.15) e (1.16), admite soluções na forma de ondas esféricas. Considere para o efeito as coordenadas esféricas:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (1a)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (1b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (1c)$$

Resolução

O Laplaciano $\Delta \equiv \nabla^2$ em coordenadas esféricicas é dado por:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2)$$

Uma onda esférica apresenta uma simetria esférica, ou seja, não depende de θ e ϕ . Portanto, a expressão anterior do Laplaciano reduz-se à forma:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (3)$$

Aplicando a expressão anterior à amplitude E de um campo escalar, tem-se

$$\Delta E = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rE) \quad (4)$$

A equação de onda, dada pela Eq. (1.15), assume então o aspecto:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rE) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Multiplicando ambos os membros por r , a Eq. (5) fica

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rE) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rE) = 0 \quad (6)$$

A Eq. (6) é uma equação de onda unidimensional para rE e tem como soluções

$$rE(r,t) = f(r-ct) \quad \text{e} \quad rE(r,t) = g(r+ct) \quad (7)$$

onde f e g são funções arbitrárias. A onda

$$E(r,t) = \frac{1}{r} f(r-ct) \quad (8)$$

representa uma onda esférica propagando-se radialmente a partir da origem $r = 0$, enquanto a onda

$$E(r,t) = \frac{1}{r} g(r+ct) \quad (9)$$

representa uma onda esférica convergindo para a origem.

No caso de uma onda harmónica esférica, tem-se

$$E(r,t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t \pm kr) \quad (10)$$

A amplitude A/r de uma onda esférica decresce proporcionalmente a $1/r$.

PR 1.7. Um feixe laser colimado tem um diâmetro de 2 mm e uma potência de 600 mW. Determine a densidade de fluxo do feixe e a amplitude dos campos eléctrico e indução magnética.

Resolução

A área da secção do feixe é $\pi(10^{-3})^2$, pelo que a densidade de fluxo é dada por:

$$I = \frac{600 \times 10^{-3}}{\pi(10^{-3})^2} = 1.91 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \quad (1)$$

A partir da Eq. (1.27), tem-se que a amplitude do campo eléctrico é dada por:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = 1.20 \times 10^4 \text{ V/m} \quad (2)$$

Usando a Eq. (1.22), obtém-se a amplitude da indução magnética:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 4.00 \times 10^{-5} \text{ T} \quad (3)$$

PR 1.8. Considere uma onda plana monocromática que incide na superfície de separação entre dois meios com índices de refracção n_1 e n_2 , de acordo com a figura em baixo.

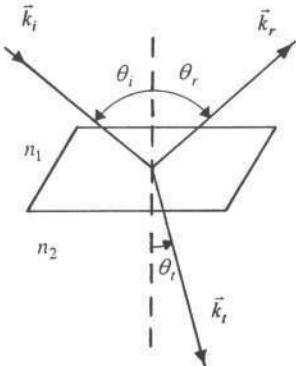


Figura 1.5 - Geometria para ilustrar os raios incidente, reflectido e refratado.

Considere que a onda incidente pode ser escrita na forma $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp\{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})\}$, dando origem a duas ondas com a mesma frequência: uma onda reflectida, $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp\{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})\}$, e uma onda refratada, ou transmitida, $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp\{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})\}$.

Obtenha as relações que se devem verificar entre os ângulos θ_i e θ_r (lei da reflexão), assim como entre os ângulos θ_i e θ_t (lei da refracção).

Resolução

Para que exista uma relação entre as amplitudes das três ondas envolvidas, válida em todos os pontos da superfície de separação entre os dois meios e para todos os instantes de tempo, torna-se necessário que os termos de fase sejam iguais. Resulta daí que deve verificar-se a relação:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \quad (1)$$

As igualdades anteriores implicam que:

$$\vec{k}_r - \vec{k}_i = b_1 \hat{N} \quad (2)$$

$$\vec{k}_t - \vec{k}_i = b_2 \hat{N} \quad (3)$$

onde \hat{N} é um vector perpendicular à superfície e b_1 e b_2 são dois escalares. Atendendo a que se tem $\vec{k}_i = k_0 n_1 \hat{s}_i$, $\vec{k}_r = k_0 n_1 \hat{s}_r$ e $\vec{k}_t = k_0 n_2 \hat{s}_t$, as relações anteriores podem ser escritas na forma:

$$n_1 (\hat{s}_r - \hat{s}_i) = a_1 \hat{N} \quad (4)$$

$$n_2 \hat{s}_t - n_1 \hat{s}_i = a_2 \hat{N} \quad (5)$$

onde $a_i = b_i / k_0$, $i = 1, 2$. Projectando a Eq. (4) na superfície de separação entre os dois meios, obtém-se o resultado

$$\theta_i = \theta_r \quad (6)$$

que corresponde à lei da reflexão. De modo semelhante, projectando a Eq. (5) na mesma superfície de separação, obtém-se a relação:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (7)$$

que traduz a lei de Snell, ou lei da refracção.

PR 1.9. Derive expressões para os coeficientes de reflexão e de transmissão no caso de uma incidência normal e calcule os seus valores para uma interface ar-vidro, em que se tem $n_1 = 1$ e $n_2 = 1.5$. Calcule a percentagem da potência incidente que é reflectida nessa interface.

Resolução

Quando a incidência na superfície de separação entre os dois meios é próxima da normal, tem-se $\theta_i \approx \theta_t \approx 0$, pelo que $\cos \theta_i \approx \cos \theta_t \approx 1$. Neste caso, os coeficientes de reflexão e de transmissão ficam independentes da polarização, sendo dados por:

$$r \equiv r_{\parallel} = -r_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \quad (1)$$

$$t = t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (2)$$

Verifica-se dos resultados anteriores que o coeficiente de transmissão é sempre positivo, enquanto que o sinal do coeficiente de reflexão depende do valor relativo de n_1 e n_2 .

Quanto aos coeficientes de reflexão e de transmissão em potência, tem-se

$$R = r^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (3)$$

$$T = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (4)$$

Verifica-se dos resultados anteriores que $R + T = 1$, um resultado que era esperado na ausência de absorção, situação em que a energia radiante é conservada.

No caso de uma reflexão externa na interface ar-vidro, tem-se

$$r = \frac{1.5 - 1}{1.5 + 1} = 0.2 \quad (5)$$

$$t = \frac{2}{1.5 + 1} = 0.8 \quad (6)$$

Ou seja, verifica-se que cerca de 4% da potência incidente na interface entre o ar e o vidro é reflectida.

PR 1.10. Usando as Eq.s (1.50) e (1.51) nas Eq.s (1.44)-(1.47) e considerando o limite $\lambda_0 \rightarrow 0$, obtenha a equação da eikonal, dada pela Eq. (1.53).

Resolução

Substituindo as Eq.s (1.50) e (1.51) nas Eq.s (1.44)-(1.47), obtém-se os resultados

$$\vec{\nabla}L \cdot \vec{E}_0 = \frac{1}{ik}(\vec{\nabla}\epsilon_r \cdot \vec{E}_0 + \epsilon_r \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0) \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}L \cdot \vec{B}_0 = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0}{ik_0} \quad (2)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{\nabla}L \times \vec{E}_0}{c} + \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}_0}{ick_0} \quad (3)$$

$$\vec{E}_0 = \frac{c}{\epsilon_r}(\vec{B}_0 \times \vec{\nabla}L) + \frac{c}{i\epsilon_r k_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 \quad (4)$$

Considerando o caso-limite $\lambda_0 \rightarrow 0$, ou seja, $k_0 \rightarrow \infty$, obtém-se as expressões:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla}L = \vec{B} \cdot \vec{\nabla}L = 0 \quad (5)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{\nabla}L \times \vec{E}_0}{c} \quad (6)$$

$$\vec{E}_0 = \frac{c}{\epsilon_r} \vec{B}_0 \times \vec{\nabla}L \quad (7)$$

Eliminando \vec{E}_0 na Eq. (6) à custa da Eq. (7), ou eliminando \vec{B}_0 na Eq. (7) à custa da Eq. (6) obtém-se:

$$(\vec{\nabla}L \times \vec{E}_0) \times \vec{\nabla}L = |\vec{\nabla}L|^2 \vec{E}_0 - \vec{\nabla}L(\vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla}L) = \epsilon_r \vec{E}_0 \quad (8)$$

$$\vec{\nabla}L \times (\vec{B}_0 \times \vec{\nabla}L) = |\vec{\nabla}L|^2 \vec{B}_0 - \vec{\nabla}L(\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}L) = \epsilon_r \vec{B}_0 \quad (9)$$

Atendendo à Eq. (5), as segundas parcelas nos membros centrais das Eq.s (8) e (9) anulam-se e obtém-se o resultado:

$$|\vec{\nabla}L|^2 = \epsilon_r = n^2 \quad (10)$$

As normais às superfícies $L(r) = \text{constante}$ têm a direcção de $\vec{\nabla}L$ e representam os raios da óptica geométrica. Da Eq. (10) obtém-se a equação da eikonal:

$$\vec{\nabla}L = n\hat{s} \quad (11)$$

onde \hat{s} é um vector unitário normal à superfície $L(r) = \text{constante}$.

1.4. Problemas propostos

PP 1.1.

- Calcule a frequência, a energia, o momento e a massa de um fotão com comprimento de onda $\lambda = 600 \text{ nm}$.
- Obtenha a relação entre o comprimento de onda de um fotão, medido em angstroms, e a sua energia, medida em electrões-volt.

PP 1.2. Um feixe de luz verde ($\lambda = 500 \text{ nm}$) incide normalmente num espelho totalmente reflector. Determine o número de fotões que incidem no espelho em cada segundo, sabendo que a força exercida nele pela luz é de 1 N.

PP 1.3. Considere uma onda electromagnética plana que se propaga no vazio e cujo campo eléctrico é dado, no SI, por:

$$E_x(z,t) = 10^3 \cos[\pi(6 \times 10^{14} t - 2 \times 10^6 z)]$$

tendo-se $E_y = E_z = 0$. Determine a amplitude, velocidade, frequência, comprimento de onda e período da onda.

PP 1.4. Considere que o campo eléctrico tem componentes:

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \exp\{\alpha t - \beta x\}, \quad E_z = 0$$

- Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E}$.
- Deduza as componentes (dependentes do tempo) de \vec{B} .
- Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B}$.
- Determine a relação que deve existir entre α e β para que as equações de Maxwell sejam satisfeitas.

PP 1.5. Mostre que o valor médio no tempo de E^2 é equivalente a $(E^*E/2)$ se $E = E_0 \exp\{i(\omega t - kr)\}$.

PP 1.6. Uma onda electromagnética harmónica plana, com comprimento de onda $\lambda = 650 \text{ nm}$, propaga-se na direcção do eixo dos z . Supondo que a densidade de fluxo é 13.3 W/m^2 , e que o campo eléctrico se encontra linearmente polarizado na direcção do eixo dos x , obtenha uma expressão para o campo indução magnética \vec{B} .

PP 1.7. Uma lâmpada de 60 W converte 3% da sua potência eléctrica em luz. A radiação distribui-se uniformemente num ângulo sólido de 1sr. Calcule a densidade de fluxo e a amplitude do campo óptico a uma distância de 50 cm da lâmpada. Assuma que as ondas de luz são harmónicas.

PP 1.8. A densidade de fluxo a uma distância de 2 m de uma fonte pontual é 20 mW/cm^2 . Determine o fluxo total emitido pela fonte. Calcule a densidade de fluxo a uma distância de 4 m da fonte.

PP 1.9. Um laser de He-Ne ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) emite um feixe de luz cilíndrico com uma secção de 0.35 cm^2 . A potência recebida por um detector colocado normalmente ao feixe é de 0.5 W.

- Calcule o valor da norma do campo eléctrico.
- Qual a potência emitida por uma lâmpada de incandescência, de igual eficiência, situada à distância de 2 m do detector?

PP 1.10. Suponha que uma onda, linearmente polarizada, incide numa interface, de tal modo que o plano do vector campo eléctrico faz um ângulo ϕ_i com o plano de incidência. Mostre que, neste caso, a reflectância é dada por:

$$R = R_{\parallel} \cos^2 \phi_i + R_{\perp} \sin^2 \phi_i$$

onde R_{\parallel} e R_{\perp} são as reflectâncias das componentes do campo eléctrico paralela e perpendicular ao plano de incidência, respectivamente.

1.5. Referências bibliográficas

1. BORN, M. e WOLF, E., *Principles of Optics*, 6^a Ed.. Oxford: Pergamon Press, 1980.
2. DITCHBURN, R. W., *Light*. London: Academic Press, 1976.
3. HALL, A. R., *All Was Light – an Introduction to Newton's Opticks*. Oxford: Clarendon Press, 1993.
4. RONCHI, V., *The Nature of Light*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971.
5. SABRA, A. I., *Theories of Light From Descartes to Newton*. London: Osbourne, 1967.
6. SIMMONS, J. e GUTTMANN, M., *States, Waves and Photons: a Modern Introduction to Light*. Addison-Wesley, 1970.
7. COOK, D. M., *The Theory of the Electromagnetic Field*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1975.
8. HAUS, H. A., *Waves and Fields in Optoelectronics*. Prentice-Hall, 1984.
9. HECHT, E., *Optics*, 5th Ed.. Pearson Education Limited, 2017.
10. KLEIN, M. e FURTAK, T., *Optics*, 2^a Ed.. New York: John Wiley & Sons, 1986.
11. STAELIN, D. H.; WORGENTHALER, A. W. and KONG, J. A., *Electromagnetic Waves*. Prentice-Hall, 1994.

Capítulo 2

ÓPTICA GEOMÉTRICA

A *óptica geométrica* constitui uma descrição aproximada do fenómeno óptico, que é aceitável quando as dimensões dos componentes do sistema óptico (espelhos, lentes, aberturas, etc.) são bastante superiores ao comprimento de onda da luz. Quando esta condição não se verifica, e a natureza ondulatória da luz não pode ser ignorada, está-se no domínio da chamada *óptica ondulatória*. Ou seja, a óptica geométrica pode ser considerada como um caso limite da óptica ondulatória, que se verifica quando o comprimento de onda da luz se torna desprezável.

O elemento básico na descrição da óptica geométrica é o conceito de *raio óptico*, que corresponde a um segmento de recta orientado que indica a transmissão de energia radiante de um ponto para outro num sistema óptico. Quando o sistema óptico é constituído por vários meios homogéneos, o trajecto da luz é representado por uma sequência de segmentos de recta. Sempre que a luz é reflectida ou refractada verificam-se descontinuidades na direcção desses segmentos. O comportamento do raio óptico nestas situações é regulado por duas leis: a *lei da reflexão* e a *lei da refracção*.

2.1. Reflexão num espelho plano

A Fig. 2.1 ilustra a reflexão de um raio luminoso num espelho plano. Tendo por base a geometria desta figura e o princípio do tempo mínimo de Fermat, referido no capítulo anterior, mostra-se no problema PR 2.1 que os ângulos de incidência, θ_i , e de reflexão, θ_r , satisfazem a relação:

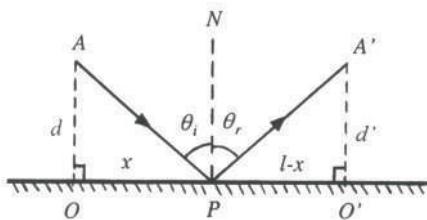


Figura 2.1 - Geometria para descrever a lei da reflexão num espelho plano.

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.1)$$

A Eq. (2.1) traduz a *lei da reflexão*, segundo a qual os ângulos feitos pelos raios incidente e reflectido relativamente à normal no ponto de incidência são iguais. A lei da reflexão estabelece ainda que o raio incidente,

o raio reflectido e a normal ao espelho no ponto de incidência se situam num mesmo plano, chamado plano de incidência.

A Fig. 2.2 mostra a formação da imagem num espelho plano. Para um observador, os raios provenientes do ponto B do objecto e reflectidos no espelho parecem provir do ponto imagem B' . O ponto B' está a uma distância do espelho, igual à distância entre este e o ponto B . Todos os pontos de um objecto extenso têm imagens que se podem obter de maneira semelhante. Deste modo, pode-se concluir que a posição da imagem não depende da posição do observador e que o seu tamanho é igual ao tamanho do objecto, ou seja, que a *ampliação* é unitária. Por outro lado, verifica-se que o lado esquerdo no objecto aparece como o lado direito na imagem e vice-versa.

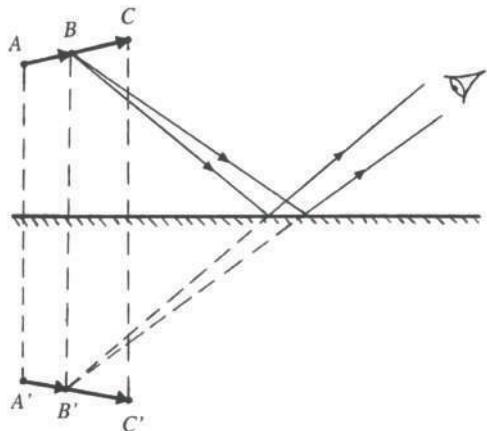


Figura 2.2 – Formação da imagem num espelho plano.

2.2. Espelhos esféricos

Um espelho esférico corresponde a parte de uma superfície esférica, que apresenta um raio R e um centro de curvatura C . Na Fig. 2.3 representa-se os casos (a) de um espelho esférico côncavo e (b) de um espelho esférico convexo. O *eixo principal* do espelho é a linha que passa pelo ponto V (chamado *vértice*) e pelo centro de curvatura C . Os raios reflectem-se no espelho de acordo com a lei da reflexão ($\theta_i = \theta_r$). Quando os raios incidentes no espelho são paralelos ao eixo principal, os raios reflectidos passam, no caso de um espelho côncavo, por um dado ponto F , chamado *foco principal*. No caso de um espelho convexo, todos os raios reflectidos parecem provir desse foco principal, que neste caso se situa atrás do espelho.

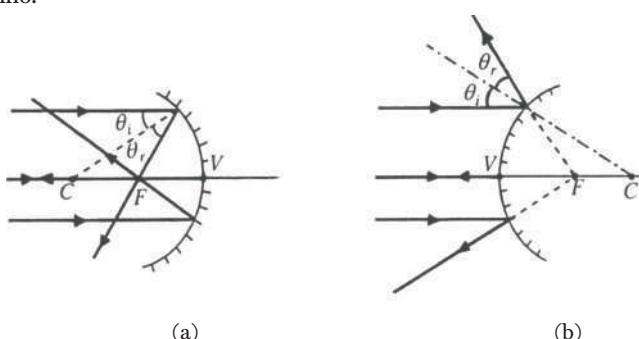


Figura 2.3 – Representação (a) de um espelho esférico côncavo e (b) de um espelho esférico convexo.

A Fig. 2.4 ilustra o processo de localização da imagem de um objecto linear formada por um espelho côncavo. São considerados para o efeito três raios: um que incide no espelho paralelamente ao eixo óptico (a), outro que incide no vértice V do espelho (b) e um outro que passa pelo centro de curvatura do espelho (c). Na prática, a localização da imagem pode ser feita utilizando apenas dois destes raios.

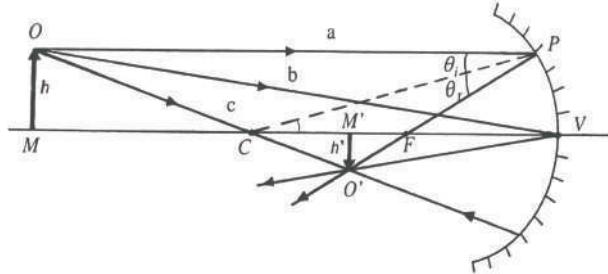


Figura 2.4 – Geometria para a localização da imagem produzida por um espelho côncavo.

Da análise da Fig. 2.4 e assumindo a chamada *aproximação paraxial*, segundo a qual os ângulos entre os raios luminosos e o eixo óptico são suficientemente pequenos, obtém-se no problema PR 2.2 o resultado

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R} \equiv \frac{1}{f} \quad (2.2)$$

onde $s = \overline{MV}$, $s' = \overline{M'V}$, $R = \overline{CV}$ e

$$f = -\frac{R}{2} \quad (2.3)$$

é a distância focal do espelho. Tem-se ainda a relação:

$$\frac{h'}{h} \equiv A_l = -\frac{s'}{s} \quad (2.4)$$

A grandeza A_l corresponde à chamada *ampliação lateral* da imagem. Se $A_l < 1$ tem-se uma imagem reduzida, enquanto que para $A_l > 1$ se tem uma imagem ampliada. Por outro lado, se $A_l > 0$ a imagem é direita, enquanto $A_l < 0$ indica uma imagem invertida.

Na resolução de problemas relativos à determinação da imagem formada por espelhos esféricos é importante estabelecer algumas convenções quanto aos sinais das grandezas envolvidas. Assim:

- a) As distâncias s e s' medidas na parte da frente do espelho são positivas, enquanto na parte de trás são negativas. No primeiro caso, o objecto e a imagem são *reais*, enquanto no segundo caso são *virtuais*.
- b) A distância focal f é positiva para um espelho côncavo e negativa para um espelho convexo.
- c) As alturas, h , medidas acima do eixo principal são positivas, enquanto abaixo desse eixo são negativas.

2.3. Lei de Snell para a refracção

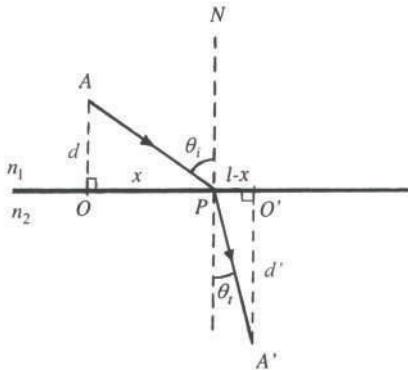


Figura 2.5 – Geometria para demonstrar a lei da refracção.

A Fig. 2.5 ilustra a refracção de um raio luminoso na interface entre dois meios homogéneos e transparentes com índices de refracção diferentes, n_1 e n_2 . Como se viu no Capítulo 1, o índice de refracção de um meio é dado pela razão entre as velocidades da luz no vazio e nesse meio. Tendo por base a geometria da Fig. 2.5, e usando o princípio do tempo mínimo de Fermat, deriva-se no problema PR 2.3 a chamada *lei da refracção*:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_t \quad (2.5)$$

De notar que, sendo $n_1 < n_2$, se tem pela Eq. (2.5) $\theta_t < \theta_i$. Contudo, quando se tem $n_1 > n_2$ verifica-se que $\theta_t > \theta_i$. Neste caso, existe um ângulo de incidência crítico, $\theta_i = \theta_c$, para o qual o ângulo de transmissão é $\theta_t = 90^\circ$. Usando a Eq. (2.5) tem-se que

$$\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (2.6)$$

Para valores do ângulo de incidência $\theta_i > \theta_c$, não existe raio transmitido e o raio incidente sofre uma *reflexão interna total*. Este fenómeno é essencial no domínio da óptica guiada, como se verá no capítulo 5.

2.4. Refracção numa superfície esférica

A Fig. 2.6 ilustra a trajectória de um raio que incide num ponto P pertencente à superfície esférica de separação entre dois meios homogéneos, com índices de refracção n_1 e n_2 . Usando a lei da refracção na aproximação paraxial, obtém-se no problema PR 2.4 a seguinte relação entre as distâncias objecto, s , e imagem, s' :

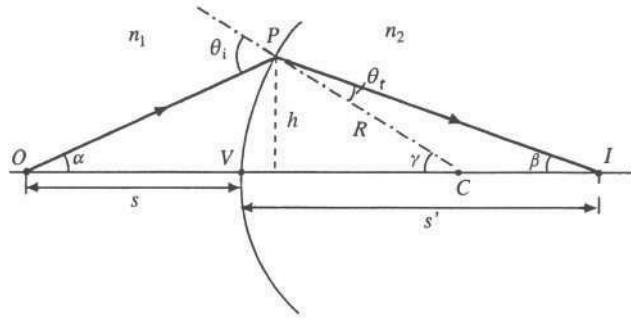


Figura 2.6 – Geometria para o estudo da refracção de um raio numa superfície esférica.

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} = D \quad (2.7)$$

A grandeza D na Eq. (2.7) é chamada *potência* do dioptrio e tem por unidade a *dioptria* quando R é dado em metros.

Por convenção, considera-se que a distância s é positiva (negativa) se a luz provém de um ponto à esquerda (direita) do dioptrio, enquanto que a distância s' é positiva (negativa) se a luz se dirige para um ponto à direita (esquerda) desse mesmo dioptrio. Por outro lado, o raio R considera-se positivo (negativo) se o centro de curvatura do dioptrio se situa à direita (esquerda) do vértice V .

2.5. A lente delgada

Uma lente simples é um sistema refractivo definido por duas interfaces, sendo que pelo menos uma delas deve ser curva. O caso de uma lente esférica delgada, cuja espessura se considera desprezável, pode ser analisado com base na Eq. (2.7). Suponhamos que a lente é constituída por um vidro com índice de refracção n , limitado por duas superfícies esféricas, e que se encontra no ar. A refracção na primeira superfície, com um raio de curvatura R_1 , é descrita pela equação:

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s''} = \frac{n-1}{R_1} \quad (2.8)$$

onde s'' é a distância da imagem relativamente a essa superfície. Esta imagem funciona como objecto para a segunda refracção, situando-se a uma distância $-s''$ da segunda superfície, de raio de curvatura R_2 . A equação para a segunda refracção será então:

$$\frac{n}{(-s'')} + \frac{1}{s'} = \frac{1-n}{R_2} \quad (2.9)$$

Adicionando as Eq.s (2.8) e (2.9) obtém-se

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.10)$$

que é a chamada *equação das lentes delgadas*, também conhecida por *equação dos fabricantes de lentes*. Fazendo $s \rightarrow \infty$ ($s' \rightarrow \infty$), tem-se $s' = f(s = f)$, onde

$$f = \left[(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1} \quad (2.11)$$

é a chamada *distância focal da lente*. O inverso da distância focal corresponde à *potência da lente*, que é igual à soma das potências dos dois dioptros que delimitam a lente. Quando se tem $f > 0$, diz-se que a lente é *positiva*, ou *convergente*. Por outro lado, quando $f < 0$, diz-se que a lente é *negativa*, ou *divergente*.

Na Fig. 2.7 representa-se a formação da imagem de um dado objecto por uma lente delgada biconvexa. Considera-se para o efeito três raios: um que sai do objecto paralelamente ao eixo óptico e que, após atravessar a lente, passa pelo foco secundário (F_i), outro que passa pelo centro da lente (O) e que não é desviado, e um terceiro raio que passa pelo foco primário (F_o) e emerge da lente paralelamente ao eixo óptico. De facto, basta usar apenas dois destes raios para encontrar a imagem de um qualquer ponto do objecto.

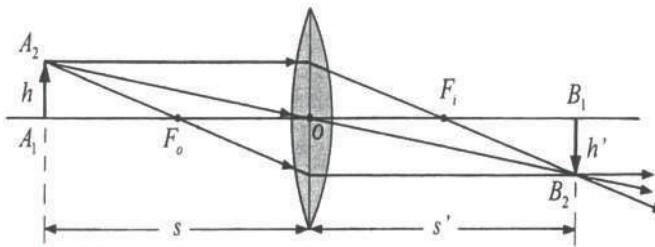


Figura 2.7 – Formação de imagem por uma lente delgada biconvexa.

Considerando a semelhança dos triângulos A_1A_2O e B_1B_2O na Fig. 2.7, tem-se que a ampliação lateral da imagem é dada por:

$$A_l \equiv \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s} \quad (2.12)$$

Pode-se verificar facilmente das Eq.s (2.10) e (2.11) que no caso de um objecto real e situado a uma distância s da lente, tal que $s > f$, a imagem correspondente é também real ($s' > 0$) mas invertida ($A_l < 0$). Contudo, quando o objecto se situa a uma distância $s < f$, a imagem correspondente é virtual ($s' < 0$) e direita ($A_l > 0$).

2.6. O método matricial

Antes de construir um sistema óptico, pode-se usar a óptica geométrica para traçar raios através desse sistema com o objectivo de estudar o seu desempenho. Para este efeito, é conveniente escrever as equações em causa na forma matricial, dado que a álgebra de matrizes permite tratar com relativa simplicidade o problema da propagação dos raios luminosos através de qualquer sistema óptico. Nesta secção descreve-se os aspectos principais do método matricial, assumindo para o efeito a aproximação paraxial já antes referida.

A Fig. 2.8 representa a propagação de um raio luminoso através de uma lente espessa. Assume-se que as superfícies da lente apresentam uma curvatura esférica, com raios de curvatura R_1 (superfície da esquerda) e R_2 (superfície da direita). Os pontos V_1 e V_2 são os vértices das superfícies ópticas e correspondem à intersecção dessas superfícies com o eixo óptico.

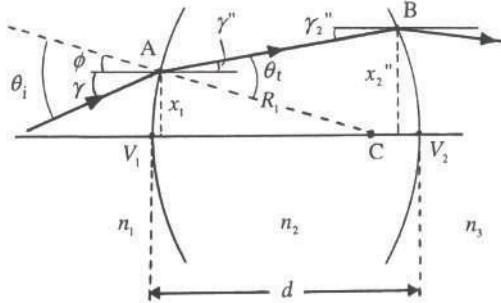


Figura 2.8 – Geometria para o traçado de raios numa lente espessa.

Usando a lei da refracção na aproximação paraxial, mostra-se no problema PR 2.8 que a altura, x_1 , e o ângulo feito com o eixo óptico, γ , do raio incidente no ponto A se relacionam com as correspondentes grandezas (x_1'' e γ'') do raio refratado através da seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ \gamma'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{D_1}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde

$$D_1 = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (2.14)$$

é a potência do dioptrômetro.

A matriz

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{D_1}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

descreve a refracção no ponto A da superfície esférica, sendo, por isso, chamada *matriz de refracção*. O seu determinante é:

$$|\mathbf{R}_1| = \frac{n_1}{n_2} \quad (2.16)$$

Mostra-se igualmente no problema PR 2.8 que a altura, x_1'' , e o ângulo com o eixo óptico, γ'' , do raio refratado no ponto A se relacionam com as correspondentes grandezas do raio incidente no ponto B (x_2'' e γ_2'') através da seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_2'' \\ \gamma_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ \gamma'' \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde d é a espessura da lente.

A matriz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

descreve a propagação do raio entre as duas superfícies da lente e é chamada *matriz de transferência*. O seu determinante é

$$|\mathbf{T}| = 1 \quad (2.19)$$

A refracção do raio no ponto B da segunda superfície da Fig. 2.8 pode ser descrita usando o mesmo método que conduziu à Eq. (2.15). Neste caso, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_2' \\ \gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{D_2}{n_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2'' \\ \gamma_2'' \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde x_2' e γ' representam, respectivamente, a altura e o ângulo com o eixo óptico do feixe transmitido, enquanto que

$$D_2 = \frac{n_3 - n_2}{R_2} \quad (2.21)$$

é a potência do segundo dioptro. A matriz de refracção para este dioptro é, então:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{D_2}{n_3} & \frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

O produto das três matrizes (2.15), (2.18) e (2.22) dá a chamada *matriz de sistema*, \mathbf{L} , para o caso de uma lente espessa:

$$\mathbf{L} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2 \mathbf{T} \mathbf{R}_1 \quad (2.23)$$

Pode-se mostrar que o determinante da matriz de sistema é:

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{R}_2| |\mathbf{T}| |\mathbf{R}_1| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \frac{n_1}{n_3} \quad (2.24)$$

Se o índice de refracção for o mesmo no princípio e no fim do trajecto do raio luminoso, o determinante da matriz de sistema é 1.

No caso particular de uma lente delgada tem-se $d \rightarrow 0$. Se essa lente se situar no ar, tem-se ainda $n_1 = n_3 = 1$, pelo que a sua matriz assume um aspecto particularmente simples:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde

$$\frac{1}{f} = D_1 + D_2 \quad (2.26)$$

Pode-se verificar que a Eq. (2.26) está de acordo com a Eq. (2.11).

2.7. Matriz de sistema para a formação de imagem

A matriz de sistema que representa a formação de imagem por uma lente depende da matriz de transferência, T_0 , do objecto até à lente, da matriz da própria lente, L , e da matriz de transferência desde a lente até à imagem, T_i sendo dada por

$$S = T_i L T_0 \quad (2.27)$$

O procedimento que conduziu à Eq. (2.27) pode ser generalizado a qualquer sistema óptico. Deste modo, indicando a matriz desse sistema na forma

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} x_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

onde x_0 (x_i) e γ_0 (γ_i) representam, respectivamente, a altura e o ângulo com o eixo óptico do raio objecto (imagem). O anulamento dos elementos da matriz $ABCD$ na Eq. (2.29) corresponde a diferentes situações que importa analisar:

1. $D = 0$. Neste caso, tem-se $\gamma_i = Cx_0$ independentemente de γ_0 , significando que todos os raios provenientes de um mesmo ponto no plano objecto, situado a uma distância x_0 do eixo óptico, deixam o sistema fazendo um mesmo ângulo com o eixo óptico. Ou seja, o objecto situa-se no *plano focal primário* do sistema.
2. $A = 0$. Este caso é semelhante ao anterior, tendo-se $x_i = B\gamma_0$. Ou seja, todos os raios incidentes no sistema óptico, segundo um mesmo ângulo, são focados num mesmo ponto, situado a uma distância x_i do eixo óptico. Este ponto situa-se no *plano focal secundário* do sistema.
3. $B = 0$. Neste caso tem-se $x_i = Ax_0$ independentemente de γ_0 , significando que todos os raios provenientes de um mesmo ponto no plano objecto convergem para um mesmo ponto no plano imagem. Ou seja, o anulamento do elemento B da matriz de sistema permite determinar a posição da imagem. Simultaneamente, verifica-se que o elemento A corresponde à ampliação desse sistema.
4. $C = 0$. Neste caso tem-se $\gamma_i = D\gamma_0$. Ou seja, todos os raios que entram no sistema numa dada direcção, paralelamente entre si, saem do sistema também paralelamente uns aos outros, embora numa direcção diferente. Esta situação corresponde à configuração de um telescópio, sendo a sua ampliação angular dada pelo elemento D .

2.8. Sistemas ópticos periódicos

Um sistema óptico periódico consiste numa sequência de sistemas unitários idênticos. Um exemplo de um sistema óptico periódico é dado por um conjunto de lentes idênticas e igualmente espaçadas. Outro exemplo pode ser um conjunto de dois espelhos, formando uma cavidade óptica ressonante. Nestes casos, os raios atravessam o mesmo sistema unitário repetidamente.

Considere-se um raio que entra no sistema a uma altura x_0 e fazendo um ângulo γ_0 relativamente ao eixo óptico. Para determinar os valores (x_p, γ_p) desses parâmetros à saída do p -ésimo estágio, deve-se fazer actuar a matriz $ABCD$ que caracteriza o sistema unitário p vezes. A relação entre esses parâmetros à saída do p -ésimo e do $(p+1)$ -ésimo estágio é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_{p+1} \\ \gamma_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \gamma_p \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Partindo da Eq. (2.30), e assumindo que $|S| = AD - BC = 1$, pode-se obter a seguinte equação para a evolução da altura do raio, x_p :

$$x_{p+2} - (A + D)x_{p+1} + x_p = 0 \quad (2.31)$$

Mostra-se no problema PR 2.12 que solução da Eq. (2.31) pode ser apresentada na forma:

$$x_p = x_{\max} \sin(p\psi + \psi_0) \quad (2.32)$$

onde x_{\max} e ψ_0 são constantes determinadas a partir das condições iniciais do raio e

$$\psi = \cos^{-1}\left(\frac{A + D}{2}\right)$$

Para que x_p seja dada por uma função harmónica, como na Eq. (2.32), a variável $\psi = \cos^{-1}[(A + D)/2]$ deve ser real. Isto implica que se verifique a condição

$$\frac{|A + D|}{2} \leq 1 \quad (2.33)$$

Se, pelo contrário, se tiver $\frac{|A + D|}{2} > 1$, então ψ_0 será imaginário e a solução será dada por uma função hiperbólica, cujo valor aumenta monotonamente com p .

Uma solução harmónica assegura que a distância ao eixo óptico, x_p , permanece limitada para todos os valores de p .

Ou seja, a Eq. (2.33) corresponde a uma *condição de estabilidade* para a trajectória do raio.

2.9. Aberrações

O traçado rigoroso de raios através de um sistema óptico permite evidenciar discrepâncias relativamente às previsões da teoria paraxial, ou teoria de primeira ordem, apresentada nas Secções 2.2 e 2.3. Essas discrepâncias são chamadas *aberrações* e podem ser de dois tipos: *cromáticas* (devido à dependência do índice de refracção com o comprimento de onda) ou *monocromáticas*, que ocorrem mesmo com luz monocromática.

2.9.1. Aberrações monocromáticas

A função seno pode expandir-se numa série de Maclaurin:

$$\sin \gamma = \gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \dots \quad (2.34)$$

Quando se consideram apenas os dois primeiros termos no membro direito da Eq. (2.34) tem-se a chamada teoria de terceira ordem. Os desvios desta teoria relativamente à teoria de primeira ordem dão origem às chamadas aberrações primárias: *aberração esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo e distorção*. A consideração dos termos de ordem superior à terceira no desenvolvimento da Eq. (2.34) permite construir aberrações de ordem superior. Contudo, abordaremos a seguir, de modo sumário, apenas as aberrações primárias.

a) Aberração esférica

A aberração esférica consiste, basicamente, na dependência da distância focal com a abertura para raios não paraxiais. No caso de uma lente convergente, os raios marginais intersectam o eixo óptico antes dos raios paraxiais (Fig. 2.9), enquanto que para uma lente divergente acontece o contrário. A distância entre o foco dos raios marginais (FRM) e o foco dos raios paraxiais (FRP) designa-se por *aberração esférica longitudinal* (AEL). Esta aberração é positiva no caso de uma lente convergente e negativa no caso de uma lente divergente.

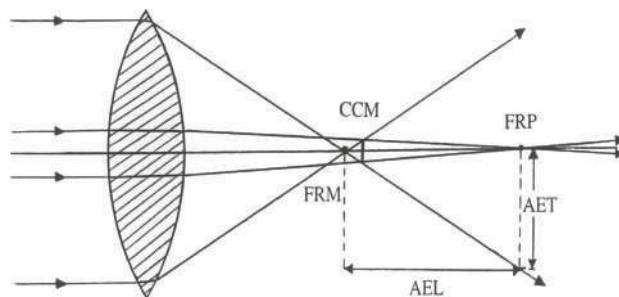


Figura 2.9 - Aberração esférica para o caso de uma lente convergente.

FRP: foco dos raios paraxiais; FRM: foco dos raios marginais;

AEL: aberração esférica longitudinal; AET: aberração esférica transversal;

CCM: círculo de confusão mínima.

Em consequência da aberração esférica, a imagem de um objecto pontual, observada num ecrã, não é um ponto, como seria de esperar com base na teoria paraxial. Em vez disso, verifica-se a existência de uma mancha luminosa, constituída por um núcleo central mais brilhante, rodeado por um halo produzido pelos raios marginais. A distância entre o eixo e o ponto em que o raio incide no ecrã tem o nome de *aberração esférica transversal* (AET). Verifica-se a existência de uma posição P, para a qual o diâmetro da mancha luminosa no ecrã é mínimo, correspondendo ao chamado *círculo de confusão mínima* (CCM).

Os raios que passam por zonas consecutivas da lente intersectam-se numa curva chamada *cáustica*. A rotação desta curva, em torno do eixo óptico, dá origem a uma figura tridimensional, a chamada *superfície cáustica*, cujo vértice coincide com o foco paraxial.

A aberração esférica não pode ser completamente eliminada no caso de uma lente simples, qualquer que seja a sua forma. Contudo, esta aberração pode ser reduzida, fazendo com que uma ou ambas as superfícies da lente tenham uma forma não-esférica, ou realizando uma combinação adequada de lentes convergentes e divergentes.

b) Coma

O termo *coma* deve-se à semelhança com a forma de um cometa da imagem de um objecto pontual situado fora do eixo. Este efeito deve-se à variação da ampliação lateral com a altura, medida relativamente ao eixo óptico, do ponto de incidência do raio na lente. Em alguns casos, os raios marginais intersectam o plano imagem mais próximos do eixo do que os raios paraxiais, sendo então o coma dito negativo. Noutros casos, os raios marginais intersectam esse plano mais longe do eixo do que os raios paraxiais (Fig. 2.10a), tendo-se então um coma positivo. Cada zona circular da lente forma uma imagem circular chamada *círculo comático*. O conjunto de todos estes círculos comáticos, cujos raios aumentam com o raio daquelas zonas, dá origem a uma figura com a forma de um cometa, como se mostra na Fig. 2.10b.

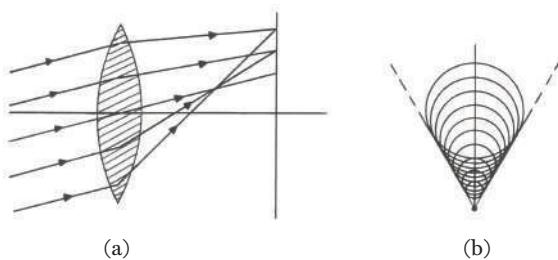


Figura 2.10 – (a) Ilustração de um caso de coma positivo e (b) formação de uma imagem comática a partir de um conjunto de círculos comáticos.

O coma depende da forma da lente, tal como a aberração esférica. Contudo, os dois tipos de aberração diferem em vários aspectos. Em particular, a aberração comática depende do ângulo de obliquidade, não se verificando para objectos pontuais situados no eixo óptico.

c) Astigmatismo

O astigmatismo é uma aberração que tem que ver com a assimetria do cone de raios incidente na lente quando o objecto pontual está fora do eixo óptico. Para a descrição desta aberração torna-se conveniente definir dois planos: o *plano meridional*, ou *plano tangencial*, que contém o raio principal (raio que passa pelo centro das pupilas) e o eixo óptico, e o *plano sagital*, que contém igualmente o raio principal mas é perpendicular ao plano meridional. No caso de um feixe de raios paralelos, incidindo obliquamente na lente, a configuração dos raios é diferente para aqueles dois planos. A inclinação dos raios é maior no plano meridional, o que determina uma

distância focal inferior neste plano, comparada com a distância focal no plano sagital. A diferença astigmática entre as duas distâncias focais aumenta rapidamente com a obliquidade dos raios luminosos, ou seja, com a distância do objecto ao eixo óptico.

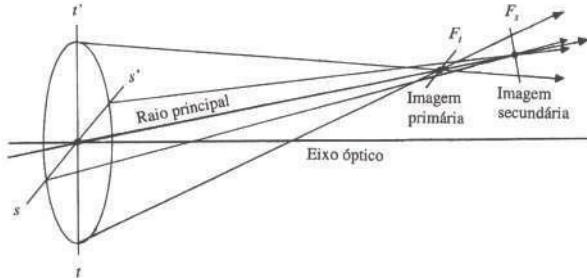


Figura 2.11 – Representação das imagens astigmáticas de um objecto pontual fora do eixo óptico.

Um objecto pontual fora do eixo óptico apresenta duas imagens lineares, como se representa na Fig. 2.11: uma *imagem primária*, situada no *foco tangencial* F_t , e uma imagem secundária, situada no *foco sagital* F_s . Se um ecrã for colocado entre estes dois focos, perpendicularmente ao raio principal, obtém-se em geral uma imagem com forma elíptica. Contudo, sensivelmente a meio caminho entre F_t e F_s essa imagem terá uma forma circular, correspondendo ao chamado *círculo de confusão mínima*.

d) Curvatura de campo

A imagem de um objecto plano e perpendicular ao eixo só é aproximadamente plana na zona paraxial. Quando a abertura de um sistema óptico é finita, a imagem forma-se sobre uma superfície curva; esta aberração primária é conhecida por curvatura de campo ou curvatura de Petzval. A imagem de um objecto, assente numa calote esférica S_o , forma-se sobre uma outra calote esférica, S_i , ambas com o mesmo centro O (Fig. 2.12). Quando a superfície S_o se torna mais plana, aproximando-se da superfície S_o' , as imagens deslocam-se em direcção à lente, ao longo do respectivo raio principal, formando assim uma superfície parabólica, S_p , chamada superfície de Petzval. No caso de uma lente divergente, essa superfície curva-se de modo a afastar-se do plano objecto. A curvatura de campo pode ser anulada combinando adequadamente lentes convergentes e divergentes.

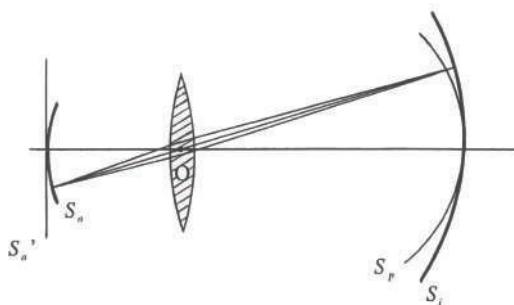


Figura 2.12 – Ilustração da curvatura de campo.

e) Distorção

A distorção é devida ao facto de a ampliação transversal poder ser função da distância da imagem ao eixo óptico. Na verdade, as diferentes zonas da lente têm distâncias focais distintas, o que determina ampliações diferentes. A distorção diz-se positiva se a imagem de cada ponto se afasta radialmente do centro, sendo maior o afastamento para os pontos mais marginais (Fig. 2.13b). Inversamente, a distorção é negativa se a ampliação transversal diminuir com a distância ao eixo, verificando-se uma aproximação de cada imagem pontual ao

eixo (Fig. 2.13c). A distorção das lentes delgadas é praticamente nula, mas as lentes espessas, convergentes ou divergentes, determinam uma distorção positiva ou negativa, respectivamente.

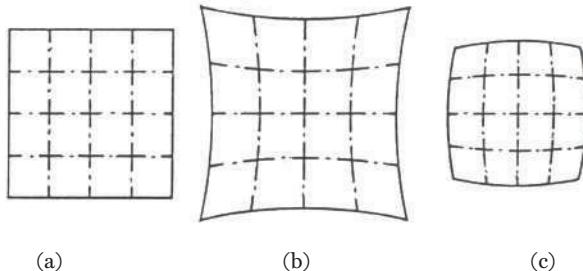


Figura 2.13 – Ilustração da distorção para o caso da imagem de uma rede quadrada (a). A distorção pode ser positiva (b) ou negativa (c).

2.9.2. Aberrações cromáticas

As aberrações cromáticas são específicas da luz policromática e manifestam-se em consequência do índice de refracção dos componentes ópticos variar com o comprimento de onda. No caso de uma lente delgada situada no ar, a sua distância focal é dada por:

$$f = \left[(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{(n-1)\alpha} \quad (2.35)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \quad (2.36)$$

sendo R_1 e R_2 os raios de curvatura das superfícies da lente e n o seu índice de refracção. Como n depende do comprimento de onda, o mesmo acontece com a distância focal (Fig. 2.14). A distância axial entre dois pontos focais extremos numa dada gama de frequências chama-se *aberração cromática axial* (ACA). Existe uma posição entre esses pontos focais extremos em que a dimensão da mancha luminosa, correspondente à imagem de um objecto pontual distante, é mínima. Essa posição corresponde ao *círculo de confusão mínima* (CCM).

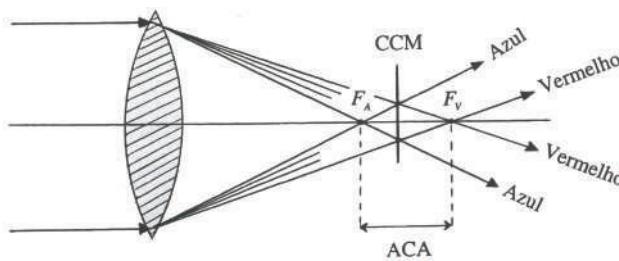


Figura 2.14 – Ilustração da aberração cromática.

No caso de uma lente convergente, como na Fig. 2.14, o foco correspondente à luz azul, F_A , encontra-se à esquerda do foco correspondente à luz vermelha, F_V , dizendo-se então que a aberração cromática axial é positiva.

No caso de uma lente divergente, as posições desses pontos focais são invertidas, tendo-se então uma aberração cromática axial negativa.

Pares acromatas

A sobreposição dos pontos focais extremos F_A e F_V , na Fig. 2.14, é possível associando uma lente convergente com uma outra divergente, o que resulta num par dito *acromata*. Se as duas lentes estiverem separadas por uma distância d , a distância focal do par é dada, como se mostra no problema PR 2.9, por:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (2.37)$$

onde f_1 e f_2 são as distâncias focais das lentes. A condição de acromaticidade do par para o vermelho e para o azul implica:

$$\frac{1}{f_V} = \frac{1}{f_A} \quad (2.38)$$

Usando a notação

$$f_j = \frac{1}{(n_j - 1)\alpha_j}, \quad j = 1, 2 \quad (2.39)$$

e supondo que as duas lentes estão em contacto ($d = 0$), a condição (2.38) permite obter o seguinte resultado:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{n_{2A} - n_{2V}}{n_{1A} - n_{1V}} \quad (2.40)$$

A distância focal da lente composta pode ser especificada para a luz amarela (AM), intermédia entre o azul e o vermelho. Para esse comprimento de onda tem-se:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{(n_{2AM} - 1)f_{2AM}}{(n_{1AM} - 1)f_{1AM}} \quad (2.41)$$

Igualando os segundos membros das Eq.s (2.40) e (2.41) obtém-se:

$$\frac{f_{2AM}}{f_{1AM}} = -\frac{(n_{2A} - n_{2V})(n_{1AM} - 1)}{(n_{1A} - n_{1V})(n_{2AM} - 1)} \quad (2.42)$$

Atendendo a que o índice de refracção diminui com o comprimento de onda na região visível do espectro, tem-se $n_A > n_V$. Por outro lado, como $n_{AM} > 1$, conclui-se da Eq. (2.42) que uma das duas lentes do par acromata deve ser divergente, enquanto a outra deve ser convergente.

Mostra-se no problema PR 2.15 que também possível construir um par acromata a partir de duas lentes iguais, separadas entre si por uma certa distância d .

2.10. Problemas resolvidos

PR 2.1. Considerando a geometria da Fig. 2.1, e o princípio do tempo mínimo de Fermat, obtenha a lei da reflexão dada pela Eq. (2.1).

Resolução

Atendendo a que o tempo é dado pela razão distância/velocidade e que os raios viajam com velocidade constante num meio uniforme, o problema da minimização do tempo de percurso, imposto pelo princípio de Fermat, pode ser substituído pelo problema da minimização da distância $L = \overline{AP} + \overline{PA'}$ (ver a Fig. 2.1). Dado que se desconhece a posição exacta do ponto P , faremos $\overline{OP} = x$ e $\overline{PO'} = l - x$, sendo $l = \overline{OO'}$.

Considerando a geometria da Fig. 2.1 e usando o teorema de Pitágoras, tem-se a seguinte expressão para a distância L :

$$L = \sqrt{d^2 + x^2} + \sqrt{d'^2 + (l - x)^2} \quad (1)$$

A distância mínima percorrida pelo raio é obtida derivando L em ordem a x e igualando a expressão resultante a zero:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} - \frac{(l - x)}{\sqrt{d'^2 + (l - x)^2}} = 0 \quad (2)$$

Considerando os triângulos OAP e $O'A'P$, assim como os ângulos θ_i e θ_r da Fig. 2.1, tem--se que a Eq. (2) permite obter o resultado:

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad (3)$$

Conclui-se, assim, que deve ter-se

$$\theta_i = \theta_r \quad (4)$$

PR 2.2. Considerando a geometria da Fig. 2.4 e assumindo a aproximação paraxial, obtenha os resultados dados pelas Eq.s (2.2)-(2.4) para a reflexão num espelho esférico.

Resolução

Na aproximação paraxial, considera-se que o ângulo, θ , entre o raio luminoso e o eixo óptico é suficientemente pequeno. Nestas circunstâncias, tem-se

$$\cos \theta \approx 1,$$

e

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$$

Com base na geometria da Fig. 2.4 e usando a aproximação paraxial, tem-se:

$$\tan(P\hat{C}V) = \theta_i = \frac{h}{|R|}; \quad (1)$$

$$\tan(P\hat{F}V) = 2\theta_i = \frac{h}{f} \quad (2)$$

onde $|R| = \overline{CP}$ é o raio e $f = \overline{FV}$ é a distância focal do espelho.

Por convenção, considera-se que R é negativo quando o centro de curvatura C se encontra à frente do espelho (i.e., o espelho é côncavo). Por outro lado, R é positivo quando C se situa atrás do espelho (i.e., o espelho é convexo). No caso da Fig. 2.4, tem-se $|R| = -R$ e das Eq.s (1) e (2) conclui-se que

$$f = -\frac{R}{2} \quad (3)$$

Considerando os triângulos OMC e $O'M'C$ e fazendo $s = \overline{MV}$, $s' = \overline{M'V}$, $f = \overline{FV}$ e $|R| = \overline{CV}$, tem-se:

$$\tan(O\hat{C}M) = \frac{h}{s - |R|}; \quad (4)$$

$$\tan(O'\hat{C}M') = \frac{h'}{|R| - s'} \quad (5)$$

Como $\operatorname{tg}(O\hat{C}M) = -\operatorname{tg}(O'\hat{C}M')$, conclui-se que

$$\frac{h'}{h} = -\frac{|R| - s'}{s - |R|} = -\frac{2f - s'}{s - 2f} \quad (6)$$

Por outro lado, considerando os triângulos VPF e $FM'O'$, tem-se

$$\tan(V\hat{F}P) = \frac{h}{f}, \quad (7)$$

$$\tan(O'\hat{F}M') = \frac{h'}{s' - f} \quad (8)$$

Como $\operatorname{tg}(V\hat{F}P) = -\operatorname{tg}(O'\hat{F}M')$, tem-se

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s' - f}{f} \quad (9)$$

Igualando as Eq.s (6) e (9) e rearranjando a expressão obtém-se o resultado

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = -\frac{2}{R} \quad (10)$$

Este resultado confirma a Eq. (2.2).

Dos triângulos OMV e $O'M'V$ tem-se

$$\tan(O\hat{V}M) = \frac{h}{s}, \quad (11)$$

$$\tan(O'\hat{V}M') = \frac{h'}{s'}, \quad (12)$$

Como $\tan(O\hat{V}M) = -\tan(O'\hat{V}M')$, conclui-se que

$$\frac{h'}{h} \equiv A_l = -\frac{s'}{s} \quad (13)$$

Este resultado confirma a Eq. (2.4) para a *ampliação lateral* da imagem, A_l .

PR 2.3. Tendo por base a geometria da Fig. 2.5, e usando o princípio do tempo mínimo de Fermat, derive a lei de Snell para a refracção, dada pela Eq. (2.5).

Resolução

O tempo de percurso entre os pontos A e A' na Fig. 2.5 é dado por

$$t = \frac{n_1}{c} \overline{AP} + \frac{n_2}{c} \overline{PA'} \quad (1)$$

Considerando a geometria da Fig. 2.5 e usando o teorema de Pitágoras, tem-se

$$t = \frac{n_1}{c} \sqrt{d^2 + x^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{d'^2 + (l-x)^2} \quad (2)$$

onde $l = \overline{OO'}$. Em ordem a minimizar $t(x)$, impõe-se a condição $dt/dx = 0$:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_1}{c} \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} - \frac{n_2}{c} \frac{(l-x)}{\sqrt{d'^2 + (l-x)^2}} = 0 \quad (3)$$

Com base na expressão anterior e considerando a geometria da Fig. 2.5 pode-se obter o resultado

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (4)$$

A Eq. (4) corresponde à lei de Snell para a refracção.

PR 2.4. Considerando a geometria da Fig. 2.6 e a lei da refracção na aproximação paraxial, obtenha a Eq. (2.7), que descreve o efeito da refracção numa superfície esférica de raio R .

Resolução

Usando a lei de Snell para a refracção no ponto P da Fig. 2.6, tem-se:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (1)$$

Na aproximação paraxial, esta equação pode-se escrever na forma

$$n_1\theta_i = n_2\theta_t \quad (2)$$

Usando o teorema do ângulo exterior, tem-se da Fig. 2.6 que:

$$\theta_i = \alpha + \gamma \quad (3)$$

e

$$\theta_t = \gamma - \beta \quad (4)$$

Por outro lado, a aproximação paraxial permite escrever

$$\alpha = \frac{h}{s}, \quad \beta = \frac{h}{s'}, \quad \gamma = \frac{h}{R}, \quad (5)$$

A substituição das Eq.s (3)-(5) na Eq. (2) permite obter o resultado

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (6)$$

que corresponde à Eq. (2.7).

PR 2.5. As faces de uma lente biconvexa delgada, com um índice de refracção $n_v = 1.5$, têm um raio de curvatura $|R| = 10$ cm. A lente está colocada numa das paredes laterais de um tanque cheio de água ($n_{ag} = 1.33$). Um objecto é colocado, no lado de fora do tanque, sobre o eixo da lente, a uma distância de 50.0 cm desta. Determine a posição da imagem.

Resolução

Usando a Eq. (2.7) na refracção ar/lente, tem-se

$$\frac{n_{ar}}{s_1} + \frac{n_v}{s_1'} = \frac{n_v - n_{ar}}{R_1} \quad (1)$$

Aplicando a mesma relação na refracção lente/água, tem-se

$$\frac{n_v}{s_2} + \frac{n_{ag}}{s_2'} = \frac{n_{ag} - n_v}{R_2} \quad (2)$$

Se se desprezar a espessura da lente, tem-se $s_2 = -s_1'$. Nestas condições, somando membro a membro as relações anteriores, tem-se

$$\frac{n_{ar}}{s_1} + \frac{n_{ag}}{s_2'} = \frac{n_v - n_{ar}}{R_1} + \frac{n_{ag} - n_v}{R_2} \quad (3)$$

Usando os valores $n_{ar} = 1$, $n_v = 1.5$, $n_{ag} = 1.33$, $R_1 = +10.0$ cm, $R_2 = -10.0$ cm e $s_1 = +50.0$ cm, obtém-se que a imagem se forma na água, a uma distância $s_2' = +29.1$ cm da lente.

PR 2.6. Um sistema óptico produz uma imagem real de um objecto real, situada a uma distância de 15 cm. Uma lente biconvexa, com um índice de refracção $n = 1.5$ e raios de curvatura $|R_1| = 10$ cm e $|R_2| = 15$ cm, é colocada a 10 cm do sistema óptico. Calcule:

- A distância focal da lente;
- A distância entre a lente e a imagem final. Caracterize essa imagem.

Resolução

a) A distância focal da lente é dada pela Eq. (2.11):

$$f = \left[(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1} \quad (1)$$

Substituindo os valores $R_1 = +10$ cm e $R_2 = -15$ cm, tem-se

$$f = \left[0.5 \left(\frac{25}{1500} \right) \right]^{-1} = 12 \text{ cm} \quad (2)$$

b) O objecto original é real ($s_1 > 0$) e a imagem produzida pelo sistema óptico também é real ($s'_1 > 0$). Essa imagem constitui o objecto para a lente. A distância a que se encontra esse objecto da lente é dada pela equação de ligação:

$$s_2 = d - s'_1 = 10 - 15 = -5 \text{ cm} < 0 \quad (3)$$

pelo que se trata de um objecto virtual para a lente. Usando a equação das lentes delgadas, tem-se

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f} \rightarrow s'_2 = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = \frac{(-5)(12)}{-5 - 12} = \frac{60}{17} \text{ cm} > 0, \quad (4)$$

pelo que a imagem produzida pela lente é real. Por outro lado, tem-se que a ampliação total devida ao sistema óptico e à lente é dada por:

$$m = \left(-\frac{s'_1}{s_1} \right) \left(-\frac{s'_2}{s_2} \right) < 0, \quad (5)$$

pelo que a imagem é invertida.

PR 2.7. Considere um objecto com 2 cm de altura colocado a uma distância de 30 cm de uma lente biconvexa com distância focal $f = 20$ cm. No outro lado da lente está colocado, a 100 cm desta, um espelho côncavo de raio $|R| = 60$ cm.

- Determine a posição da imagem dada pela lente L .
- Qual a posição da imagem final formada após a reflexão no espelho?
- Caracterize a imagem final formada após reflexão no espelho.

Resolução

a) Tem-se

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f} \rightarrow s'_1 = \frac{s_1 f}{s_1 - f} = \frac{(30)(20)}{30 - 20} = 60 \text{ cm} \quad (1)$$

b) A distância a que se encontra o objecto para o espelho é dada pela equação de ligação:

$$s_2 = d - s_1' = 100 - 60 = 40 \text{ cm} \quad (2)$$

Por outro lado, usando a equação para a formação de imagem pelo espelho, tem-se:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2} = \frac{2}{|R|} \rightarrow s_2' = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = \frac{(40)(30)}{40 - 30} = 120 \text{ cm} \quad (3)$$

c) Dado que $s_2' > 0$, a imagem produzida pelo espelho é real. Por outro lado, tem-se que a ampliação total é dada por

$$m = \left(-\frac{s_1'}{s_1} \right) \left(-\frac{s_2'}{s_2} \right) = (-2)(-3) = 6 > 0, \quad (4)$$

pelo que a imagem final formada após reflexão no espelho é direita e seis vezes maior que o objecto original.

PR 2.8. Usando a aproximação paraxial, obtenha:

- a) a Eq. (2.15) para a matriz de refracção numa superfície esférica de raio R , que constitui a fronteira entre dois meios com índices de refracção n_1 e n_2 ;
- b) a Eq. (2.18) para a matriz de transferência num meio homogéneo de espessura d .

Resolução

a) Aplicando a lei de Snell no ponto A da Fig. 2.8, e usando a aproximação paraxial, tem-se:

$$n_1 \theta_i = n_2 \theta_t \quad (1)$$

ou, considerando os ângulos indicados na mesma figura:

$$n_1 (\gamma + \phi) = n_2 (\gamma'' + \phi) \quad (2)$$

onde γ e γ'' representam os ângulos que os raios incidente e transmitido fazem com o eixo óptico, enquanto que ϕ é o ângulo entre esse eixo e a normal à superfície no ponto A . Atendendo à geometria da Fig. 2.8 tem-se $\phi = x_1 / R_1$, pelo que a Eq. (2) fica:

$$n_1 \left(\gamma + \frac{x_1}{R_1} \right) = n_2 \left(\gamma'' + \frac{x_1}{R_1} \right) \quad (3)$$

Resolvendo esta equação em ordem a γ'' obtém-se:

$$\gamma'' = \frac{n_1}{n_2} \gamma + \frac{x_1 (n_1 - n_2)}{n_2 R_1} \quad (4)$$

A Eq. (4) pode ser escrita na forma:

$$\gamma'' = \frac{n_1}{n_2} \gamma - \frac{D_1}{n_2} x_1 \quad (5)$$

onde

$$D_1 = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (6)$$

é a potência do dioptró.

Atendendo a que a altura do raio relativamente ao eixo óptico não varia aquando da refracção no ponto A , tem-se:

$$x_1'' = x_1''' \quad (7)$$

onde as linhas indicam que se está junto à fronteira mas no meio de transmissão, cujo índice de refracção é n_2 .

As Eq.s (5) e (7) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ \gamma'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{D_1}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (8)$$

A matriz

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{D_1}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

é a *matriz de refracção* no ponto A.

b) Considerando a geometria da Fig. 2.8, pode-se verificar que, quando o raio vai desde o ponto A até ao ponto B , o ângulo que ele faz com o eixo óptico não varia, tendo-se então

$$\gamma'' = \gamma_2''' \quad (10)$$

Por outro lado, a altura do raio relativamente ao eixo óptico varia desde x_1'' até x_2'' , de acordo com a expressão:

$$x_2'' = x_1'' + d\gamma'' \quad (11)$$

onde d é a espessura da lente. As Eq.s (10) e (11) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_2'' \\ \gamma_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ \gamma'' \end{bmatrix} \quad (12)$$

A matriz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

é a *matriz de transferência*, que representa a progressão do raio desde o ponto A até ao ponto B na Fig. 2.8.

PR 2.9. Usando a teoria matricial, obtenha uma expressão para a distância focal de uma lente composta, constituída por duas lentes delgadas, com distâncias focais f_1 e f_2 , situadas no ar e separadas entre si por uma distância d .

Resolução

A matriz correspondente à lente composta, \mathbf{L}_c , é dada pelo produto de três matrizes: duas semelhantes à Eq. (2.25), e outra semelhante à Eq. (2.18), correspondente à progressão do raio entre as duas lentes simples. Assim, tem-se

$$\mathbf{L}_c = \mathbf{LTL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1-d/f_1 & d \\ d/f_1f_2 - 1/f_1 - 1/f_2 & 1-d/f_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Comparando a matriz anterior com a matriz de uma lente simples, dada pela Eq. (2.25), tem-se que o inverso da distância focal da lente composta é dado por:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1f_2} \quad (3)$$

No caso $d = 0$, tem-se:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (4)$$

Este resultado pode ser facilmente generalizado para o caso de um conjunto arbitrário de lentes.

PR 2.10. Considere um objecto com altura h , situado a uma distância s de uma lente delgada convergente, com uma distância focal f . No lado oposto à lente, a uma distância s' desta, encontra-se um ecrã. Usando o formalismo matricial, obtenha

- a) a relação que deve existir entre s , s' e f , para que a imagem do objecto se situe sobre o ecrã;
- b) a relação entre a ampliação lateral da imagem e as distâncias s e s' .

Resolução

a) A matriz de sistema consiste no produto de três matrizes, correspondentes (1) à transferência no ar desde o objecto até à lente, (2) à acção da lente e (3) à transferência no ar desde a lente até ao plano de formação da imagem. Usando as Eq.s (2.18) e (2.25) para as matrizes de transferência e da lente delgada, tem-se

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Efectuando o produto das matrizes, obtém-se

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s'}{f} & s' + s - \frac{s'}{f} \\ -\frac{1}{f} & -\frac{s}{f} + 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

A distância a que se forma a imagem, s' , é determinada fazendo $B = 0$, ou seja,

$$B = s' + s - \frac{s'}{f} = 0 \quad (3)$$

ou

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (4)$$

Este resultado está de acordo com as Eq.s (2.10) e (2.11).

b) A ampliação lateral da imagem é dada, nas mesmas circunstâncias, pelo elemento A da matriz de sistema:

$$A_l = A = 1 - \frac{s'}{f} = -\frac{s'}{s} \quad (5)$$

Este resultado está de acordo com a Eq. (1.12).

PR 2.11. Considere um objecto situado no ar, à distância de 40 cm de um bloco de vidro ($n = 1.5$) com 1 m de comprimento. A face desse bloco do lado do objecto tem uma forma convexa esférica, com um raio $R = 10$ cm. Usando o método matricial, caracterize a imagem desse objecto que se forma no bloco de vidro.

Resolução

Neste caso, a matriz de sistema consiste no produto de três matrizes, correspondentes (1) à propagação do raio no ar desde o objecto até ao bloco, (2) à refracção na superfície esférica e (3) à propagação do raio no vidro desde a superfície esférica até à imagem. Usando as Eqs (2.15) e (2.18) para as matrizes de refracção e de transferência, tem-se

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-1.5}{10(1.5)} & \frac{1}{1.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 40 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde s' é a distância da imagem ao vértice V . Efectuando produto de matrizes, obtém-se

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s'}{30} & 40 - \frac{2s'}{3} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

A distância s' é determinada fazendo $B = 0$, ou seja,

$$B = 40 - \frac{2s'}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad s' = 60 \text{ cm.} \quad (3)$$

Por outro lado, a ampliação da imagem é dada, nas mesmas circunstâncias, pelo elemento A :

$$A = 1 - \frac{s'}{30} = -1 \quad (4)$$

Conclui-se que a imagem é formada dentro do bloco de vidro, 60 cm à direita do vértice V (s' é positivo), está invertida (A é negativo) e tem o mesmo tamanho do objecto ($|A| = 1$).

PR 2.12.

- a) Partindo da Eq. (2.30) e assumindo que o determinante da matriz de sistema é unitário derive a Eq. (2.31).
- b) Mostre que a solução da Eq. (2.31) é dada pela Eq. (2.32).

Resolução

a) Considere-se um raio que entra no sistema a uma altura x_0 e fazendo um ângulo γ_0 relativamente ao eixo óptico. Para determinar os valores (x_p, γ_p) desses parâmetros à saída do p -ésimo estágio, deve-se fazer actuar a matriz $ABCD$ p vezes. A relação entre esses parâmetros à saída do p -ésimo e do $(p+1)$ -ésimo estágios é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_{p+1} \\ \gamma_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \gamma_p \end{bmatrix} \quad (1)$$

A Eq. (1) pode ser substituída pelas seguintes relações:

$$x_{p+1} = Ax_p + B\gamma_p \quad (2)$$

$$\gamma_{p+1} = Cx_p + D\gamma_p \quad (3)$$

Pode-se obter uma equação que governa a evolução da altura do raio, x_p , eliminando o ângulo γ_p entre as Eq.s (2) e (3). Da Eq. (2) tem-se:

$$\gamma_p = \frac{x_{p+1} - Ax_p}{B} \quad (4)$$

Substituindo p por $p+1$ na Eq. (4) tem-se:

$$\gamma_{p+1} = \frac{x_{p+2} - Ax_{p+1}}{B} \quad (5)$$

Substituindo (4) e (5) na Eq. (3), obtém-se a equação:

$$x_{p+2} - (A + D)x_{p+1} + x_p = 0 \quad (6)$$

onde se assumiu $|S| = AD - BC = 1$.

b) Considere-se que a solução da Eq. (6) é do tipo:

$$x_p = x_0 K^p \quad (7)$$

sendo K uma constante. Substituindo a Eq. (7) na Eq. (6) obtém-se a seguinte equação algébrica para o parâmetro K :

$$K^2 - (A + D)K + 1 = 0 \quad (8)$$

cujas soluções são:

$$K = \frac{A + D}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{A + D}{2} \right)^2} \quad (9)$$

Pode-se definir uma nova variável, ψ , na forma:

$$\psi = \cos^{-1} \left(\frac{A + D}{2} \right) \quad (10)$$

Fazendo a substituição

$$\frac{A + D}{2} = \cos \psi \quad (11)$$

na Eq. (9), obtém-se

$$K = \exp(\pm i\psi) \quad (12)$$

Deste modo, a Eq. (7) pode ser apresentada na forma

$$x_p = x_0 \exp(\pm ip\psi). \quad (13)$$

Pode-se escrever uma solução geral a partir da combinação linear das soluções anteriores correspondentes aos sinais mais e menos. Essa solução geral pode ser dada na forma:

$$x_p = x_{\max} \operatorname{sen}(p\psi + \psi_0) \quad (14)$$

onde x_{\max} e ψ_0 são constantes determinadas a partir das condições iniciais do raio.

PR 2.13. Considere uma sequência de lentes delgadas idênticas, cada uma com distância focal f , espaçadas de uma distância constante d . Obtenha o valor máximo desse espaçamento que garante uma trajectória estável para os raios paraxiais.

Resolução

O sistema unitário da sequência de lentes é constituído por uma distância d no espaço livre, seguido por uma lente. A matriz para esse sistema unitário é dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1)$$

Tem-se $A = 1$ e $D = 1 - d/f$, pelo que a condição de estabilidade

$$\frac{|A + D|}{2} \leq 1 \quad (2)$$

fica

$$\left| 1 - \frac{d}{2f} \right| \leq 1, \quad (3)$$

ou seja, deve-se ter

$$0 \leq d \leq 4f \quad (4)$$

Assim, o valor máximo do espaçamento entre as lentes que garante uma trajectória estável para os raios paraxiais é igual a quatro vezes a distância focal da lente.

PR 2.14. Uma lente de vidro *crown* delgada e biconvexa tem faces com raios de curvatura de 10.0 cm. Quando se encontra no ar, forma-se uma imagem com luz amarela a uma distância de 20.0 cm dessa lente. Atendendo a que os índices de refracção para a luz azul e vermelha são $n_A = 1.501$ e $n_V = 1.509$, respectivamente, calcule a extensão da aberração cromática axial correspondente a estes comprimentos de onda.

Resolução

A equação de uma lente delgada situada no ar é dada por

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

Diferenciando a Eq. (1) e considerando que, para uma dada posição do objecto, s é uma constante, tem-se

$$\Delta s' = -s'^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Delta n \quad (2)$$

O sinal menos no resultado anterior significa que, como o índice de refracção n diminui quando o comprimento de onda aumenta, a distância s' deve aumentar com o comprimento de onda.

Usando para s' o valor de referência correspondente à luz amarela ($s' = 20.0$ cm) e considerando $\Delta n = n_V - n_A = 8 \times 10^{-3}$, $R_1 = +10$ cm e $R_2 = -10$ cm, tem-se que a aberração cromática axial é dada por

$$|\Delta s'| = (0.2)^2 \left(\frac{1}{(0.1)} - \frac{1}{(-0.1)} \right) (8 \times 10^{-3}) = 6.4 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (3)$$

PR 2.15. Considere duas lentes delgadas convergentes e iguais, separadas por uma distância d . Obtenha uma expressão para essa distância

- a) que garante a mesma distância focal do par para a luz com comprimentos de onda λ_A e λ_B .
- b) que satisfaz a condição da alínea a) quando $\lambda_A = \lambda_0 - \Delta\lambda/2$ e $\lambda_B = \lambda_0 + \Delta\lambda/2$, com $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

Resolução

a) Usando a Eq. (3) do problema PR 2.9, tem-se que a distância focal do par de lentes é dada por

$$\frac{1}{f(\lambda)} = \frac{2}{f_0(\lambda)} - \frac{d}{f_0^2(\lambda)} \quad (1)$$

onde $f_0(\lambda)$ é a distância focal de cada uma das lentes para o comprimento de onda λ . Pretende-se ter $f(\lambda_A) = f(\lambda_B)$, pelo que deverá ser:

$$\frac{2}{f_0(\lambda_A)} - \frac{d}{f_0^2(\lambda_A)} = \frac{2}{f_0(\lambda_B)} - \frac{d}{f_0^2(\lambda_B)} \quad (2)$$

Da Eq. (2) obtém-se o resultado

$$d = \frac{2f_0(\lambda_A)f_0(\lambda_B)}{f_0(\lambda_A) + f_0(\lambda_B)} \quad (3)$$

b) Nas condições referidas, tem-se:

$$f_0(\lambda_A) \approx f_0(\lambda_0) - \frac{\Delta\lambda}{2} \left(\frac{df_0}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \quad (4)$$

$$f_0(\lambda_B) \approx f_0(\lambda_0) + \frac{\Delta\lambda}{2} \left(\frac{df_0}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \quad (5)$$

Substituindo as Eq. (4) e (5) na Eq. (3) e desprezando no numerador o termo em $(\Delta\lambda)^2$, tem-se o resultado

$$d = f_0(\lambda_0). \quad (6)$$

Ou seja, as lentes devem estar separadas de uma distância igual à distância focal, calculada para o comprimento de onda central λ_0 .

2.11. Problemas propostos

PP 2.1. Um objecto está situado à distância de 10 cm do vértice de um espelho convexo com uma distância focal de 8 cm. Determine a posição e a ampliação lateral da imagem.

PP 2.2. Um objecto de 2 cm de altura está situado 15 cm à frente de um espelho esférico (a) côncavo e (b) convexo, com um raio $|R| = 10$ cm. Determine a posição e a natureza da imagem em cada caso.

PP 2.3. Um objecto com 1 cm de altura encontra-se, direito, 3 cm à frente de um espelho côncavo, com um raio $|R| = 12$ cm. Determine a posição e a ampliação lateral da imagem resultante e faça o correspondente diagrama de raios.

PP 2.4. Derive uma expressão para o deslocamento lateral sofrido por um raio que incide segundo um ângulo ϕ numa lâmina transparente de faces paralelas, com um índice de refracção n e uma espessura d , situada no ar. Obtenha esse deslocamento lateral para os casos i) $\phi = 0$ e ii) $\phi = \pi/2$.

PP 2.5. Coloca-se uma lâmina transparente de faces paralelas, com índice de refração $n=1.5$ e espessura $d=3$ mm, à esquerda de uma lente convergente, de distância focal $f = 50$ cm. A que distância (à esquerda) da lâmina deve ser colocada uma fonte pontual, para que o feixe emergente da lente seja paralelo ao eixo óptico? Assuma a aproximação paraxial na resolução do problema.

PP 2.6. Uma esfera de vidro, com um índice de refracção n , apresenta uma cavidade esférica concêntrica, cheia de ar, com um raio (r) igual à espessura da camada de vidro. Na superfície interna da esfera encontra-se um objecto pontual, que é observado do exterior, na direcção diametralmente oposta. Mostre que a imagem assim observada está a uma distância $r(n - 1) / (3n - 1)$ do objecto.

PP 2.7. Uma esfera de vidro ($n = 1.5$) de raio R tem metade da sua superfície coberta por um filme reflector. Um pequeno objecto é colocado no eixo da esfera a uma distância $2R$ da superfície não espelhada. Encontre a posição da imagem formada pelas superfícies refractiva e espelhada.

PP 2.8. Considere uma lente delgada convergente com distância focal f . Mostre que a distância mais curta entre um objecto (real) e a sua imagem (também real) é $4f$.

PP 2.9. Um objecto com a altura de 1cm está situado a 15 cm de uma lente delgada, que tem uma distância focal $f = 10\text{cm}$. Encontre a posição e as características da imagem correspondente.

PP 2.10. Mostre que os elementos da matriz de sistema para uma lente espessa, \mathbf{L} , dada Eq. (2.23), são dados pelas seguintes expressões: $a_{11} = 1 - dD_1/n_2$, $a_{12} = dn_1/n_2$, $a_{21} = [dD_1D_2/n_2 - D_1 - D_2]/n_3$ e $a_{22} = (n_1/n_3)[1 - dD_2/n_2]$.

Mostre que o determinante dessa matriz é $|\mathbf{L}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = n_1/n_3$

PP 2.11. Mostre que a matriz representando a reflexão num espelho esférico côncavo de raio R é dada por:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

PP 2.12. Resolva o problema PR 2.5 usando o método matricial.

PP 2.13. Uma fonte pontual de luz encontra-se a 40 cm de uma lente convergente, com uma distância focal $f = 20\text{ cm}$. Um bloco grande de vidro ($n = 1.5$), apresentando uma face plana perpendicular ao eixo óptico, encontra-se no lado oposto da lente, a uma distância de 30 cm desta. Usando o método matricial, determine a que distância da lente se forma a imagem da fonte.

PP 2.14. Uma cuba cheia de água (índice de refracção 4/3) apresenta, numa das suas faces verticais, uma janela semi-esférica, com um raio de 20 cm. Um feixe colimado de luz, paralelo ao eixo da semi-esfera, incide na cuba. Desprezando a influência do vidro da janela na trajectória dos raios luminosos, calcule:

- a) A potência do dioptró e as distâncias focais objecto e imagem.
- b) A distância do vértice do dioptró a que se situa o foco dos raios marginais.
- c) A distância que separa o foco dos raios marginais do foco dos raios paraxiais (aberraçāo esférica longitudinal).
- d) O diâmetro da mancha luminosa observada no plano focal dos raios paraxiais (aberraçāo esférica transversal).

PP 2.15. a) Uma lente de vidro *crown* e outra de vidro *flint* são coladas por forma a constituírem um par acromata. Mostre que as distâncias focais das lentes *crown* e *flint* satisfazem a equação:

$$\kappa_c f_f + \kappa_f f_c = 0$$

$$\kappa = \frac{1}{n_0 - 1} \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

sendo n_0 o valor do índice de refracção do vidro no centro do espectro visível e $\Delta\lambda$ o intervalo de comprimentos de onda desse espectro.

b) Para o vidro *crown* tem-se $\kappa_c = 0.0169$, enquanto que para o vidro *flint* é $\kappa_f = 0.0384$. Mostre que se deve usar uma lente convergente de vidro *crown* e uma lente divergente de vidro *flint* para se obter um par acromata convergente.

2.12. Referências bibliográficas

1. BORN, M. e WOLF, E., *Principles of Optics*. 6^a Ed., Oxford: Pergamon Press, 1980.
2. HECHT, E. , *Optics*. 5th Ed., Pearson Education Limited, 2017.
3. KINGSLAKE, R., *Lens Design Fundamentals*. 2nd Ed., New York: Academic Press, 2009.
4. KLEIN, M. e FURTAK, T., *Optics*. 2^a Ed., New York: John Wiley & Sons, 1986.
5. MOURCULIS, M. e MACDONALD, J., *Geometrical Optics and Optical Design*. New York: Oxford University Press, 1996.
6. PEDROTTI F. L., PEDROTTI, L. M. e PEDROTTI, L. S., *Introduction to Optics*. 3rd Ed., Cambridge University Press, 2018.
7. MALACARA, D., *Geometrical and Instrumental Optics*. Academic Press, 1988.

Capítulo 3

INTERFERÊNCIA

As soluções da equação de onda dada pela Eq. (1.15) satisfazem o *princípio da sobreposição*, segundo o qual o campo eléctrico total \vec{E} , em qualquer ponto do espaço onde duas ou mais ondas se sobrepõem, é igual à soma vectorial dos campos eléctricos dessas ondas. O fenómeno da interferência consiste na interacção entre essas ondas. Dessa interacção resulta um padrão em que a distribuição da intensidade difere da soma das intensidades das ondas intervenientes, observando-se a existência de bandas brilhantes e escuras, chamadas *franjas de interferência*.

O primeiro registo do fenómeno de interferência foi realizado por Robert Boyle (1627-1691), quando observou os chamados anéis de Newton. A designação destes anéis deve-se ao facto de Newton ter efectuado também uma série de experiências relativas a este efeito. Contudo, as primeiras experiências envolvendo propriamente os efeitos da interferência da luz foram realizadas por Thomas Young (1773-1829) em 1802. Os resultados destas experiências contradiziam a teoria corpuscular da luz de Newton, pelo que foram rejeitados pela generalidade dos cientistas da época. Dez anos mais tarde, Fresnel realizou uma nova série de experiências que confirmaram os resultados de Young e que conduziram à consagração definitiva da teoria ondulatória da luz, em detrimento da teoria corpuscular.

O fenómeno da interferência encontra um vasto campo de aplicação no âmbito da chamada intererometria ótica. Os interferómetros são dispositivos capazes de medir pequenas variações de alguma grandeza física, através da análise das alterações verificadas num padrão de interferência criado por dois ou mais feixes. Eles podem ser usados, por exemplo, para testar a qualidade de uma superfície ou de um filme dielétrico; podem também ser usados para medir distâncias da ordem das dezenas ou centenas de metros, como acontece no estudo da estabilidade de grandes estruturas. A grandeza medida nestes casos é, geralmente, o caminho óptico, isto é, o produto do caminho geométrico pelo índice de refracção do meio.

3.1. Interferência de duas ondas

De acordo com o princípio da sobreposição, se num dado ponto do espaço se verificar a presença de vários campos, \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , ..., o campo óptico resultante, \vec{E} , é dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (3.1)$$

Na prática, a grandeza que se mede é a intensidade, que é proporcional à média temporal do quadrado do módulo do campo. No caso de haver apenas duas ondas, tem-se:

$$\langle |\vec{E}|^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \rangle = \langle |\vec{E}_1|^2 \rangle + \langle |\vec{E}_2|^2 \rangle + 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad (3.2)$$

Dado que apenas nos interessam os valores relativos da intensidade, considera-se a seguir que a intensidade é dada simplesmente na forma $I = \langle |\vec{E}|^2 \rangle$. A Eq. (3.2) pode ser escrita, então, na forma:

$$I = I_1 + I_2 + 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad (3.3)$$

onde I_1 e I_2 são as intensidades de cada uma das ondas interferentes. Toda a informação acerca da interferência está contida no terceiro termo da Eq. (3.3). A interferência pode ser construtiva ou destrutiva, consoante o sinal deste termo seja positivo ou negativo, respectivamente. Se esse termo for nulo em todos os pontos do espaço, isso significa que as ondas não interferem, pelo que se tem uma distribuição uniforme da intensidade. Uma condição necessária para que o termo de interferência na Eq. (3.3) seja diferente de zero é que os campos eléctricos das duas ondas não sejam ortogonais.

Considere-se duas ondas planas polarizadas linearmente, na forma:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1) \quad (3.4a)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_2) \quad (3.4b)$$

onde ε_1 e ε_2 são as fases iniciais. Neste caso, o termo de interferência na Eq. (3.3) é dado por:

$$I_{12} = 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \delta \quad (3.5a)$$

onde

$$\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (3.5b)$$

é a *diferença de fase* entre as duas ondas interferentes, resultante da diferença de percursos ópticos, $(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})$, e da diferença de fase inicial, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Se esta última contribuição for constante, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \text{const.}$, diz-se que as fontes das duas ondas são *coerentes*.

Quando os campos \vec{E}_{01} e \vec{E}_{02} são ortogonais o termo de interferência é nulo, pelo que se tem uma distribuição uniforme da intensidade. Quando esses campos são paralelos, a distribuição da intensidade pode ser escrita a partir das Eq.s (3.3) e (3.5) na forma:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (3.6)$$

Se as duas ondas tiverem a mesma amplitude, $I_1 = I_2$ e a Eq. (3.6) fica:

$$I = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (3.7)$$

Neste caso, a intensidade resultante é $4I_1$, quando se verifica uma *interferência totalmente construtiva*, correspondente a uma diferença de fase entre as duas ondas de $\delta = p2\pi$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Por outro lado, a intensidade resultante é nula no caso de uma *interferência totalmente destrutiva*, correspondente a uma diferença de fase $\delta = (2p+1)\pi$. O princípio da conservação da energia implica que, se a intensidade em cada um dos feixes for I_1 , a intensidade resultante seja $2I_1$. Contudo, em consequência do fenómeno de interferência, a distribuição espacial da intensidade não é uniforme, variando entre um valor máximo ($4I_1$) e um valor mínimo (zero).

3.2. Representação complexa

Em muitas situações, é possível ignorar a natureza vectorial das ondas luminosas. Uma dessas situações ocorre, por exemplo, quando todas as ondas luminosas se propagam na mesma direcção e possuem o mesmo plano de vibração. Nestas circunstâncias, a análise da sobreposição dessas ondas pode ser facilitada usando a representação complexa para o campo eléctrico.

Considere-se a situação em que os campos eléctricos das ondas interferentes são colineares, com a mesma frequência e dados na forma escalar por:

$$E_1 = E_{01} e^{i(\omega t + \alpha_1)} \quad (3.8a)$$

$$E_2 = E_{02} e^{i(\omega t + \alpha_2)} \quad (3.8b)$$

O campo resultante é dado por:

$$E = E_1 + E_2 = (E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2}) e^{i\omega t} = E_0 e^{ia} e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

onde

$$E_0 e^{ia} = E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2} \quad (3.10)$$

é a amplitude complexa da onda resultante, dada pela adição das amplitudes complexas das ondas iniciais.

O módulo, E_0 , e a fase, α , da amplitude complexa do campo resultante podem ser expressos em função dos parâmetros correspondentes das ondas individuais. Atendendo a que

$$E_0^2 = (E_0 e^{i\alpha}) (E_0 e^{i\alpha})^* \quad (3.11)$$

tem-se

$$\begin{aligned} E_0^2 &= (E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2}) (E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2})^* \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01} E_{02} (e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Usando a relação de Euler, pode-se escrever a Eq. (3.12) com o aspecto

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01} E_{02} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (3.13)$$

resultado que é equivalente ao da Eq. (3.6).

Por outro lado, separando as partes real e imaginária da Eq. (3.10), tem-se

$$E_0 \cos \alpha = E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2 \quad (3.14a)$$

$$E_0 \sin \alpha = E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2 \quad (3.14b)$$

Dividindo membro a membro as equações anteriores, obtém-se o seguinte resultado para $\tan \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2} \quad (3.15)$$

Os campos dados pelas Eq.s (3.8) e (3.9) encontram-se representados por vectores no plano complexo na Fig. 3.1.

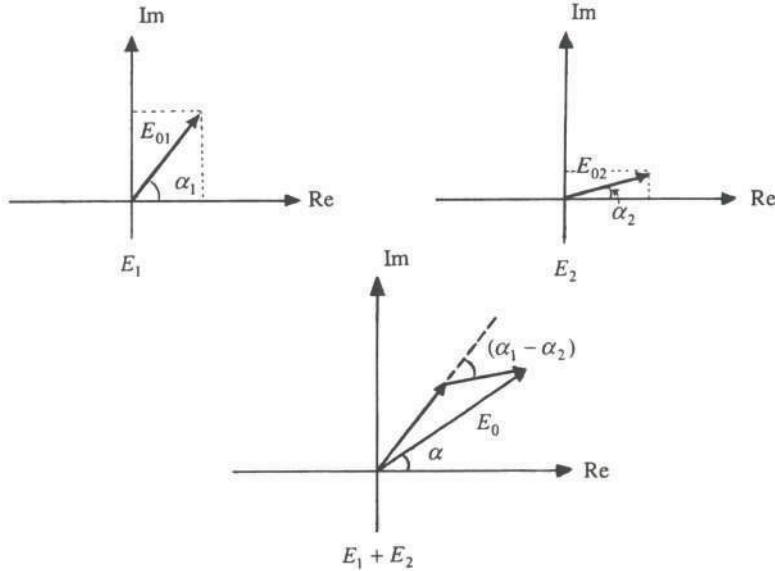


Figura 3.1 – Representação da soma dos campos \vec{E}_1 e \vec{E}_2 no plano complexo.

Os resultados anteriores podem ser generalizados para o caso da sobreposição de um número arbitrário, N, de ondas harmónicas. Nesta situação, a amplitude complexa da onda resultante é dada por

$$E_0 e^{i\alpha} = \sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \quad (3.16)$$

sendo E_0 e α dados por

$$E_0^2 = \sum_{j=1}^N E_{0j}^2 + 2 \sum_{i>j} \sum_{j=1}^N E_{0j} E_{0i} \cos(\alpha_j - \alpha_i) \quad (3.17)$$

e

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{j=1}^N E_{0j} \sin \alpha_j}{\sum_{j=1}^N E_{0j} \cos \alpha_j} \quad (3.18)$$

3.3. Interferência por divisão da frente de onda

Uma maneira de ter duas ondas em condições de interferirem, consiste em obter essas ondas a partir de partes espacialmente distintas de uma mesma frente de onda original. Nisto consiste a chamada *interferência por divisão da frente de onda*.

3.3.1. A experiência de Young

Para ilustrar a interferência por divisão da frente de onda, examinaremos em seguida a chamada *experiência de Young*, cuja representação esquemática se apresenta na figura 3.2.

Considere-se uma onda plana monocromática que incide numa fenda estreita S . Desta fenda emerge uma onda cilíndrica, que incide, por sua vez, em duas outras fendas, S_1 e S_2 , estreitas e pouco espaçadas entre si. As duas fendas obtêm amostras espacialmente distintas da frente de onda originada em S . Numa situação de simetria, essas amostras estão exactamente em fase e as fendas comportam-se como duas fontes secundárias coerentes. Analisaremos a interferência produzida pelas duas ondas num plano situado a uma distância D do plano que contém as fendas S_1 e S_2 .

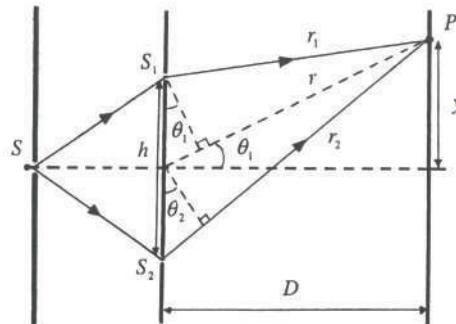


Figura 3.2 – Geometria da experiência de Young.

A luz proveniente de S_1 percorre uma distância r_1 , enquanto que a luz vindas de S_2 percorre uma distância r_2 , até chegarem ambas ao ponto P no plano de observação. Assumindo as condições de simetria acima referidas, a diferença de fase entre as duas ondas no ponto P deve-se apenas à diferença de percursos, sendo dada por:

$$\delta = k(r_2 - r_1) \quad (3.19)$$

Tem-se uma interferência completamente construtiva para $\delta = p2\pi$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), o que corresponde a uma diferença de percursos:

$$r_2 - r_1 = p\lambda \quad (3.20)$$

Suponhamos que a distância D é muito superior à altura y do ponto de observação, medida relativamente ao eixo dos x , i. e., $y \ll D$. Nestas condições, a geometria da Fig. 3.2 permite escrever:

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{r - r_1}{\frac{h}{2}} \approx \tan \theta_1 = \frac{y}{D} \quad (3.21a)$$

e

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{r_2 - r}{\frac{h}{2}} \approx \tan \theta_2 = \frac{y + \frac{h}{2}}{D} \quad (3.21b)$$

Somando membro a membro as equações anteriores e assumindo que $h \ll y$, tem-se

$$r_2 - r_1 = \frac{yh}{D} \quad (3.22)$$

Assumindo que as duas fendas são iguais, a distribuição da intensidade no plano de observação é dada a partir das Eq.s (3.7), (3.19) e (3.22) na forma:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi hy}{\lambda D} \right) \quad (3.23)$$

onde I_0 é a contribuição de uma única fenda.

Atendendo às Eq.s (3.20) e (3.22), tem-se que um máximo de intensidade se encontra a uma altura

$$y_p = \frac{D}{h} p \lambda \quad (3.24)$$

O espaçamento entre dois máximos consecutivos é:

$$\Delta y = y_{p+1} - y_p = \frac{D}{h} \lambda \quad (3.25)$$

Verifica-se da Eq. (3.25) que o espaçamento entre as franjas de interferência é directamente proporcional à distância a que se encontra o plano de observação e inversamente proporcional à separação entre as fendas S_1 e S_2 da Fig. 3.2.

A análise feita a propósito da experiência de Young pode ser facilmente adaptada a outros interferómetros por divisão da frente de onda. Descreve-se a seguir três destes interferómetros: o espelho duplo de Fresnel, o bi-prisma de Fresnel e o espelho de Lloyd.

3.3.2. O espelho duplo de Fresnel

O *espelho duplo de Fresnel* é constituído por dois espelhos planos que fazem entre si um pequeno ângulo θ (Fig. 3.3). A luz proveniente de uma fonte S é reflectida nos dois espelhos, de tal modo que as ondas reflectidas parecem provir de dois pontos, S_1 e S_2 . Estas duas fontes assumem o papel das fendas S_1 e S_2 na representação da experiência de Young da Fig. 3.2. O padrão de interferência pode ser observado num plano situado na região de sobreposição dos dois feixes reflectidos.

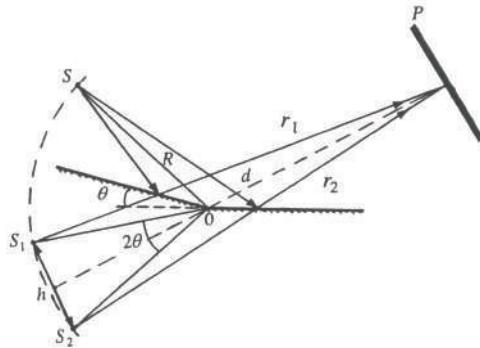


Figura 3.3 – Representação do espelho duplo de Fresnel.

Os pontos S , S_1 e S_2 situam-se sobre a circunferência de centro O e raio $R = \overline{SO}$, tendo-se

$$\overline{S_1 S_2} = h \approx 2\theta R \quad (3.26)$$

A distância entre o plano das fontes virtuais S_1 e S_2 e o plano de observação é $D = R+d$, sendo d a distância de O ao plano de observação. O espaçamento entre as franjas é dado por:

$$\Delta y = \frac{D}{h} \lambda = \frac{(R+d)\lambda}{2\theta R} \quad (3.27)$$

3.3.3. O biprisma de Fresnel

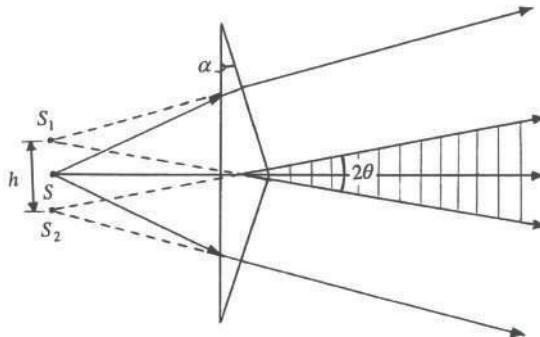


Figura 3.4 – Representação do biprisma de Fresnel.

O biprisma de Fresnel consiste em dois prismas colados nas suas bases, como se representa na Fig. 3.4. Quando uma onda cilíndrica incide nos dois prismas, a parte superior da frente de onda é refractada para baixo, parecendo que a onda assim refractada provém de uma fonte situada em S_1 . Quanto à parte inferior da frente de onda original, ela é refractada para cima, parecendo que a onda refractada provém de uma fonte situada em S_2 . O padrão de interferência forma-se na região de sobreposição dos dois feixes refractados. O espaçamento entre as franjas é dado igualmente pela Eq. (3.27), tendo-se, neste caso,

$$\theta = (n-1)\alpha \quad (3.28)$$

onde n é o índice de refracção e α é o ângulo do prisma.

3.3.4. O espelho de Lloyd

O espelho de Lloyd é constituído por um único espelho, no qual é reflectida parte da frente de onda emitida por uma fonte S (Fig. 3.5). Esta fonte encontra-se bastante próxima do plano do espelho. O padrão de interferência é obtido por sobreposição da onda reflectida no espelho e da parte da frente de onda vinda directamente da fonte S . O espaçamento entre as franjas no plano de observação é dado, igualmente, pela Eq. (3.27), onde h é a separação entre a fonte S e a sua imagem S' produzida pelo espelho.

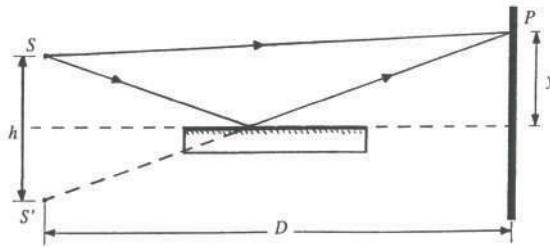


Figura 3.5 – Representação do espelho de Lloyd.

O espelho de Lloyd apresenta um aspecto que o distingue dos outros interferómetros referidos antes. De facto, dado que o ângulo de incidência da luz no espelho é próximo de 90° , verifica-se que a luz reflectida apresenta uma diferença de fase de π rad relativamente à luz incidente. Como consequência deste desfasamento adicional, a Eq. (3.23) para a distribuição da intensidade é alterada e assume a forma :

$$I = 4I_0 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi hy}{\lambda D}\right) \quad (3.29)$$

Neste caso, tem-se uma franja escura para $y = 0$, em vez da franja brilhante observada em posição análoga na experiência de Young.

3.3.5. O interferómetro de Rayleigh

O interferómetro de Rayleigh baseia-se, igualmente, no esquema da experiência de Young e encontra-se representado na Fig. 3.6. A luz proveniente da fonte pontual S é colimada antes de passar pelas duas fendas S_1 e S_2 . Os feixes emergentes dessas fendas passam pelos tubos T_1 e T_2 , que se encontram cheios de gás. As franjas de interferência são formadas no plano focal da lente L e movem-se quando a pressão do gás num dos tubos é alterada. A contagem do número de franjas deslocadas, N , permite medir a variação do caminho óptico através do tubo e, portanto, a variação do índice de refracção do gás, Δn . Se o comprimento do tubo for d , tem-se

$$N = \frac{d\Delta n}{\lambda} \quad (3.30)$$

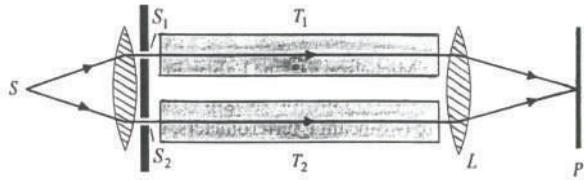


Figura 3.6 – Esquema do interferómetro de Rayleigh.

Para um gás diluído, o índice de refracção difere da unidade num valor proporcional à densidade, de modo que $n-1$ é proporcional à pressão. O índice de refracção obtido numa dada medição pode, depois, ser usado para calcular o seu valor para uma pressão diferente. Este interferómetro mostra-se particularmente útil no diagnóstico de plasmas e tem sido usado para medir variações do índice de refracção da ordem de 10^{-8} .

3.4. Interferência por divisão de amplitude

É possível observar igualmente o fenómeno da interferência entre duas ondas provenientes de uma mesma região da frente de onda inicial. Neste caso, é a amplitude dessa onda que é dividida, falando-se então em *interferência por divisão da amplitude*.

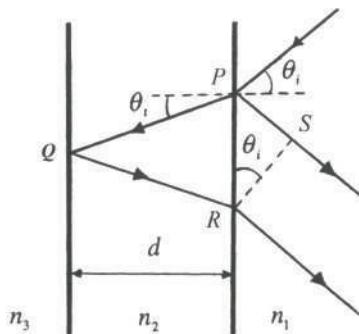


Figura 3.7 – Geometria para o estudo da interferência por divisão de amplitude num filme dielétrico.

Uma situação em que se verifica este tipo de interferência ocorre na reflexão de uma onda que incide nas faces de um filme dielétrico. Esta situação encontra-se representada esquematicamente na Fig. 3.7. A onda incide no ponto P do filme, verificando-se a reflexão de uma parte da amplitude em direcção ao ponto S , enquanto que a outra parte é transmitida para o interior do filme, sendo posteriormente reflectida no ponto Q e seguindo depois até ao ponto R . As características do fenómeno de interferência entre essas duas ondas dependem da diferença entre os respectivos *percursos ópticos*, os quais são dados pelos produtos das distâncias espaciais e dos índices de refracção dos meios percorridos.

O percurso óptico (PO) correspondente ao trajecto desde o ponto P até ao ponto Q , e depois até ao ponto R , no interior do filme dielétrico, com uma espessura d e um índice de refracção n_2 , é dado por:

$$PQ_{\overline{PQR}} = 2 \frac{n_2 d}{\cos \theta_t} \quad (3.31)$$

Por outro lado, o percurso óptico entre os pontos P e S no meio com índice de refracção n_1 é dado por:

$$PQ_{\overline{PS}} = n_1 \overline{R} \sin \theta_i = n_2 \overline{R} \sin \theta_t \quad (3.32)$$

onde se usou a lei de Snell para a refracção. Por outro lado, tem-se

$$\overline{PR} = 2d \tan \theta_t \quad (3.33)$$

A diferença de percursos ópticos, Λ , dos dois raios é dada então por:

$$\Lambda = PO_{\overline{PQR}} - PO_{\overline{PS}} = \frac{2n_2 d}{\cos \theta_t} (1 - \sin^2 \theta_t) = 2n_2 d \cos \theta_t \quad (3.34)$$

A diferença de fase correspondente à diferença de percursos ópticos é igual ao produto entre o número de ondas para o vazio e Λ , isto é,

$$\delta = k_0 \Lambda = \frac{4\pi d n_2 \cos \theta_t}{\lambda_0} \quad (3.35)$$

Contudo, assumindo que $n_3 < n_2 > n_1$ na Figura 3.7, existe uma variação de fase adicional de π , ocorrida na reflexão no ponto P . Em consequência, a diferença de fase total entre as duas primeiras ondas reflectidas pelo filme dielétrico é dada por:

$$\delta' = k_0 \Lambda \pm \pi = \frac{4\pi n_2}{\lambda_0} d \cos \theta_t \pm \pi \quad (3.36)$$

3.4.1. Franjas de Haidinger

Se o filme dielétrico for iluminado por luz não colimada, e se a espessura desse filme for constante, podem observar-se *franjas de igual inclinação*, também conhecidas por *franjas de Haidinger*. As franjas brilhantes ocorrem quando $\delta' = p2\pi$, ou seja, para ângulos dados por:

$$\cos \theta_t = \frac{(2p+1)\lambda_0}{4n_2 d} \quad (3.37)$$

onde se considerou o sinal menos na Eq. (3.36). Este resultado pode ser escrito em termos do ângulo de incidência usando a lei de Snell:

$$\sin \theta_i = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \frac{(2p+1)^2 \lambda_0^2}{16 d^2 n_1^2}} \quad (3.38)$$

3.4.2. Franjas de Fizeau

Se um filme dielétrico for iluminado com uma onda plana, então $\cos \theta_t$ é constante para todo o filme e cada franja de interferência, brilhante ou escura, corresponde a uma dada região do filme com espessura óptica bem definida. Por exemplo, a espessura correspondente a uma dada franja brilhante obtém-se a partir da Eq. (3.36) fazendo $\delta' = p2\pi$:

$$d = \frac{(2p+1)\lambda_0}{4n_2 \cos \theta_t} \quad (3.39)$$

Estas franjas são chamadas *franjas de Fizeau* ou *franjas de igual espessura*.

3.4.3. Anéis de Newton

Colocando uma lente convexa em contacto com uma placa de faces planas, obtém-se um filme dielétrico entre as superfícies vizinhas dos dois elementos. As franjas de igual espessura observadas neste caso têm a forma circular, com centro no ponto de contacto (ponto O da Fig. 8.4), sendo designadas por *anéis de Newton*.

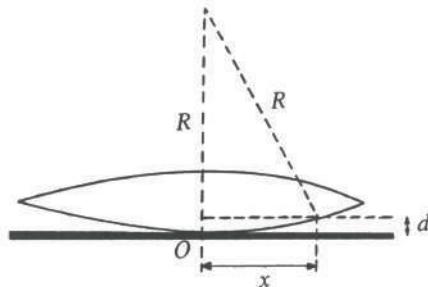


Figura 3.8 – Geometria para a descrição dos anéis de Newton.

Na Fig. 3.8, designa-se por R o raio de curvatura da lente, enquanto que o raio de um dos anéis de Newton é indicado por x e a espessura do filme correspondente a esse anel por d . Estes três parâmetros podem relacionar-se através do teorema de Pitágoras:

$$x^2 = R^2 - (R-d)^2 \quad (3.40)$$

ou seja,

$$x^2 = 2Rd - d^2 \approx 2Rd \quad (3.41)$$

tendo-se considerado na aproximação anterior que $R \gg d$. Assumimos que a incidência é praticamente normal, pelo que se tem $\cos \theta_t \approx 1$. O raio da franja brilhante de ordem p obtém-se combinando a Eq. (3.39) com a Eq. (3.41), tendo-se:

$$x_p = \sqrt{\frac{(2p+1)\lambda_0 R}{2n_2}} \quad (3.42)$$

Do mesmo modo, o raio da franja escura de ordem p é:

$$x_p = \sqrt{\frac{p\lambda_0 R}{n_2}} \quad (3.43)$$

Geralmente, o filme entre a lente e a placa de faces planas é de ar, pelo que se tem $n_2 = 1$. Verifica-se dos resultados anteriores que, se o contacto entre os dois elementos for perfeito, a intensidade da franja central (no ponto $x_0 = 0$) é mínima. A regularidade dos anéis de Newton pode servir para caracterizar o grau de perfeição das superfícies de uma lente.

3.5. O interferómetro de Michelson

De entre os vários interferómetros por divisão de amplitude, o mais conhecido e, historicamente, o mais importante é o interferómetro de Michelson, que foi desenvolvido pelo físico norte-americano Albert Michelson (1852-1931). Este interferómetro pode funcionar com uma fonte mais extensa que a usada na experiência de Young, aumentando assim a intensidade no padrão de interferência.

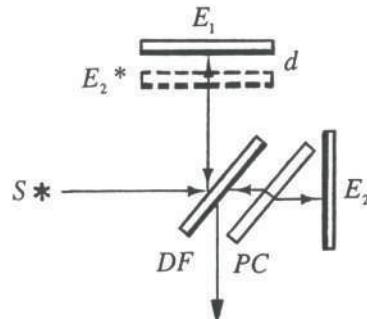


Figura 3.9 – Geometria para a descrição do interferómetro de Michelson.

Na Fig. 3.9 apresenta-se uma representação esquemática do interferómetro de Michelson. O feixe de luz proveniente da fonte S é dividido em dois feixes usando um espelho semi-transparente, que funciona como divisor-de-feixe, DF . Os dois feixes seguem então trajetos independentes e ortogonais, são reflectidos nos espelhos E_1 e E_2^* , e voltam a encontrar-se no mesmo divisor-de-feixe, a partir de onde se verifica a sua interferência.

É de notar que um dos feixes atravessa três vezes o divisor-de-feixe, enquanto que o outro o atravessa apenas uma vez. Por esse motivo, introduz-se uma placa de compensação, PC , no braço DFE_2 , paralela e com a mesma espessura de DF , embora sem qualquer camada reflectora nas suas superfícies. A inclusão desta placa permite compensar os efeitos de dispersão do feixe em DF e garante que qualquer variação de percursos ópticos nos dois braços do interferómetro depende apenas de alterações da sua geometria.

Olhando para o divisor-de-feixe a partir do detector, observa-se uma imagem do espelho E_2 , indicada por E_2^* , junto do espelho E_1 . A imagem E_2^* e o espelho E_1 formam um filme dielétrico com uma espessura d e um índice de refracção $n_2 = 1$.

A diferença de percursos ópticos entre os raios reflectidos em E_1 e E_2 é $2d \cos \theta$, pelo que a correspondente diferença de fase é $\frac{2\pi}{\lambda_0} 2d \cos \theta$.

Contudo, existe um desfasamento adicional de π rad entre os dois raios, dado que um deles se reflecte internamente e o outro externamente no divisor de feixe. Por isso, a diferença de fase correspondente a uma franja escura no plano de observação é:

$$\delta = p2\pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2d \cos \theta \quad (3.44)$$

onde p é um inteiro. Se a distância d for constante, observam-se franjas de igual inclinação com forma circular. O valor máximo de p ocorre no centro desse conjunto de franjas, correspondente a $\theta = 0$:

$$p_{\max} = \frac{2d}{\lambda_0} \quad (3.45)$$

Quando d aumenta, as franjas afastam-se do centro, aparecendo aí sucessivas franjas de ordem superior. A intensidade nessa posição varia de acordo com a expressão:

$$I = I_0 \left[1 - \cos \left(\frac{2\omega d}{c} \right) \right] \quad (3.46)$$

onde se fez a substituição

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (3.47)$$

e se assumiu um divisor-de-feixe 50:50. A intensidade é dada assim pela soma de um termo constante com um outro oscilatório.

O interferómetro de Michelson pode ser utilizado para realizar medições de distâncias de um modo bastante preciso. De facto, do exposto anteriormente, tem-se que, quando um dos espelhos sofre uma translação de $\lambda_0/2$, cada franja se desloca de modo a ocupar o lugar da franja adjacente. Contando o número de franjas, N , que passam por uma dada posição de referência, é possível determinar a distância Δd percorrida pelo espelho, dada por:

$$\Delta d = N \frac{\lambda_0}{2} \quad (3.48)$$

Inversamente, a Eq. (3.48) permite calcular o comprimento de onda λ_0 , uma vez conhecido o deslocamento do espelho e o número de franjas N correspondente.

3.6. O interferómetro de Mach-Zehnder

O interferómetro de Mach-Zehnder é um outro dispositivo baseado na divisão da frente de onda. Em comparação com o interferómetro de Michelson, este interferómetro mostra-se mais flexível, dado que os trajectos dos raios, incidente e reflectido, em cada um dos espelhos são distintos, tornando-se então necessário

usar um segundo divisor-de-feixe (Fig. 3.10). Dado que os trajectos da luz nos dois braços do interferómetro são distintos, o alinhamento deste dispositivo revela-se relativamente difícil. Contudo, pela mesma razão, ele tem encontrado variadíssimas aplicações. Quando um objecto é colocado num dos braços do interferómetro, a diferença de percursos ópticos entre os dois braços é alterada e o padrão de interferência é afectado.

O interferómetro de Mach-Zehnder é habitualmente utilizado para estudar o fluxo de gás em túneis de vento na presença de obstáculos. Um dos feixes passa através do túnel de vento, enquanto que o outro passa através de placas de compensação adequadas. Este estudo baseia-se no facto de o índice de refracção ser, em muitas situações, proporcional à densidade do gás. O feixe dentro do túnel passa através de regiões com diferentes densidades e, portanto, diferentes índices de refracção, o que se reflecte na formação de franjas de contorno no padrão de interferência.

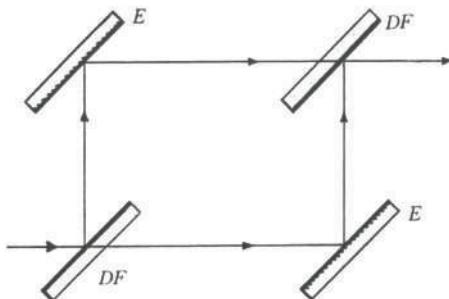


Figura 3.10 – Representação esquemática do interferómetro de Mach-Zehnder.

3.7. O interferómetro de Sagnac

O interferómetro de Sagnac foi implementado pela primeira vez em 1911 e caracteriza-se por os dois feixes seguirem o mesmo trajecto, mas com sentidos opostos. O dispositivo pode apresentar três ou quatro espelhos e é relativamente estável e fácil de alinhar. Uma pequena variação na orientação de um dos espelhos determina o aparecimento de um padrão de franjas paralelas no plano de observação.

A utilização de um interferómetro exige tipicamente a possibilidade de impor variações apenas num dos seus feixes. Contudo, no caso do interferómetro de Sagnac, dado que os seus dois feixes se encontram sobrepostos, ele não pode ser usado no modo convencional. Aliás, este interferómetro mostra-se insensível a qualquer efeito, para além da rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano do dispositivo. A rotação provoca um encurtamento do caminho óptico para um dos feixes e um alongamento desse caminho para o outro feixe.

Supondo que o anel constituído pelo interferómetro de Sagnac apresenta um raio médio R , então o tempo gasto pela luz para dar uma volta ao dispositivo na ausência de rotação é $2\pi R/c$. Contudo, se esse anel estiver a rodar com uma velocidade angular ω , o caminho óptico de um dos feixes é aumentado de

$$ds = \frac{2\pi R}{c} \omega R \quad (3.49)$$

enquanto que o caminho óptico para o outro feixe é encurtado do mesmo valor. Ou seja, considerando um dado ponto de referência no anel, tem-se que o primeiro feixe chega a esse ponto com um atraso no tempo de ds/c ,

enquanto que o segundo feixe chega ao mesmo ponto com um avanço de ds/c . A diferença no tempo de percurso é dada então por

$$\Delta t = 2 \frac{ds}{c} = 4 \frac{\pi R^2 \omega}{c^2} = 4 \frac{A \omega}{c^2} \quad (3.50)$$

onde A é a área do anel.

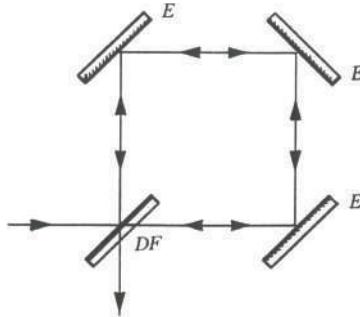


Figura 3.11 – Representação esquemática do interferômetro de Sagnac.

Supondo que o comprimento de onda da luz usada no interferômetro é λ , o correspondente período é $T = \lambda / c$, pelo que o deslocamento das franjas de interferência provocado pela rotação será dado por

$$\Delta N = \frac{\Delta t}{T} = 4 \frac{A \omega}{c \lambda} \quad (3.51)$$

resultado que foi confirmado experimentalmente. Este método foi usado por Michelson e Gale, em 1925, para determinar a velocidade angular da Terra.

3.8. Interferômetros com fibras ópticas

Como se verá no capítulo 5, a luz pode propagar-se ao longo de enormes distâncias em fibras de vidro que apresentam uma atenuação bastante reduzida. Deste modo, surgiu com naturalidade a ideia de usar essas fibras ópticas para guiar os feixes de luz correspondentes aos dois braços de alguns dos interferômetros anteriormente descritos. Os interferômetros assim realizados caracterizam-se pela sua configuração bastante simples, por apresentarem uma elevada sensibilidade e por serem bastante estáveis.

Por exemplo, o interferômetro de Mach-Zehnder, descrito na secção 3.6, pode ser realizado usando fibras ópticas nos seus dois braços, como se mostra na Fig. 3.12. Neste caso, a variação da fase da luz que se propaga na fibra óptica é causada por algum parâmetro externo (temperatura, pressão, tensão, campo magnético, etc.) e pode ser medida com bastante rigor através dos seus efeitos no padrão de interferência. Na realidade, o interferômetro de Mach-Zehnder em fibra óptica constitui um sensor com características bastante superiores às de muitos sensores convencionais.

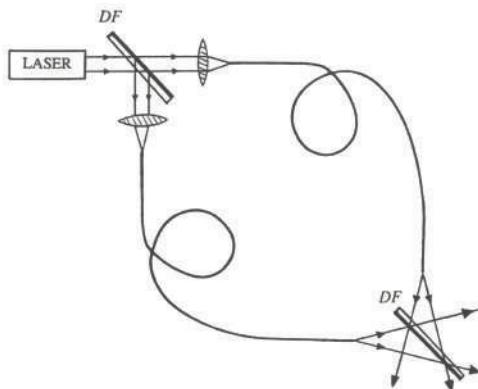


Figura 3.12 – Representação esquemática do interferômetro de Mach-Zehnder utilizando fibras ópticas.

Os feixes emergentes das duas fibras podem ser considerados na prática ondas esféricas divergentes, que se fazem sobrepor usando um divisor e feixe. Contudo, em contraste com o que acontece com uma fonte pontual que emite uniformemente em todas as direcções, neste caso, os feixes interferentes apresentam uma distribuição de amplitudes Gaussiana. Em consequência, o padrão de franjas circulares, que é observado, apresenta uma distribuição global de intensidade também Gaussiana. Quando as duas extremidades das fibras se aproximam uma da outra, as franjas circulares expandem-se. Inversamente, as franjas contraem-se quando essas extremidades se afastam entre si.

O interferômetro de Sagnac, descrito na secção 3.7, pode também ser realizado com fibras ópticas e usado como giroscópio, como se mostra na Fig. 3.13. O sistema faz uso de uma bobina de fibra óptica, ao longo da qual se propagam os dois feixes de luz em sentidos opostos, sendo sensível à rotação em torno do eixo da bobina. A diferença entre os tempos de percurso dos dois feixes é dada pela Eq. (3.50), correspondendo-lhe uma diferença de fase dada por

$$\Delta\phi = k_0 c \Delta t = \frac{8\pi\omega N A}{\lambda c} \quad (3.52)$$

onde A é a área e N número de espiras da bobina. Por exemplo, se se pretender medir a rotação da Terra ($15^\circ/h$), utilizando uma bobina de raio $R = 0.4$ m, com 500 voltas de fibra óptica e luz com comprimento de onda $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, deve poder medir-se uma variação da fase de 2.4×10^{-3} rad.

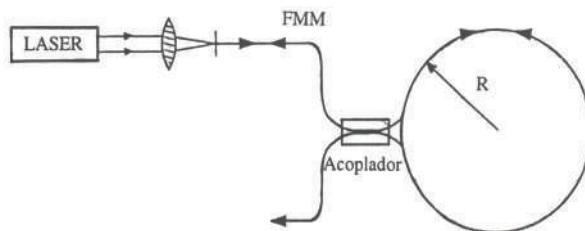


Figura 3.13 – O interferômetro de Sagnac em fibra óptica. FMM: fibra monomodo.

3.9. Interferência por reflexões múltiplas

Na discussão da Secção 3.4 desprezaram-se as múltiplas reflexões nas faces da lâmina dielétrica. Contudo, essa aproximação deixa de ser válida quando a reflectividade das faces é significativa. Nesta Secção considera-se o efeito dessas múltiplas reflexões e mostra-se como, neste caso, a lâmina de faces paralelas pode constituir uma cavidade ressonante.

A Fig. 3.14 mostra a geometria para o estudo do efeito das múltiplas reflexões numa lâmina de faces paralelas. Assume-se que uma onda de amplitude A incide na lâmina. Designa-se por r' o coeficiente de reflexão na face anterior da lâmina (reflexão externa), por r o coeficiente de reflexão na face posterior da lâmina (reflexão interna), por t o coeficiente de transmissão para dentro da lâmina e por t' o coeficiente de transmissão para fora da lâmina.

A primeira onda transmitida através da lâmina pode escrever-se na forma:

$$E_0 = Att' e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (3.53)$$

Cada onda transmitida subsequentemente apresenta, em relação à anterior, um factor r^2 na amplitude e uma diferença de fase constante dada pela Eq. (3.35). Deste modo, a onda transmitida de ordem n pode escrever-se na forma:

$$E_n = r^{2n} Att' e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} e^{in\delta} \quad (3.54)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$. Pelo princípio da sobreposição, o campo resultante no ponto de observação é dado pela soma dos campos correspondentes a todas as ondas transmitidas. Ao efectuar-se essa soma, pode pôr-se em evidência o factor comum E_0 , de modo que se tem:

$$E_t = E_0 (1 + r^2 e^{i\delta} + r^4 e^{i2\delta} + r^6 e^{i3\delta} + \dots) \quad (3.55)$$

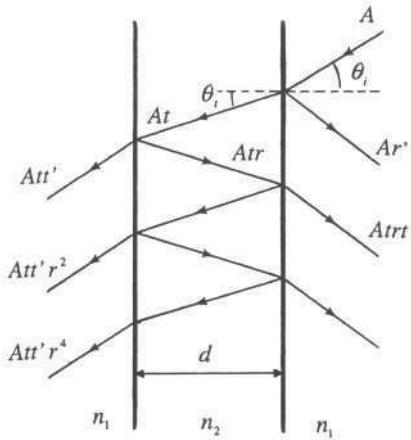


Figura 3.14 – Geometria para a análise do efeito das múltiplas reflexões numa lâmina dielétrica de faces paralelas.

A série geométrica no interior do parêntesis da Eq. (3.55) converge se $r^2 e^{i\delta} < 1$. A onda resultante é dada então por:

$$\begin{aligned} E_t &= E_0 \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}} \\ &= E_0 \frac{1 - r^2 \cos \delta + r^2 \sin \delta}{1 - 2r^2 \cos \delta + r^4} \end{aligned} \quad (3.56)$$

A intensidade transmitida através da lâmina é dada por $I_t = E_t E_t^* / 2$, ou seja:

$$I_t = \frac{I_i(t')^2}{1 - 2r^2 \cos \delta + r^4} \quad (3.57)$$

onde $I_i = A^2 / 2$ é a intensidade incidente. Não havendo absorção de energia, tem-se que $t t' = 1 - r^2$. Usando esta relação e a identidade trigonométrica $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$, a Eq. (3.57) pode-se apresentar na forma:

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (3.58)$$

onde

$$F = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \quad (3.59)$$

é o denominado *coeficiente de finesse*.

A função $[1 + F \sin^2(\delta/2)]^{-1} = I_t / I_i$ na Eq. (3.58) é a chamada *função de Airy*, que se representa na Fig. 3.15 para diversos valores da reflectividade r^2 . Pode-se verificar desta figura que o valor da função de Airy é máximo (igual a um) para $\delta = 2\pi p$, qualquer que seja o valor de r . Quando r se aproxima de 1, a intensidade transmitida é reduzida, excepto na proximidade dos pontos onde ocorrem esses máximos.

No caso de não haver absorção de energia, a intensidade incidente deve ser igual à soma das intensidades dos feixes reflectido e transmitido:

$$I_i = I_r + I_t \quad (3.60)$$

A intensidade correspondente ao feixe reflectido pode ser obtida usando as Eq.s (3.58) e (3.60).

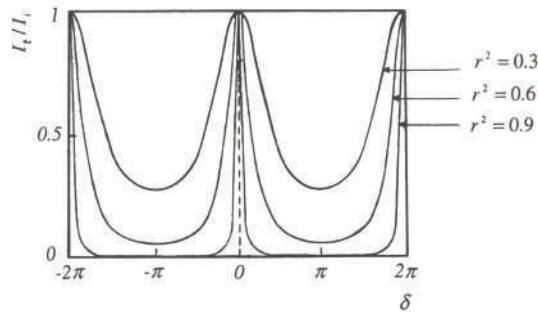


Figura 3.15 – Função de Airy para vários valores da reflectância $R = r^2$.

3.10. O interferómetro de Fabry-Perot

O interferómetro de Fabry-Perot é constituído por duas superfícies com elevada reflectância, geralmente separadas por ar. A reflectância dessas superfícies é normalmente aumentada por aplicação de revestimentos metálicos parcialmente reflectores. O interferómetro de Fabry-Perot é habitualmente utilizado na análise da estrutura fina das riscas espectrais e a sua descrição baseia-se na teoria apresentada na Secção 3.9.

A definição das franjas no padrão de interferência formado pela luz transmitida através da cavidade de Fabry-Perot pode ser caracterizada pela largura a meia altura dessas franjas, correspondente a $I_t = (I_t)_{\max} / 2$. Pode verificar-se da Eq. (3.58) que este valor da intensidade ocorre quando $\delta = \delta_{\max} \pm \delta^*$, sendo $\delta_{\max} = 2\pi p$ e

$$\delta^* = 2 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right) \quad (3.61)$$

Atendendo a que F é geralmente elevado, tem-se que $\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{F}) \approx 1/\sqrt{F}$, pelo que a *largura total a meia altura* $\gamma = 2\delta^*$ é dada por:

$$\gamma = \frac{4}{\sqrt{F}} \quad (3.62)$$

Das Eq.s (3.61), (3.62) e (3.59) pode verificar-se que, quanto maior for a reflectância $R = r^2$, mais estreitas se tornam as franjas brilhantes no padrão de transmissão.

Outra grandeza usualmente definida é a *finesse* da cavidade, Φ , dada pela razão entre a distância entre máximos adjacentes e a largura a meia altura:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} \quad (3.63)$$

O *poder de resolução cromática*, \mathfrak{R} , do interferómetro é dado por $\lambda_0 / \Delta\lambda_0$, onde λ_0 é o comprimento de onda médio da luz e $\Delta\lambda_0$ é o valor mínimo da diferença entre dois comprimentos de onda resolúveis. Como critério de resolução, estabelece-se que dois comprimentos de onda, λ_1 e λ_2 , são resolúveis desde que as funções de Airy associadas a esses comprimentos de onda se intersectem abaixo do ponto de meia altura do pico de intensidade. Na situação de separação mínima, a variação de fase quando se vai desde o máximo de intensidade de λ_1 até ao máximo de intensidade de λ_2 é $\Delta\delta = \gamma$, dada pela Eq. (3.62). Por outro lado, diferenciando a Eq. (3.35) obtém-se:

$$\Delta\delta = \frac{-4\pi n d \operatorname{sen}\theta_t}{\lambda_0} \Delta\theta_t \quad (3.64)$$

Ocorre uma franja brilhante quando se verifica a condição:

$$2nd \cos\theta_t = p\lambda_0 \quad (3.65)$$

Diferenciando esta equação tem-se

$$-2nd \operatorname{sen}\theta_t \Delta\theta_t = p \Delta\lambda_0 \quad (3.66)$$

A partir das Eq.s (3.62), (3.64) e (3.66) tem-se que

$$\Delta\delta = \gamma \Leftrightarrow 2\pi p \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{4}{\sqrt{F}} \quad (3.67)$$

O poder de resolução cromática é dado então por:

$$\mathfrak{R} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = \frac{p\pi}{2} \sqrt{F} \quad (3.68)$$

Da Eq. (3.65) pode ver-se que o valor máximo de p ocorre quando $\cos\theta_t = 1$, tendo-se:

$$p_{\max} = \frac{2nd}{\lambda_0} \quad (3.69)$$

Neste caso, tem-se da Eq. (3.68) que

$$\mathfrak{R} = \frac{nd\pi}{\lambda_0} \sqrt{F} \quad (3.70)$$

Chama-se *banda espectral livre* de um interferómetro à diferença de comprimentos de onda $(\Delta\lambda)_{bel}$, correspondente a uma variação da distância d de $\lambda_0/2$, ou a uma variação em p de uma unidade, ou seja, a uma variação da diferença de fase $\Delta\delta = 2\pi$. A banda espectral livre é a diferença máxima de comprimentos de onda que pode ser medida sem ambiguidade pelo interferómetro.

Tendo em consideração a Eq. (3.67), pode-se escrever:

$$(\Delta\lambda)_{bel} = \frac{\lambda_0}{p} \quad (3.71)$$

Substituindo nesta equação o valor máximo de p dado pela Eq. (3.69) obtém-se a banda espectral livre mínima:

$$(\Delta\lambda)_{bel} = \frac{\lambda_0^2}{2nd} \quad (3.72)$$

É de notar que a razão entre a banda espectral livre e o valor mínimo da diferença de comprimentos de onda resolúveis é igual à finesse Φ , definida na Eq. (3.63). De facto, usando as Eq.s (3.68), (3.69) e (3.72) tem-se:

$$\frac{(\Delta\lambda)_{bel}}{\Delta\lambda_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} = \Phi \quad (3.73)$$

No espectro visível, a finesse das cavidades de Fabry-Perot é geralmente da ordem de 30.

3.11. Coerência

Nas secções anteriores assumiu-se em geral que a luz era monocromática e produzida por uma fonte pontual. Contudo, nenhuma fonte é verdadeiramente pontual, nem a luz emitida é, em alguma circunstância, rigorosamente monocromática, de modo a poder ser descrita por uma onda sinusoidal estendendo-se infinitamente no espaço e no tempo. Ou seja, na prática, a luz nunca é verdadeiramente coerente. A coerência pode ser definida como a estabilidade da fase de uma onda, tanto no espaço como no tempo.

3.11.1. Comprimento e tempo de coerência

Pode-se considerar que a luz quase-monocromática é constituída por um grande número de trens de ondas de extensão finita e com fases relativas arbitrárias. A luz proveniente de dois pontos separados entre si por uma distância menor que o comprimento de um trem de ondas elementar é coerente e poderá interferir, como sucede

com uma onda monocromática. Contudo, se a distância entre esses pontos for superior ao comprimento de um trem de ondas, então a luz deles proveniente é incoerente e não interferirá. O comprimento de um trem de ondas elementar é designado por *comprimento de coerência*. Por outro lado, chama-se *tempo de coerência* ao tempo que esse trem de ondas demora a passar por um dado ponto.

A largura de uma linha espectral, em termos de comprimento de onda, $\Delta\lambda$, e em termos de frequência, $\Delta\nu$, relaciona-se com o comprimento de coerência, l_c , na forma

$$\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{c}{\Delta\nu} \approx l_c \quad (3.74)$$

onde c é a velocidade da luz. A Eq. (3.74) mostra que o comprimento de coerência é infinito apenas se a linha espectral tiver uma largura nula, o que nunca sucede na realidade. O comprimento de coerência relaciona-se com o tempo de coerência, τ_c , do modo

$$l_c = c\tau_c \quad (3.75)$$

Usando as Eq.s (3.74) e (3.75) pode-se concluir que

$$\Delta\nu \cdot \tau_c \approx 1 \quad (3.76)$$

Este resultado corresponde ao chamado *princípio de incerteza*.

Os valores típicos do comprimento de coerência da luz situam-se numa gama que pode ir desde 1 μm , como sucede com a luz branca, até algumas dezenas de km, como acontece com a luz emitida por alguns lasers. A luz emitida por uma lâmpada de sódio ou de mercúrio apresenta um comprimento de coerência na ordem de 1 cm.

3.11.2. Função de coerência mútua e grau de coerência

Considere-se uma fonte extensa, de largura de banda reduzida, que produz um campo luminoso $E(\vec{r}, t)$. Os efeitos da polarização não serão incluídos na discussão que se segue, pelo que uma representação escalar do campo é suficiente. Sejam $E(\vec{r}_1, t) \equiv E_1(t)$ e $E(\vec{r}_2, t) \equiv E_2(t)$ os campos em dois pontos P_1 e P_2 . Um detector colocado à saída de um interferômetro, que combine a luz proveniente destes dois pontos, permite medir a intensidade correspondente, I , que é proporcional ao valor médio do quadrado do módulo do campo resultante. Ignorando o factor de proporcionalidade, tem-se

$$I(\tau) = \langle \{E_1(t + \tau) + E_2(t)\} \{E_1(t + \tau) + E_2(t)\}^* \rangle \quad (3.77)$$

onde o asterisco indica o complexo conjugado, $\langle \rangle$ denota uma média no tempo e τ representa um atraso relativo que existirá normalmente entre os dois campos combinados. Desenvolvendo o produto na expressão anterior, tem-se

$$I(\tau) = \langle E_1(t + \tau) E_1^*(t + \tau) \rangle + \langle E_2(t) E_2^*(t) \rangle + \langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \rangle + \langle E_1^*(t + \tau) E_2(t) \rangle \quad (3.78)$$

Os primeiros dois termos na Eq. (3.78) representam simplesmente as intensidades nos pontos P_1 e P_2 , enquanto que o terceiro e quarto termos traduzem a interferência entre os dois campos. Estes dois últimos termos são o complexo conjugado um do outro, pelo que ambos contêm a mesma informação. Convencionalmente usa-se o terceiro termo para definir a chamada *função de coerência mútua*, $\Gamma_{12}(\tau)$:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \rangle \quad (3.79)$$

É de notar que, quando os pontos P_1 e P_2 coincidem e $\tau = 0$, a função de coerência mútua reduz-se às respectivas intensidades:

$$\Gamma_{11}(0) = I_1, \quad \Gamma_{22}(0) = I_2 \quad (3.80)$$

Usando as Eq.s (3.79) e (3.80), pode-se escrever a intensidade à saída do interferómetro na forma

$$I(\tau) = I_1 + I_2 + 2\operatorname{Re}\{\Gamma_{12}(\tau)\} \quad (3.81)$$

A função de coerência mútua pode ser normalizada na forma

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \quad (3.82)$$

sendo a nova grandeza chamada *grau de coerência complexo*. Usando esta definição e a Eq. (3.80), pode-se escrever a Eq. (3.81) do modo

$$I(\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\} \quad (3.83)$$

Este resultado traduz o *princípio geral de interferência para luz parcialmente coerente*.

O módulo do grau de coerência complexo, $|\gamma_{12}|$, é conhecido como *grau de coerência*. A Eq. (3.82) e a desigualdade de Schwarz permitem mostrar que $0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$. Quando $|\gamma_{12}| = 1$ tem-se a situação de *coerência total*, enquanto que o caso $|\gamma_{12}| = 0$ corresponde à situação de *incoerência total*. Finalmente, o caso $0 < |\gamma_{12}| < 1$ corresponde a uma situação de *coerência parcial*.

A *visibilidade*, V , de um conjunto de franjas de interferência é definida à custa dos valores máximo e mínimo da intensidade no padrão de interferência, sendo dada por:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (3.84)$$

Pode-se exprimir a visibilidade em função do grau de coerência $|\gamma_{12}(\tau)|$ na forma

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \quad (3.85)$$

Quando a intensidade dos dois campos é igual, $I_1 = I_2$, tem-se

$$V = |\gamma_{12}(\tau)| \quad (3.86)$$

ou seja, a *visibilidade das franjas* proporciona uma medida directa do grau de coerência das ondas interferentes.

3.11.3. Coerência temporal

Quando os dois pontos P_1 e P_2 , referidos na secção anterior, são coincidentes, a função de coerência mútua, dada pela Eq. (3.79), reduz-se à função de autocoerência do campo, tendo-se $\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{11}(\tau) = \Gamma_{22}(\tau) = \Gamma(\tau)$. $\Gamma(\tau)$ é a chamada *função de autocoerência* nesse ponto, para dois instantes de tempo espaçados de τ . Esta situação

verifica-se, por exemplo, no interferómetro de Michelson, em que τ é igual à razão entre a diferença de percursos nos dois ramos do interferómetro e a velocidade da luz, c .

A função de autocorrelância $\Gamma(\tau)$ é dada por:

$$\Gamma(\tau) = \left\langle E_1(t + \tau)E_1^*(t) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E_1(t + \tau)E_1^*(t) dt \quad (3.87)$$

Esta função pode ser normalizada, resultando no chamado *grau de coerência temporal complexo*:

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} \quad (3.88)$$

Atendendo a que $\Gamma(0) = I_1$ é o valor máximo (real) do módulo de $\Gamma(\tau)$, tem-se que $|\gamma(\tau)| \leq 1$.

Usando as definições anteriores, pode-se escrever a intensidade no plano de observação na forma:

$$I(\tau) = 2I_1 + 2\operatorname{Re}\{\Gamma(\tau)\} = 2I_1[1 + \operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\}] \quad (3.89)$$

Mostra-se no problema PR 3.14 que, no caso de uma onda harmónica, dada por $E_1(t) = E_0 e^{i\omega t}$, a visibilidade das franjas de interferência é $V=1$. Este resultado corresponde a um caso limite, em que a luz é completamente coerente. Tal situação acontece, aproximadamente, com a luz emitida por um laser monomodo estabilizado. No limite oposto, tem-se o caso da luz completamente incoerente, caracterizada por $|\gamma(\tau)| = 0$ para $\tau \neq 0$. A luz solar ou a luz proveniente de uma lâmpada de incandescência são exemplos em que esta situação se verifica aproximadamente.

No caso de muitas fontes de luz, quer naturais, quer artificiais, a visibilidade das franjas de interferência decresce monotonicamente com o atraso temporal τ . Quando esse decaimento é de $1/e$, o atraso temporal correspondente dá o *tempo de coerência*, τ_c , que se relaciona com o *comprimento de coerência*, l_c , na forma dada pela Eq. (3.75).

No caso do interferómetro de Michelson, o atraso temporal entre as duas ondas interferentes é devido à diferença dos seus percursos ópticos. Quando se usa luz branca, a diferença de percursos nos braços do interferómetro deve ser inferior a um comprimento de onda para que a visibilidade do padrão de franjas seja boa. Contudo, no caso de se usar luz emitida por um laser, atendendo ao valor elevado do seu comprimento de coerência, a visibilidade dessas franjas mantém-se elevada, mesmo quando os comprimentos dos braços do interferómetro são muito diferentes.

3.11.4. Coerência espacial

As características de interferência da luz, emitida por muitas fontes, são afectadas negativamente quando as dimensões dessas fontes aumentam. Nestes casos, importa considerar a interferência da luz proveniente de elementos espacialmente distintos da fonte. Este problema será analisado nesta secção tendo por base a experiência de Young.

Considere-se as fendas de Young iluminadas por luz proveniente de uma fonte extensa com diâmetro $2d$, em vez da fonte pontual S , considerada na análise da Secção 3.3. A fonte extensa pode ser encarada como um conjunto de fontes pontuais independentes. As ondas emitidas a partir do ponto S da fonte, situado no eixo, chegam às fendas S_1 e S_2 com a mesma fase, dando origem a um sistema de franjas no plano de observação com um máximo no eixo óptico. Contudo, um ponto S' da fonte situado fora do eixo (Fig. 3.16) dará origem a um

sistema de franjas desviado lateralmente em relação ao anterior. De facto, as distâncias $l_1 = \overline{S'S_1}$ e $l_2 = \overline{S'S_2}$ não são iguais neste caso, pelo que existe uma diferença de fase entre as duas ondas originadas em S_1 e S_2 :

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (l_1 - l_2) \quad (3.90)$$

Neste caso, o máximo de interferência de ordem zero no plano de observação, encontra-se desviado do eixo de

$$y_m = \frac{\Delta y}{\lambda} (l_1 - l_2) \quad (3.91)$$

onde Δy é o espaçamento entre as franjas, dado pela Eq. (3.25).

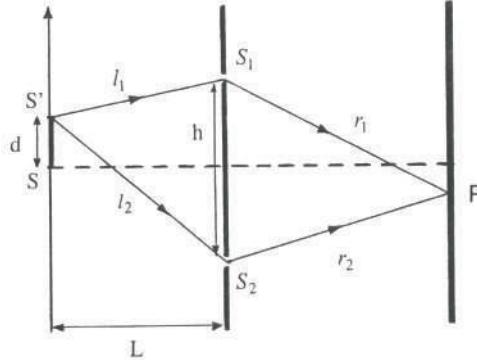


Figura 3.16 – Geometria da experiência de Young para o caso de uma fonte extensa.

Suponhamos agora que os dois pontos S e S' emitem simultaneamente. Quando a fonte extensa é incoerente, a diferença de fase entre as ondas geradas em S e S' varia aleatoriamente. Neste caso, obtém-se no plano de observação uma distribuição de intensidade dada simplesmente pela soma das intensidades dos sistemas de franjas correspondentes a cada um dos dois pontos emissores. Deste modo, para que as franjas de interferência sejam visíveis, os sistemas de franjas gerados por S e S' não devem estar muito desviados entre si. Concretamente, não deve acontecer que o máximo de um sistema coincida com o mínimo do outro sistema. Esta condição requer

$$|y_m| < \frac{\Delta y}{2} \quad (3.92)$$

Ou seja, tendo em conta a Eq. (3.91), deve ser

$$|l_1 - l_2| < \frac{\lambda}{2} \quad (3.93)$$

Considerando a geometria da Fig. 3.16, tem-se

$$l_1 = \sqrt{(d - h/2)^2 + L^2} \approx L + \frac{4d^2 + h^2 - 4hd}{8L} \quad (3.94a)$$

$$l_2 = \sqrt{(d + h/2)^2 + L^2} \approx L + \frac{4d^2 + h^2 + 4hd}{8L} \quad (3.94b)$$

pelo que

$$|l_1 - l_2| = \frac{hd}{L} \quad (3.95)$$

A Eq. (3.93) dá então

$$\frac{hd}{L} < \frac{\lambda}{2} \quad (3.96)$$

Este resultado constitui a condição de coerência espacial para o caso de uma fonte extensa e incoerente.

Quando se considera o padrão de interferência no plano de observação perto do eixo óptico, tem-se que as distâncias entre essa região e as duas fendas S_1 e S_2 são praticamente iguais. Nestas circunstâncias, o padrão de interferência reflecte a relação entre os campos $E(\vec{r}_1, t)$ e $E(\vec{r}_2, t)$ nas duas fendas S_1 e S_2 , respectivamente, a qual pode ser representada pela função de correlação:

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \Gamma_{12}(0) = \langle E(\vec{r}_1, t) E^*(\vec{r}_2, t) \rangle \quad (3.97)$$

A função dada pela Eq. (3.97) é chamada *função de coerência espacial*.

3.12. Problemas resolvidos

PR 3.1. A visibilidade, V , de um conjunto de franjas de interferência é definida à custa dos valores máximo e mínimo da intensidade no padrão de interferência, tal como é dado pela Eq. (3.84). Obtenha uma expressão para a visibilidade do padrão de franjas resultante da interferência de duas ondas coerentes cujos campos são paralelos. Qual é a visibilidade desse padrão quando as amplitudes das duas ondas são iguais?

Resolução

Da Eq. (3.6) tem-se que

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (1)$$

e

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (2)$$

pelo que se tem

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad (3)$$

No caso de as amplitudes das duas ondas serem iguais, tem-se $I_1 = I_2 = I_0$, pelo que a visibilidade é dada a partir da Eq. (3) por

$$V = \frac{2\sqrt{I_0^2}}{2I_0} = 1 \quad (4)$$

Verifica-se, assim, que a visibilidade é máxima nesta situação.

PR 3.2. Obtenha a intensidade resultante da sobreposição de N ondas com amplitudes iguais nos casos em que

- (a) as ondas são coerentes e se encontram em fase no ponto de observação e
- (b) as ondas são incoerentes.

Resolução

(a) A intensidade é proporcional ao valor médio no tempo do quadrado da amplitude do campo eléctrico, E_0^2 . No caso de as ondas serem coerentes, se encontrarem em fase no ponto de observação e apresentarem a mesma amplitude, tem-se da Eq. (3.17) que

$$\begin{aligned} I \propto E_0^2 &= \sum_{j=1}^N E_{0j}^2 + 2 \sum_{i>j} \sum_{j=1}^N E_{0j} E_{0i} \\ &= \left(\sum_{j=1}^N E_{0j} \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Verifica-se deste resultado que, quando se tem a sobreposição de ondas coerentes e em fase, a intensidade resultante é proporcional ao quadrado da soma das amplitudes dessas ondas. No caso em que as ondas têm a mesma amplitude, tem-se

$$I \propto N^2 E_{01}^2 \quad (2)$$

(b) Se as ondas sobrepostas forem incoerentes, em virtude da variação rápida e aleatória da diferença de fase entre essas ondas, os valores médios dos co-senos na Eq. (3.17) são nulos, tendo-se

$$I \propto E_0^2 = \sum_{j=1}^N E_{0j}^2 \quad (3)$$

Ou seja, quando se tem a sobreposição de ondas incoerentes, a intensidade resultante é simplesmente igual à soma das intensidades individuais. No caso de as amplitudes das ondas serem iguais, tem-se o resultado:

$$I \propto N E_{01}^2 \quad (4)$$

PR 3.3. Um feixe de luz com comprimento de onda λ ilumina as duas fendas na experiência de Young, que se encontram espaçadas de 1.5 mm. A distância entre o plano das fendas e o plano de observação é de 15 m e o espaçamento entre duas franjas brilhantes consecutivas nesse plano de observação é 6.3 mm. Qual é o comprimento de onda da luz? Assumindo que as duas fendas são iguais, como se distribui a intensidade no plano de observação?

Resolução

Usando a Eq. (3.24), tem-se

$$\lambda = \frac{h}{D} \Delta y = \frac{(1.5 \times 10^{-3})(6.3 \times 10^{-3})}{15} = 6.3 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (1)$$

Por outro lado, de acordo com a Eq. (3.23), a distribuição da intensidade no plano de observação é dada por:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi h y}{\lambda D} \right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi (1.5 \times 10^{-3}) y}{(6.3 \times 10^{-7})(15)} \right) = 4I_0 \cos^2(500y) \text{ W/m}^2 \quad (2)$$

A intensidade tem um valor máximo $I = 4I_0$ (franja brilhante) quando $500y = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ e um valor mínimo $I = 0$ (franja escura) quando $500y = (2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

PR 3.4. Monta-se uma experiência de Young, utilizando luz com comprimento de onda $\lambda = 600$ nm. Quando se coloca um filme de material transparente em frente de uma das fendas, a franja de ordem zero move-se para a posição ocupada anteriormente pela franja brilhante de ordem 5. Sabendo que o índice de refracção do filme é $n = 1.5$, determine a sua espessura.

Resolução

Observa-se uma franja brilhante quando a diferença de percursos ópticos da luz proveniente das duas fendas é um múltiplo do comprimento de onda: $\Delta = p\lambda$, sendo p um inteiro. Diferenciando a relação anterior, tem-se que $d\Delta = \lambda\delta p$. Colocando-se um filme de espessura d em frente de uma das fendas, a diferença de percursos ópticos varia de

$$\delta\Delta = d(n-1). \quad (1)$$

Atendendo a que a introdução desse filme produz um desvio de cinco franjas no padrão de interferência, tem-se $\delta p = 5$, pelo que $\delta\Delta = d(n-1) = 5\lambda$. Desta relação tira-se o resultado para a espessura do filme:

$$d = \frac{5\lambda}{n-1} = 6 \text{ }\mu\text{m} \quad (2)$$

PR 3.5. Encontre o ângulo θ entre os dois espelhos de Fresnel, supondo que a sua intersecção se encontra à distância $R = 2$ m da fonte e à distância $d = 4$ m do plano de observação, enquanto o comprimento de onda da luz é $\lambda = 600$ nm e o espaçamento entre as franjas brilhantes consecutivas é de 2 mm.

Resolução

Como foi visto na secção 3.3.2, a análise do espelho duplo de Fresnel pode ser feita de modo análogo à experiência de Young. Em particular, o espaçamento entre as franjas é dado pela Eq. (3.25):

$$\Delta y = \frac{D}{h}\lambda \quad (1)$$

sendo h o espaçamento entre as duas fontes virtuais, S_1 e S_2 , obtidas pela intercessão dos raios provenientes da fonte real S e reflectidos nos dois espelhos, enquanto D é a distância entre o plano das fontes virtuais e o plano de observação. A geometria da Fig. 3.3 permite escrever as relações:

$$h \approx 2\theta R \quad (2)$$

e

$$D = R + d \quad (3)$$

Usando as Eq.s (1)-(3), tem-se

$$\theta = \frac{(R+d)\lambda}{2R\Delta y} \quad (4)$$

Substituindo os valores indicados, obtém-se o resultado:

$$\theta = \frac{(2+4)(600 \times 10^{-9})}{2(2)(2 \times 10^{-3})} = 4.5 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad (5)$$

PR 3.6. Considere o padrão de interferência correspondente às três fendas, de igual largura, representadas na figura 3.17.

- Obtenha uma expressão para a distribuição da intensidade em função do ângulo θ e obtenha a intensidade para $\theta = 0$ rad.
- Determine o ângulo $\theta = \theta_1 \neq 0$ correspondente primeiro máximo adjacente ao máximo central.
- Relacione a intensidade para $\theta = \theta_1 / 2$ com a intensidade para $\theta = 0$.

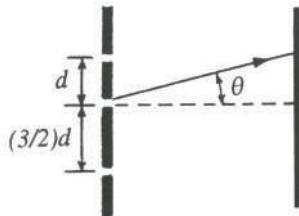


Figura 3.17 – Interferência usando plano com três fendas.

Resolução

- Pelo princípio da sobreposição, o campo resultante num ponto do plano de observação é dado pela soma dos campos devidos a cada uma das fendas:

$$E = E_1 + E_2 + E_3. \quad (1)$$

Os campos E_1 , E_2 e E_3 diferem entre si apenas devido à diferença de percursos ópticos desde cada uma das fendas até ao ponto de observação. Sendo E_1 o campo devido à fenda superior, pode-se escrever:

$$E = E_1 + E_1 \exp(i\delta) + E_1 \exp(i5\delta/2) \quad (2)$$

onde

$$\delta = kd \operatorname{sen} \theta. \quad (3)$$

A intensidade no ponto de observação é dada, a menos de um factor constante, por

$$I(\theta) = EE^* = E_1^2 [3 + 2\{\cos(\delta) + \cos(3\delta/2) + \cos(5\delta/2)\}] \quad (4)$$

Para $\theta = 0$, tem-se $\delta = 0$, pelo que

$$I(0) = 9E_1^2 \quad (5)$$

- Verifica-se da Eq. (4) que o primeiro máximo lateral acontece para $\delta = 4\pi$. O ângulo correspondente obtém-se da Eq. (3):

$$\theta = \theta_1 \approx \operatorname{sen} \theta_1 = \frac{2\lambda}{d} \quad (6)$$

- O ângulo $\theta = \theta_1 / 2$ corresponde a $\delta = 2\pi$, sendo a intensidade dada por:

$$I(\theta_1/2) = E_1^2 = I(0)/9 \quad (7)$$

PR 3.7. Duas lâminas rectangulares e finas de vidro estão em contacto ao longo de uma das suas arestas, enquanto que no lado oposto se interpõe um separador de 5 µm de espessura. Os índices de refracção das lâminas superior

e inferior são, respectivamente, 1.5 e 2.0. Observa-se franjas de interferência quando se faz incidir luz com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm normalmente às placas.

- Quantas franjas são observadas existindo ar entre as placas?
- E se existir óleo com um índice de refracção $n = 1.8$ entre essas placas?

Resolução

a) Havendo ar entre as placas e atendendo à relação entre os índices de refracção que definem o filme em causa ($1.5 > 1.0 < 2.0$), a condição para haver uma franja escura no ponto de observação é:

$$\delta = \frac{4\pi n_2}{\lambda_0} d \cos \theta_t = p2\pi \quad (1)$$

onde $n_2 = 1.0$ e $\theta_t = 0$ rad para uma incidência normal. Considerando a espessura do filme na posição do separador ($d = 5 \mu\text{m}$), tem-se:

$$p = \frac{2d}{\lambda_0} = 20 \quad (2)$$

Considerando que para $d = 0 \mu\text{m}$ se tem igualmente uma franja escura, conclui-se que existem 21 franjas escuras e 20 franjas brilhantes.

b) Havendo óleo entre as placas e atendendo à relação entre os índices de refracção que definem o filme em causa ($1.5 < 1.8 < 2.0$), a condição para haver uma franja brilhante no ponto de observação é:

$$\delta = \frac{4\pi n_2}{\lambda_0} d \cos \theta_t = p2\pi \quad (3)$$

onde $n_2 = 1.8$. Usando $\theta_t = 0$ rad e a espessura do filme na posição do separador ($d = 5 \mu\text{m}$), tem-se:

$$p = \frac{2n_2 d}{\lambda_0} = 36 \quad (4)$$

Considerando que para $d = 0 \mu\text{m}$ se tem igualmente uma franja brilhante, conclui-se que existem 37 franjas brilhantes e 36 franjas escuras.

PR 3.8. Um filme dielétrico de faces paralelas e com índice de refracção $n_2 = 1.5$, situado no ar, é iluminado por luz com um comprimento de onda $\lambda = 565.7$ nm, que incide nele segundo um ângulo de 30° . Qual a espessura mínima do filme que permite obter uma franja brilhante no padrão de interferência formado pela luz reflectida?

Resolução

Dada a relação entre os índices de refracção que definem o filme ($1.0 < 1.5 > 1.0$), a condição para haver uma franja brilhante no ponto de observação é $\delta' = p2\pi$, sendo δ' , dado pela Eq. (3.36). Para se ter uma espessura mínima do filme, deve ser $p = 0$, pelo que se tem a condição

$$\delta' = 0 = \frac{4\pi n_2}{\lambda} d \cos \theta_t - \pi \quad (1)$$

Ou seja:

$$d = \frac{\lambda}{4n_2 \cos \theta_t} \quad (2)$$

Usando a relação

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} \quad (3)$$

e a lei de Snell para a refracção, $\sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, tem-se

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (4)$$

Substituindo os valores dados, obtém-se o resultado:

$$d = \frac{565.7 \times 10^{-9}}{4\sqrt{1.5^2 - \sin^2 30^\circ}} = 0.1 \mu\text{m} \quad (5)$$

PR 3.9. Uma lente biconvexa com um raio de curvatura R encontra-se pouzada sobre uma superfície plana, sendo iluminada na normal com luz de comprimento de onda λ . O espaço entre a lente e a superfície plana é preenchido com um líquido com índice de refracção $n_l = 1.4$. Qual é a razão entre os raios do 20° anel escuro antes e depois da introdução desse líquido?

Resolução

O raio do anel escuro da ordem p é dado pela Eq. (3.43). No caso de o espaço entre a lente e a superfície plana ser preenchido por ar ($n_2 = 1$), tem-se

$$x_{p,a} = \sqrt{p\lambda_0 R} \quad (1)$$

Depois da introdução do líquido, com um índice de refracção n_l , o raio do mesmo anel passa a ser

$$x_{p,l} = \sqrt{\frac{p\lambda_0 R}{n_l}} \quad (2)$$

Dividindo membro a membro as Eq.s (1) e (2), tem-se

$$\frac{x_{p,a}}{x_{p,l}} = \sqrt{\frac{p\lambda R}{p\lambda R / n_l}} = \sqrt{n_l} = 1.18 \quad (3)$$

Ou seja, a razão entre os dois raios é dada por $\sqrt{n_l}$, independentemente da ordem do anel, do raio de curvatura da lente e do comprimento de onda da luz utilizada. Com a introdução do líquido, um anel de interferência com determinada ordem diminui o seu raio.

PR 3.10. Tendo em consideração as Eq.s (3.58) e (3.60), obtenha os valores máximo e mínimo das intensidades correspondentes aos feixes transmitido e reflectido.

Resolução

Da Eq. (3.58) vê-se que a intensidade do feixe transmitido, I_t , é máxima quando $\delta = 2\pi p$, tendo-se:

$$(I_t)_{\max} = I_i \quad (1)$$

Nestas condições, I_r assume um valor mínimo:

$$(I_r)_{\min} = 0 \quad (2)$$

Por outro lado, I_t é mínimo e I_r é máximo para $\delta = (2p+1)\pi$, tendo-se então:

$$(I_t)_{\min} = I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \quad (3)$$

e

$$(I_r)_{\max} = I_i \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \quad (4)$$

PR 3.11. Introduz-se uma lâmina transparente com um índice de refracção n e espessura L num dos braços do interferómetro de Michelson, perpendicularmente ao feixe. Determine o deslocamento que deve ser dado ao espelho de modo a que o sistema de franjas no plano de observação permaneça igual ao existente antes da introdução da lâmina.

Resolução

Ao introduzir-se a lâmina, o percurso óptico correspondente à sua espessura passa de $1L$ para nL . Atendendo a que esse elemento do percurso é percorrido duas vezes, tem-se que a alteração do percurso óptico resultante da introdução da lâmina é $2(n-1)L$. Em ordem a compensar esta variação do percurso óptico, o espelho deve deslocar-se de Δd , tal que,

$$2\Delta d = 2(n-1)L, \quad (1)$$

ou seja,

$$\Delta d = (n-1)L \quad (2)$$

PR 3.12. Ajusta-se um interferómetro de Michelson de modo a obter-se um padrão de franjas circulares concêntricas quando ele é iluminado com uma fonte extensa de luz com um comprimento de onda $\lambda = 400$ nm.

a) Determine o deslocamento a dar ao espelho móvel para que se verifique o aparecimento de 500 franjas no centro do padrão de interferência.

b) Se a franja central for brilhante, obtenha uma expressão para o ângulo correspondente ao primeiro anel escuro.

Resolução

As franjas circulares concêntricas correspondem a franjas de igual inclinação e são observadas quando os dois espelhos do interferómetro são mutuamente perpendiculares. A diferença de percurso óptico entre os dois braços é dada por

$$\Lambda = 2nd \cos \theta \quad (1)$$

sendo d a diferença de comprimento entre os dois braços do interferómetro, n o índice de refracção do meio ($n = 1$ para o ar) e θ o ângulo de incidência da luz nos espelhos.

a) Para que se verifique o aparecimento de 500 franjas no centro do padrão de interferência ($\theta=0$), deve ter-se $\Lambda = 2d = 500\lambda$. Ou seja, o espelho móvel deve deslocar-se de $d = 250\lambda = 0.1$ mm.

b) Se a franja central for brilhante, tem-se

$$2d = \left(p + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad p \text{ inteiro} \quad (2)$$

Para o primeiro anel escuro, tem-se

$$2d \cos \theta = p\lambda \quad (3)$$

Subtraindo membro a membro as Eq.s (2) e (3), tem-se

$$2d(1 - \cos \theta) = \frac{\lambda}{2} \quad (4)$$

Dado que o valor de θ é muito pequeno, pode-se usar a aproximação $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, obtendo-se o resultado:

$$\theta \approx \sqrt{\lambda / 2d} \text{ rad} \quad (5)$$

PR 3.13. Pretende-se reduzir a reflectividade de uma superfície de vidro (índice de refracção n_v) aplicando-lhe um filme apropriado. Determine o índice de refracção n_f ($n_f < n_v$) e a espessura d que esse filme deverá ter. Considere, para efeito de cálculos, o comprimento de onda $\lambda = 550$ nm, para o qual a sensibilidade da vista é máxima.

Resolução

No sentido de reduzir a reflectividade da superfície do vidro, a luz reflectida nas interfaces ar/filme e filme/vidro deve estar em oposição de fase para que a sua interferência seja destrutiva. Dado que se tem $n_a < n_f < n_v$, sendo n_a o índice de refracção do ar, a espessura d do filme deve satisfazer a condição:

$$2n_f d = \left(p + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad (1)$$

onde p um número inteiro. Por outro lado, para assegurar que as amplitudes das ondas reflectidas nas duas interfaces sejam semelhantes, as reflectividades dessas interfaces devem ser iguais: $R_{ar/filme} = R_{filme/vidro}$. Ou seja, deve-se ter

$$\frac{(n_f - n_a)^2}{(n_f + n_a)^2} = \frac{(n_v - n_f)^2}{(n_v + n_f)^2} \quad (2)$$

onde se assumiu uma incidência normal da luz. A condição anterior dá o resultado:

$$n_f = \sqrt{n_a n_v} \quad (3)$$

Assim, substituindo o resultado anterior na Eq. (1), obtém-se que a espessura do filme é dada por

$$d = \left(p + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2\sqrt{n_a n_v}} \quad (4)$$

Fazendo $p = 0$ e substituindo os valores $n_a = 1.0$, $n_v = 1.5$ e $\lambda = 550$ nm, obtém-se o resultado $d = 112$ nm.

PR 3.14. Obtenha a função de autocoerência, o grau de coerência temporal e a visibilidade das franjas de interferência, para o caso de uma onda harmônica, dada por

$$E_1(t) = E_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

Caracterize a coerência desta onda harmônica.

Resolução

A função de autocoerência correspondente à onda harmônica é dada por

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |E_0|^2 e^{-i\omega t} e^{i\omega(t+\tau)} dt = I_1 e^{i\omega\tau} \quad (2)$$

Com base na Eq. (3.88), tem-se que o grau de coerência temporal é dado por

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} = e^{i\omega\tau} \quad (3)$$

Neste caso, a visibilidade é

$$V = |\gamma(\tau)| = 1 \quad (4)$$

O resultado traduzido pela Eq. (4) corresponde a um caso limite, em que a luz é completamente coerente.

PR 3.15. Obtenha a função de autocoerência, o grau de coerência temporal e a visibilidade das franjas de interferência, para o caso da sobreposição de duas ondas harmônicas com amplitudes iguais mas frequências diferentes, traduzida por:

$$E(t) = E_0 e^{i\omega_1 t} + E_0 e^{i\omega_2 t} \quad (1)$$

Compare com o resultado dado pela Eq. (4) do problema PR 3.14.

Resolução

Substituindo a Eq. (1) na Eq. (3.87) tem-se que a função de autocoerência é:

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (E_0^* e^{-i\omega_1 t} + E_0^* e^{-i\omega_2 t})(E_0 e^{i\omega_1(t+\tau)} + E_0 e^{i\omega_2(t+\tau)}) dt \\ &= |E_0|^2 (e^{i\omega_1\tau} + e^{i\omega_2\tau}) \end{aligned} \quad (2)$$

Deste modo, o grau de coerência temporal, definido pela Eq. (3.88), vem dado por

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2} (e^{i\omega_1\tau} + e^{i\omega_2\tau}) \quad (3)$$

A visibilidade é dada por

$$V = |\gamma(\tau)| = \frac{1}{2} |e^{i\omega_1\tau} + e^{i\omega_2\tau}| = \left| \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)\tau \right| \quad (4)$$

Em contraste com o resultado dado pela Eq. (4) do problema PR 3.14, verifica-se que, no caso da sobreposição de duas ondas harmônicas com frequências diferentes, a visibilidade é uma função periódica do atraso temporal τ .

3.13. Problemas propostos

PP3.1. Uma lente convergente L , com um orifício circular no centro, é usada como um sistema de interferência de duas ondas (Fig. 3.18). A fonte de luz S é colocada de tal modo que a onda emergente do vidro da lente é plana, enquanto que a onda transmitida pelo orifício é esférica. O orifício tem um diâmetro D , enquanto que a espessura máxima da lente é δ .

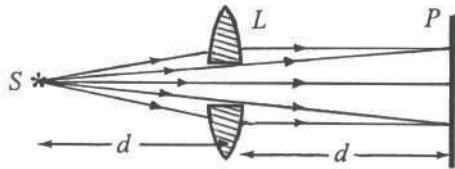


Figura 3.18 – Geometria incluindo uma fonte pontual S , uma lente L com um orifício circular no centro e um plano de observação P .

- Escreva as expressões analíticas das ondas que se vão sobrepor. Considere que ambas as ondas têm a mesma amplitude no plano P , situado a uma distância d da face de saída da lente.
- Deduza uma expressão para intensidade no plano P em função da distância r ao eixo do sistema. Qual é a forma das franjas de interferência?

PP3.2. Um sistema óptico é constituído por duas camadas de um dielétrico (1) com índice de refracção $n_1 = 1.4$ e três camadas de um outro dielétrico (2) com índice de refracção $n_2 = 2.5$, depositadas alternadamente num substrato de vidro ($n_v = 1.50$). A primeira camada a ser depositada é do dielétrico (2). Mostre que o sistema funciona como um espelho de elevada reflectividade, se a espessura de cada camada for $\lambda/4$ e a incidência da luz for normal.

PP3.3. Um filme de água ($n = 4/3$) de faces paralelas e com 300 nm de espessura encontra-se no ar. Se o filme for iluminado normalmente com luz branca ($\lambda = 350 - 700$ nm), qual o comprimento de onda da luz reflectida?

PP3.4. O diâmetro do sétimo anel brilhante na experiência dos anéis de Newton decresce desde 1.55 cm para 1.28 cm quando se introduz um líquido entre a lente e a placa de faces paralelas em que ela se apoia. Determine o índice de refracção desse líquido se se usar luz amarela de Sódio ($\lambda = 589.3$ nm) nessa experiência.

PP3.5. Um filme com uma espessura $d = 1$ mm e um índice de refracção $n = 1.5$ é iluminado com luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 600$ nm. Observa-se então um padrão de franjas circulares de Haidinger. Determine o valor de p para a franja central ($\theta_t = 0$) e diga se essa franja é clara ou escura.

PP3.6. Considerando a sobreposição de todas as ondas reflectidas na Fig. 3.14, obtenha a intensidade do campo reflectido resultante. Mostre que o resultado é igual ao obtido a partir das Eq.s (3.58) e (3.60).

PP3.7. Um biprisma de Fresnel é iluminado por luz com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm, proveniente de uma fonte pontual situada a uma distância de 20 cm. As franjas de interferência são observadas num ecrã situado a 80 cm do biprisma. Considerando que o biprisma tem um ângulo $\alpha = 3^\circ$ e um índice de refracção $n = 1.5$, determine o espaçamento entre franjas consecutivas.

PP 3.8. Mostre que o espaçamento h entre as fontes virtuais S_1 e S_2 no biprisma de Fresnel (Fig. 3.4) é dado por $h = 2s(n - 1)\alpha$, sendo s a distância entre o plano das fontes e o biprisma e α o ângulo de cada um dos prismas.

PP 3.9. A figura 3.19 ilustra uma experiência realizada com o espelho de Lloyd. A fonte pontual S , situada a uma distância h do espelho AB ($l = 30$ cm) emite, em todas as direções, luz com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm. Tem-se $d = 1$ cm e supõe-se $h \ll d$.

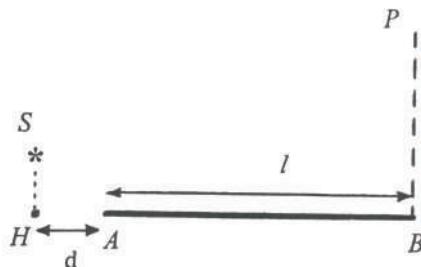


Figura 3.19 – Geometria para o espelho de Lloyd.

a) Exprima, em função dos parâmetros geométricos e ópticos do sistema, o espaçamento entre franjas sucessivas, bem como a extensão do campo de interferência (medida na perpendicular ao espelho AB).

b) Forma-se uma imagem de P com a ajuda de uma lente convergente com uma distância focal de 8 cm, situada a 10 cm de P . O espaçamento entre franjas no plano imagem é de 1 mm. Deduza o valor de h e o número de franjas brilhantes observadas.

PP 3.10. À saída de um interferômetro de Michelson, iluminado por uma fonte extensa de luz com comprimento de onda λ , o feixe emergente é recolhido por uma lente delgada de distância focal f . No plano focal imagem dessa lente são observados anéis de interferência. Mostre que a área da coroa circular, compreendida entre dois anéis brilhantes consecutivos, é constante, sendo independente da ordem desses anéis.

PP 3.11. Em cada um dos braços de um interferômetro de Michelson é colocado um tubo com 10 cm de comprimento, em que se fez o vácuo. O interferômetro é iluminado com luz amarela de sódio ($\lambda = 589.3$ nm) e alinhado de modo a observar-se franjas de igual inclinação. Quando se introduz ar num dos tubos, verifica-se a passagem de 20 franjas por um dado ponto do plano de observação. Determine a pressão do ar nesse tubo. Considere que o índice de refracção do ar, n , se relaciona com a pressão, P , na forma $n = kP$, onde $k = 3 \times 10^{-4}$ atmos $^{-1}$.

PP 3.12. Um interferômetro de Fabry-Perot tem uma finesse $\Phi = 40000$ e uma separação entre os espelhos $d = 4$ cm. O espaço entre os espelhos é preenchido por ar. Calcule o coeficiente de reflexão r dos espelhos, a banda espectral livre $(\Delta\lambda)_{bel}$, a largura de uma linha espectral γ e o poder de resolução cromática \mathcal{R} do interferômetro.

PP 3.13. Um interferômetro de Fabry-Perot é constituído por uma cavidade de ar ($n = 1$), limitada por duas superfícies com um coeficiente de reflexão $r = 0.95$, separadas de 2 cm. Considerando um comprimento de onda $\lambda = 500$ nm, determine a ordem máxima de interferência, o coeficiente de finesse, o intervalo mínimo de resolução de comprimentos de onda e o poder de resolução cromática.

PP 3.14. Determine o comprimento de coerência e o tempo de coerência da luz branca, cujo espectro está compreendido entre os comprimentos de onda 780 nm (cor vermelha) e 390 nm (cor violeta).

PP 3.15. Obtenha o resultado dado pela Eq (3.85) para a visibilidade de um padrão de franjas de interferência.

3.14. Referências bibliográficas

1. M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, 6^a Ed., Pergamon Press, Oxford, 1980.
2. R. Guenther, *Modern Optics*, 2nd Ed., Oxford University Press, 2015.
3. E. Hecht, *Optics*, 5th Ed., Pearson Education Limited, 2017.
4. M. Klein e T. Furtak, *Optics*, 2^a Ed., John Wiley & Sons, New York, 1986.
5. F. L. Pedrotti, L. M. Pedrotti e L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, 3rd Ed., Cambridge University Press, 2018.
6. M. Francon, *Optical Interferometry*, Academic Press, 1966.
7. P. Hariharan, *Optical Interferometry*, Elsevier, 2003.
8. S. Tolansky, *An Introduction to Interferometry*, John Wiley and Sons, 1973.
9. M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, 6^a Ed., Pergamon Press, Oxford, 1980.
10. R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, 3th Ed., OUP Oxford, 2000.
11. L. Mandel e E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995.
12. A. S. Marathay, *Elements of Optical Coherence Theory*, Wiley, New York, 1982.

Capítulo 4

DIFRACÇÃO

O fenómeno de difracção ocorre sempre que a fase ou a amplitude de parte da frente de onda se altera, após a interacção com algum obstáculo, transparente ou opaco. Na realidade, não existe uma diferença substancial entre *interferência* e *difracção*, sendo a distinção entre os dois fenómenos de certo modo arbitrária. Fala-se habitualmente em interferência quando se considera a sobreposição de um número reduzido de ondas, enquanto que o termo difracção é aplicado nos casos em que o número de ondas interferentes é elevado.

A descrição rigorosa do fenómeno da difracção baseia-se nas equações de Maxwell e na consideração das condições de fronteira associadas com o obstáculo em causa. Contudo, a aplicação dessa teoria revela-se geralmente uma tarefa complicada, pelo que em muitos casos se torna conveniente utilizar uma teoria escalar aproximada. Esta teoria aproximada é baseada no chamado *princípio de Huygens*, segundo o qual *cada ponto de uma dada frente de onda pode ser considerado como uma fonte de ondas esféricas elementares, com a mesma frequência da onda primária. A amplitude do campo óptico em qualquer ponto do espaço num momento posterior é dada pela sobreposição de todas essas ondas elementares*.

A utilização desta teoria escalar resulta no chamado *integral de difracção*. Pode-se obter soluções analíticas para este integral recorrendo a duas aproximações diferentes. Numa das aproximações, considera-se que o plano de observação e a fonte de luz se encontram muito afastados do local de obstrução da frente de onda, tendo-se então a chamada *difracção de Fraunhofer*. Quando essas condições não se verificam tem-se a chamada *difracção de Fresnel*.

4.1. O integral de difracção

Considere-se um orifício num ecrã iluminado por uma onda plana, dada por:

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_i(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

A onda emergente do orifício é uma onda esférica, cuja amplitude complexa se pode escrever na forma:

$$E(\vec{r}) = \frac{C}{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (4.2)$$

onde C é uma constante, proporcional à amplitude da onda incidente, E_i , e à área do orifício, Δs .

Considere-se a Fig. 4.1, que ilustra o caso em que há dois orifícios: um situado em P_1 , a uma distância $r_{01} = |\vec{r}_0 - \vec{r}_1|$ do ponto de observação P_0 , e outro situado em P_2 , a uma distância $r_{02} = |\vec{r}_0 - \vec{r}_2|$ de P_0 . O campo em P_0 devido ao orifício P_j ($j = 1, 2$) é:

$$E_j(\vec{r}_0) = Q_j \frac{E_i(\vec{r}_j)}{r_{0j}} e^{-ik\cdot\vec{r}_{0j}} \Delta s_j \quad (4.3)$$

onde Q_j é uma constante, conhecida como *fator de obliquidade*, que depende do ângulo, φ , entre \vec{r}_{0j} e a normal a Δs_j . Essa dependência com o ângulo φ pode ser traduzida na forma

$$Q(\varphi) = Q(0) \frac{1 + \cos(\varphi)}{2} \quad (4.4)$$

Deste modo, verifica-se que o factor de obliquidade é máximo para $\varphi = 0$ e que se anula para $\varphi = \pi$ rad, traduzindo assim o facto de a onda proveniente do orifício não se propagar para trás, no sentido da fonte.

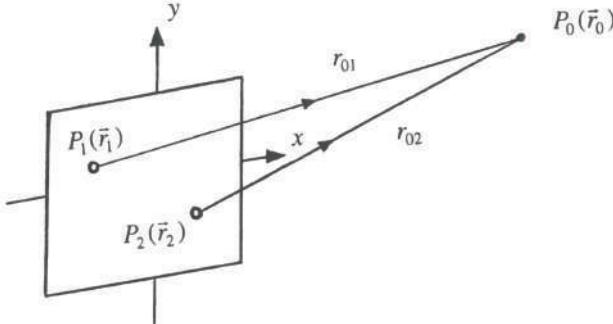


Figura 4.1 – Geometria para a aplicação do princípio de Huygens ao caso de dois orifícios.

O campo total em P_0 é dado pela sobreposição das ondas provenientes de P_1 e de P_2 :

$$E(\vec{r}_0) = E_1(\vec{r}_0) + E_2(\vec{r}_0) \quad (4.5)$$

No caso de se ter N orifícios, a Eq. (4.5) é generalizada na forma:

$$E(\vec{r}_0) = \sum_{j=1}^N E_j(\vec{r}_0) = \sum_{j=1}^N Q_j \frac{E_i(\vec{r}_j)}{r_{0j}} e^{-ik\cdot\vec{r}_{0j}} \Delta s_j \quad (4.6)$$

No limite em que Δs_j tende para zero, o orifício converte-se numa fonte elementar de Huygens, com uma área elementar ds . Pode-se considerar qualquer abertura como um conjunto destas fontes elementares e converter o somatório da Eq. (4.6) num integral. Neste processo, \vec{r}_{0j} é substituído por \vec{R} , que indica a posição da fonte elementar de Huygens relativamente ao ponto de observação P_0 , e \vec{r}_j é substituído por \vec{r} , que indica a posição dessa mesma fonte elementar relativamente à origem do sistema de coordenadas. Por outro lado, atendendo a que o factor de obliquidade Q_j varia lentamente com o ângulo formado entre \vec{r}_{0j} e a normal a Δs_j , pode-se tratar este factor como sendo uma constante, Q . Nestas circunstâncias, a Eq. (4.6) converte-se na seguinte expressão:

$$E(\vec{r}_j) = Q \iint_{\Sigma} \frac{E_i(\vec{r})}{R} e^{-ik\cdot\vec{R}} ds \quad (4.7)$$

Este resultado constitui o chamado *integral de difracção* e mostra que o campo em P_0 pode ser encarado como o resultado da sobreposição das múltiplas ondas elementares emitidas pelos orifícios imaginários que compõem a abertura Σ . Esta é a essência do *princípio de Huygens*.

A grandeza do factor de obliquidade pode ser encontrada comparando o resultado obtido a partir da Eq. (4.7) com a previsão da óptica geométrica para o campo no ponto de observação. Mostra-se no problema PR 4.1 que

$$Q = \frac{i}{\lambda} \quad (4.8)$$

onde λ é o comprimento de onda da luz.

O facto de o integral de difracção, dado pela Eq. (4.7), exprimir o campo $E(\vec{r}_0)$ na forma de um integral sobre a abertura Σ permite obter um resultado bastante importante, que corresponde ao chamado *princípio de Babinet*. Segundo este princípio, que se demonstra no problema PR 4.2, a distribuição da intensidade do padrão de difracção devido a um objecto opaco é igual à distribuição da intensidade do padrão de difracção produzido por uma abertura com a mesma forma e dimensões desse objecto.

4.2. Difracção de Fraunhofer

Na difracção de Fraunhofer requer-se que, tanto a fonte de luz como o ponto de observação, estejam bastante afastados da abertura, de modo a que se possa considerar que, tanto a onda incidente como a onda difractada, são constituídas por ondas planas. Partindo da Eq. (4.7) e considerando a geometria da Fig. 4.2, mostra-se no problema PR 4.3 que o campo difractado no ponto de observação $P_0(x_p, y_p)$ é dado por:

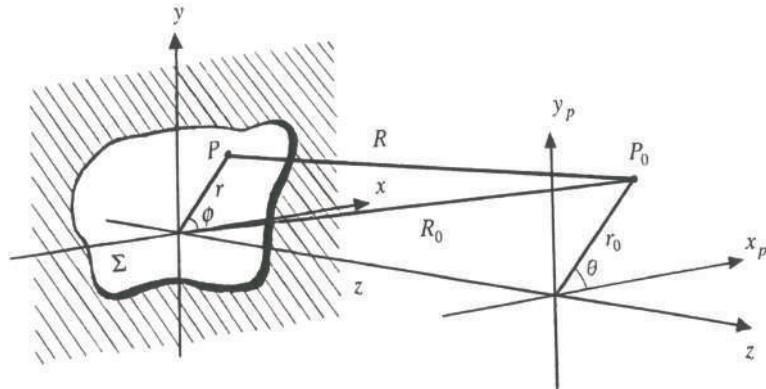


Figura 4.2 – Geometria para o estudo da difracção de Fraunhofer por uma abertura arbitrária.

$$E_P = A \iint_{\Sigma} \exp \left[ik \left(\frac{xx_p + yy_p}{R_0} \right) \right] dx dy \quad (4.9)$$

onde

$$A = \frac{QE_i}{R_0} e^{-ik\cdot\vec{R}_0} \quad (4.10)$$

Na obtenção da Eq. (4.9) considerou-se que $|R_0 - R| \ll R_0$ e $x^2 + y^2 \ll 2\lambda R_0$, sendo R a distância entre os pontos $P(x, y)$ e $P_0(x_p, y_p)$ e R_0 a distância entre o centro da abertura, de coordenadas $(0,0)$, e o mesmo ponto $P_0(x_p, y_p)$.

O resultado dado pela Eq. (4.9) satisfaz a chamada *condição de Fraunhofer*, segundo a qual a fase do campo deve ser uma função linear das coordenadas da abertura, sendo o campo difractado constituído por um conjunto de ondas planas.

No caso de a abertura estar coberta por um filme com uma função de transmissão $f(x,y)$, o campo E_i na Eq. (4.7) deve ser substituído por $f(x,y)E_i$, que representa o campo transmitido por esse filme. No caso geral, a função $f(x,y)$ é complexa, traduzindo as variações de amplitude e de fase sofridas pelo campo incidente no filme. Nestas circunstâncias, a Eq. (4.9) pode ser generalizada e apresentar-se na forma

$$\begin{aligned} E_P &= A \iint_{\Sigma} f(x,y) \exp \left[ik \left(\frac{xx_p + yy_p}{R_0} \right) \right] dx dy \\ &= A \iint_{\Sigma} f(x,y) \exp[i(k_x x + k_y y)] dx dy \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $k_x = kx_p / R_0$, $k_y = ky_p / R_0$

As integrações na Eq. (4.11) podem ser realizadas entre $-\infty$ e $+\infty$, assumindo-se nesse caso que a função de transmissão $f(x,y)$ é estendida de tal maneira que se anula fora da região da abertura. Deste modo, pode-se concluir da Eq. (4.11) que *o padrão de difracção de Fraunhofer para a amplitude do campo eléctrico é proporcional à transformada de Fourier bi-dimensional da função de transmissão da abertura*.

4.2.1. Difracção por uma fenda simples

Consideremos o caso de uma fenda simples, com uma largura a , centrada na origem e paralela ao eixo dos y , com um comprimento b , tal que $b \gg \lambda$. A função de transmissão é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a/2 \wedge |y| \leq b/2 \\ 0, & |x| > a/2 \vee |y| > b/2 \end{cases} \quad (4.12)$$

O campo difractado pode ser obtido substituindo a Eq. (4.12) na Eq. (4.11). Mostra-se no problema PR 4.4 que a luz se espalha predominantemente no plano xz , sendo a distribuição da intensidade dada por:

$$I = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha^2} = I_0 \operatorname{senc}^2 \alpha. \quad (4.13)$$

Na Eq. (4.13), I_0 é o valor máximo da intensidade e $\alpha = kax_p / 2R_0 = (ka/2)\operatorname{sen}\theta$, sendo $\operatorname{sen}\theta = x_p/R_0$.

A função

$$\operatorname{senc}(w) \equiv \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} \quad (4.14)$$

é conhecida como a função seno cardinal. Na Fig. 4.3 mostra-se os gráficos das funções $\operatorname{senc}(w)$ e $\operatorname{senc}^2(w)$. A função $\operatorname{senc}(w)$ assume o valor máximo $\operatorname{senc}(w) = 1$ para $w = 0$ e apresenta zeros para

$$w = m\pi \quad (4.15)$$

sendo m um número inteiro diferente de zero. A dimensão do padrão de difracção pode ser caracterizada pelo primeiro zero ($m = \pm 1$), podendo-se verificar que essa dimensão é tanto maior quanto mais estreita for a fenda.

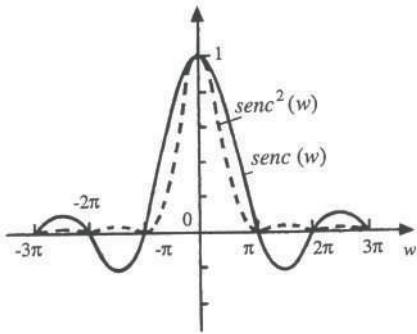


Figura 4.3 – Representação gráfica das funções $\text{senc}(w)$ e $\text{senc}^2(w)$.

4.2.2. Difracção por várias fendas

Considere-se um conjunto de N aberturas idênticas, distribuídas ao longo do eixo dos x , sendo $f(x)$ a função de transmissão da abertura situada na origem do eixo. De acordo com a Eq. (4.11), o padrão de difracção produzido por esse conjunto de aberturas é dado pela transformada de Fourier da correspondente função de transmissão, mostrando-se no problema PR 4.6 que essa transformada é dada por:

$$G(k_x) = F\{f(x)\}F\{D(x)\} \quad (4.16)$$

onde

$$D(x) = \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \quad (4.17)$$

Na Eq. (4.16), F indica a transformada de Fourier, enquanto na Eq. (4.17), δ é a função delta de Dirac e x_n é a posição da n -ésima abertura.

A Eq. (4.16) traduz o chamado *teorema matricial*, segundo o qual o padrão de difracção determinado por uma dada distribuição de aberturas idênticas é igual ao produto do padrão de difracção devido a uma só dessas aberturas pelo padrão de difracção correspondente a um conjunto de fontes pontuais com a mesma distribuição espacial da rede de aberturas.

O teorema matricial pode ser utilizado para calcular o padrão de difracção produzido por N fendas idênticas, paralelas ao eixo dos y , cada uma com largura a e espaçadas entre si de d . Nestas condições, tem-se $x_n = (n-1)d$. A distribuição de intensidade correspondente a uma dessas fendas é dada pela Eq. (4.13). Por outro lado, tem-se

$$F\{D(x)\} = \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \quad (4.18)$$

onde

$$\beta = \frac{kd}{2} \sin \theta \quad (4.19)$$

Usando o teorema matrical, a distribuição de intensidade no padrão de difracção correspondente às N fendas é dada por:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} \quad (4.20)$$

Na Eq. (4.20), o factor $\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$ é conhecido por *factor de forma*, enquanto que o factor $\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}$, resultante

da interferência entre a luz proveniente das diferentes fendas, é conhecido por *factor da rede*.

Um dispositivo com múltiplas fendas, como o que foi considerado anteriormente, constitui um exemplo de uma *rede de difracção*. Em geral, esta designação aplica-se a qualquer estrutura periódica constituída por elementos difractivos, sejam eles aberturas ou obstáculos, susceptível de alterar a amplitude e/ou a fase de uma onda nela incidente. A rede de difracção mais comum é constituída por vários milhares de estrias paralelas, desenhadas na superfície de uma lâmina de vidro.

Quando se tem apenas duas fendas, a Eq. (4.20) pode ser apresentada na forma

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cos^2 \beta \quad (4.21)$$

Quando a largura das fendas (a) tende para zero, então $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \approx 1$ e a Eq. (4.21) representa a intensidade

devida a um par de fontes lineares, como se considera na experiência de Young.

Se, por outro lado, for $d = 0$ (as duas fendas coincidem), então $\beta = 0$ e a Eq. (4.21) reduz-se à Eq. (4.13), que dá a difracção por uma fenda simples. Pode-se, portanto, considerar que a Eq. (4.21) para o caso de duas fendas é gerada por um termo de interferência, $\cos^2 \beta$, modulado por um termo de difracção, $(\sin^2 \alpha)/\alpha^2$.

4.2.3. Difracção por uma abertura circular

No caso da difracção por uma abertura circular, torna-se conveniente para efeitos de cálculo dos integrais na Eq. (4.11) usar coordenadas polares, tanto no plano da abertura como no plano de observação. No plano da abertura, considera-se $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$, tendo-se uma área elementar dada por $r dr d\phi$. No plano de observação tem-se $x_p = r_0 \cos \theta$ e $y_p = r_0 \sin \theta$.

Considerando que a abertura tem um raio a e que a sua função de transmissão é $f(r, \phi) = 1$ ($r \leq a$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$), a Eq. (4.11) assume o aspecto:

$$E_P = A \int_0^{a/2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[-ik \frac{rr_0}{R_0} \cos(\theta - \phi) r dr d\phi \right] \quad (4.22)$$

O integral da Eq. (4.22) pode ser calculado analiticamente em termos das funções de Bessel, obtendo-se o seguinte resultado para a intensidade no plano de observação:

$$I = 4|A|^2 S^2 \left[\frac{J_1(kar_0/R_0)}{(kar_0/R_0)} \right]^2 \quad (4.23)$$

onde $J_1(u)$ é a função de Bessel de primeira espécie de ordem 1 e S é a área da abertura circular. Considerando que $\lim_{u \rightarrow 0} (J_1(u)/u) = 1/2$, tem-se que a intensidade no centro do padrão de difracção é $I_0 = |A|^2 S^2$.

Na Fig. 4.4 representam-se as funções $\frac{2J_1(u)}{u}$ e $\left[\frac{2J_1(u)}{u} \right]^2$.

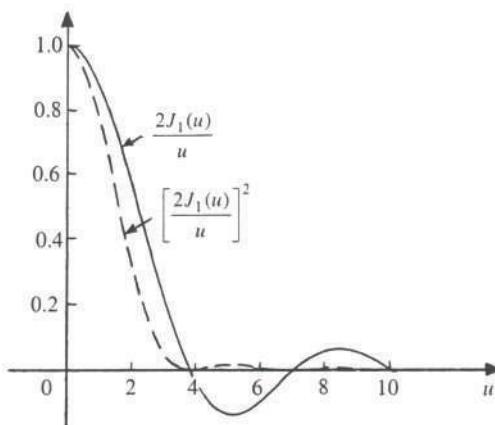


Figura 4.4 – Representação das funções $2J_1(u)/u$ (curva a cheio) e $\left[2J_1(u)/u \right]^2$ (curva a tracejado).

O padrão de difracção descrito pela Eq. (4.23) é conhecido por *padrão de Airy*, sendo constituído por um disco central brilhante e por um conjunto de anéis concêntricos, alternadamente escuros e brilhantes. O raio do primeiro anel escuro é habitualmente usado para caracterizar o tamanho desse padrão de difracção e é dado por:

$$r_{01} = 1.2 \frac{R_0 \lambda}{2a} \quad (4.24)$$

Estes resultados são de grande importância prática. Deve notar-se, por exemplo, que a imagem de uma fonte pontual, formada por um sistema óptico ideal, constituído por espelhos ou lentes circulares, tem o aspecto de um padrão de Airy.

4.3. Difracção de Fresnel

A difracção de Fraunhofer, produzida por uma dada abertura, verifica-se quando ela é iluminada por ondas planas e o ponto de observação se encontra bastante afastado dessa abertura. Nestas circunstâncias, tem-se que a fase do campo difractado varia linearmente com os parâmetros da abertura. Nesta secção considera-se que ou a fonte ou o plano de observação, ou ambos, se encontram relativamente próximos da abertura, pelo que será necessário ter em devida conta a curvatura da frente de onda.

Os padrões de difracção de Fresnel podem entender-se na continuidade entre dois casos extremos: os padrões correspondentes à óptica geométrica, por um lado, e os padrões da difracção de Fraunhofer, por outro. Na óptica geométrica supõe-se que a luz se propaga ao longo de trajectórias rectilíneas, sendo por isso de esperar poder observar-se uma imagem nítida da abertura no plano de observação. Na prática, observa-se uma imagem deste tipo apenas se a distância entre o plano de observação e o plano da abertura for bastante curta. Na difracção de Fraunhofer, em que essa distância deve ser efectivamente muito grande, a imagem corresponde a um padrão de franjas que não tem qualquer semelhança aparente com a forma da abertura. A difracção de Fresnel corresponde a uma situação intermédia. Neste caso, a imagem observada é essencialmente uma imagem da abertura, embora os seus contornos não sejam nítidos e apresentem franjas.

4.3.1. Propagação livre de uma onda esférica

Considere-se uma frente de onda esférica proveniente de uma fonte pontual situada em P_1 e que no instante t tem um raio R_f , como se representa na Fig. 4.5. Com o objectivo de determinar o campo no ponto de observação P_0 devido a esta frente de onda, considera-se um conjunto de superfícies esféricas de raios $R = R_0, R_0 + \lambda/2, R_0 + 2\lambda/2, \dots, R_0 + j\lambda/2, \dots$ sendo R_0 a distância entre a frente de onda e o ponto P_0 , medida sobre a linha que liga P_1 e P_0 . Estas superfícies esféricas dividem a frente de onda num certo número de zonas com a forma de anéis, chamadas *zonas de Fresnel*.

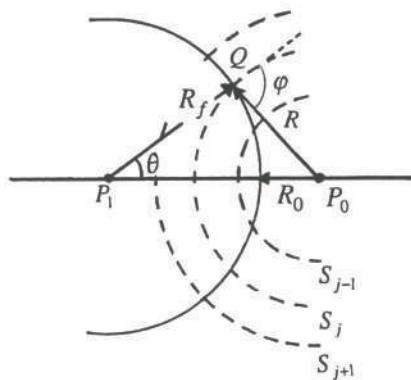


Figura 4.5 – Geometria para a construção das zonas de Fresnel correspondentes a uma onda esférica.

Mostra-se no problema PR 4.10 que o campo no ponto de observação P_0 devido apenas à zona de Fresnel definida entre $R_j = R_0 + j\lambda/2$ e $R_{j-1} = R_0 + (j-1)\lambda/2$ é dado por:

$$E_j(P_0) = 2i(-1)^j \frac{Q_j E_0 \lambda}{R_f + R_0} e^{-ik(R_f + R_0)} \quad (4.25)$$

A alternância de sinal do campo correspondente a zonas de Fresnel consecutivas deve-se à diferença de fase entre as ondas provenientes dessas zonas, uma vez que a distância de propagação para pontos similares de zonas adjacentes difere precisamente de $\lambda/2$. Deste modo, as contribuições para o campo no ponto P_0 devidas a zonas adjacentes tendem a anular-se entre si. Contudo, esse cancelamento não é perfeito, dado que o factor de inclinação varia, ainda que ligeiramente, de zona para zona.

Tendo em consideração a alternância do sinal, o campo total no ponto P_0 devido a N zonas de Fresnel é dado a partir da Eq. (4.25) por:

$$|E| = |E_1| - |E_2| + |E_3| - \dots \pm |E_N| \quad (4.26)$$

Os elementos do somatório na Eq. (4.26) podem ser reagrupados na forma:

$$|E| = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) + \left(\frac{|E_3|}{2} - |E_4| + \frac{|E_5|}{2} \right) + \dots \quad (4.27)$$

Atendendo a que a variação do factor de inclinação de uma dada zona para as adjacentes é desprezável, pode-se considerar que cada um dos parênteses na Eq. (4.27) é nulo. Nesta aproximação, considerando que o factor de inclinação para a última zona de Fresnel (correspondente a $\varphi = \pi$) é nulo, tem-se da Eq. (4.27) que

$$|E| \approx \frac{|E_1|}{2} \quad (4.28)$$

Este resultado, surpreendentemente simples, mostra que o campo total no ponto de observação P_0 , produzido por uma onda esférica não obstruída, é igual a metade da contribuição devida à primeira zona de Fresnel.

4.3.2. Difracção por aberturas ou obstáculos circulares

A análise realizada na secção anterior pode ser facilmente aplicada ao caso da difracção de Fresnel por aberturas circulares. Considerando um ponto de observação P_0 sobre o eixo da abertura e assumindo que esta se encontra inteiramente preenchida por um número inteiro, N , de zonas de Fresnel, são possíveis duas situações. Se N for par, tem-se:

$$E = (|E_1| - |E_2|) + (|E_3| - |E_4|) + \dots + (|E_{N-1}| - |E_N|) \approx 0 \quad (4.29)$$

dado que as contribuições adjacentes são praticamente iguais em módulo. Por outro lado, se N for ímpar, tem-se:

$$E = |E_1| - (|E_2| - |E_3|) - (|E_4| - |E_5|) - \dots - (|E_{N-1}| - |E_N|) \approx |E_1| \quad (4.30)$$

Este resultado pode parecer surpreendente, quando comparado com o da Eq. (4.28). De facto, verifica-se que a interposição de um ecrã opaco e apenas com um pequeno orifício, apesar de bloquear quase completamente a frente de onda, faz com que a intensidade em P_0 quadruplique o seu valor comparativamente com a situação de propagação livre da onda! Obviamente, o princípio da conservação da energia exige que exista outros pontos em que a intensidade tenha diminuído. Dada a simetria da configuração, é de esperar neste caso que se observe, num plano perpendicular ao eixo da abertura, um padrão de franjas circulares.

Ondas planas

Na discussão anterior considerou-se que a onda incidente na abertura era uma onda esférica. No caso de a onda incidente ser uma onda plana, a análise do problema torna-se mais simples. Nesta situação, as zonas de Fresnel correspondem a anéis planares definidos no plano da frente de onda.

Usando a definição dada na Secção 4.3.1 para as zonas de Fresnel e o teorema de Pitágoras, tem-se que o raio da n-ésima zona, r_n , se relaciona com a distância R_0 entre a abertura e o ponto de observação na forma

$$r_n^2 = \left(R_0 + n \frac{\lambda}{2} \right)^2 - R_0^2 \quad (4.31)$$

ou seja:

$$r_n^2 = n\lambda R_0 + n^2 \frac{\lambda^2}{4} \quad (4.32)$$

Para valores não muito elevados de n , pode-se desprezar o segundo termo na Eq. (4.32), obtendo-se então o resultado:

$$r_n = \sqrt{n\lambda R_0} \quad (4.33)$$

Verifica-se da Eq. (4.33) que, para um dado ponto de observação no eixo da abertura, os raios das zonas de Fresnel são proporcionais à raiz quadrada de números inteiros.

Obstáculos circulares

No caso de se ter um obstáculo opaco com forma circular, e assumindo que ele bloqueia as primeiras l zonas de Fresnel, o campo num ponto P_0 do seu eixo será dado por:

$$E = |E_{l+1}| - |E_{l+2}| + \dots + |E_N| \quad (4.34)$$

Como se referiu antes, tem-se $E_N \approx 0$, porque $Q_N \rightarrow 0$. A soma (4.34) pode ser calculada como se fez na Secção 4.3.1, obtendo-se:

$$E \approx \frac{|E_{l+1}|}{2} \quad (4.35)$$

Ou seja, verifica-se a existência de uma mancha brilhante no eixo do obstáculo, o que constitui um resultado de todo imprevisto pela óptica geométrica. A mancha em causa é conhecida por *mancha de Poisson*, precisamente em homenagem ao cientista francês que considerava ridícula a hipótese da sua existência. A intensidade dessa mancha é apenas ligeiramente inferior à da onda não obstruída.

4.3.3. Placas zonadas

A análise feita nas secções anteriores mostrou que as contribuições das zonas de Fresnel adjacentes tendem a anular-seumas às outras. Este facto sugere que a intensidade no ponto de observação pode ser significativamente aumentada, bloqueando alternadamente as zonas de Fresnel. Por exemplo, se se bloquear as dez primeiras zonas pares, deixando passar apenas as primeiras dez zonas ímpares, tem-se que o campo no ponto de observação será $E \approx 10E_1$. Tendo em consideração que o campo nesse mesmo ponto devido à onda não obstruída é igual a $E_1/2$, verifica-se que esta técnica permitirá, neste caso, aumentar a intensidade no ponto de observação 400 vezes! Um dispositivo construído com este objectivo, apresentando anéis alternadamente opacos e transparentes, designa-se por *placa zonada*.

Considerando a geometria da Fig. 4.6, mostra-se no problema PR 4.12 que o raio r_n da n-ésima zona de Fresnel se relaciona com as distâncias Z_f e Z na forma

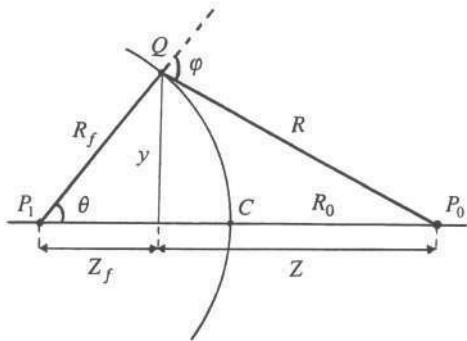


Figura 4.6 – Geometria para o desenho de uma placa zonada.

$$\frac{1}{Z_f} + \frac{1}{Z} = \frac{n\lambda}{r_n^2} \quad (4.36)$$

Verifica-se da Eq. (4.36) que, uma vez definidas as posições da fonte e do ponto de observação (Z_f e Z fixos), os raios, r_n , das zonas opacas usadas para bloquear a luz são proporcionais à raiz quadrada dos números inteiros, n . Na Fig. 12.3 encontra-se representada uma placa zonada com 14 zonas de Fresnel.

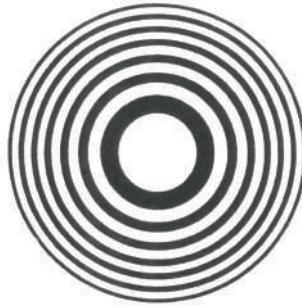


Figura 4.7 – Aspecto de uma placa zonada de Fresnel

O aspecto da Eq. (4.36) mostra que uma placa zonada deverá funcionar de modo semelhante a uma lente delgada, tendo uma distância focal dada por:

$$f = \frac{r_n^2}{n\lambda} \quad (4.37)$$

Apesar da semelhança apontada, existem algumas diferenças significativas entre uma placa zonada e uma lente convencional. De facto, deve ter-se presente que o funcionamento da placa zonada se baseia no fenómeno da difracção da luz, enquanto o funcionamento de uma lente convencional se baseia na lei da refracção. Pode notar-se da Eq. (4.37), por exemplo, que uma placa zonada se caracteriza por uma aberração cromática significativa.

À distância f dada pela Eq. (4.37), cada anel da placa zonada encontra-se preenchido exactamente por uma zona de Fresnel da frente de onda plana, tendo-se nesse ponto um máximo principal da distribuição da intensidade. A essa distância f chama-se *distância focal de primeira ordem* da placa zonada. De facto, contrastando com o que acontece com as lentes convencionais, no caso de uma placa zonada verifica-se a existência de outros pontos focais de ordem superior, a distâncias $f/3, f/5, f/7, \dots$ dessa placa. A distância $f/3$, por exemplo, corresponde à situação em que cada anel da placa zonada é preenchido por três zonas de Fresnel. Os campos devidos a duas destas zonas cancelam-se mutuamente, restando então a contribuição da terceira zona.

4.3.4. Difracção por uma abertura rectangular

Considere-se o esquema da Fig. 4.8, onde se assume que uma abertura rectangular situada no plano (x, y) é iluminada por uma onda esférica $\vec{E}_i = (E_0 / R_f) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{R}_f)$, originada numa fonte pontual situada em (x_f, y_f, Z_f) . Partindo da Eq. (4.7) e considerando o factor de obliquidade como uma constante, mostra-se no problema PR 4.15 que o campo no ponto de observação $P_0(x_p, y_p, Z)$ pode ser apresentado na forma:

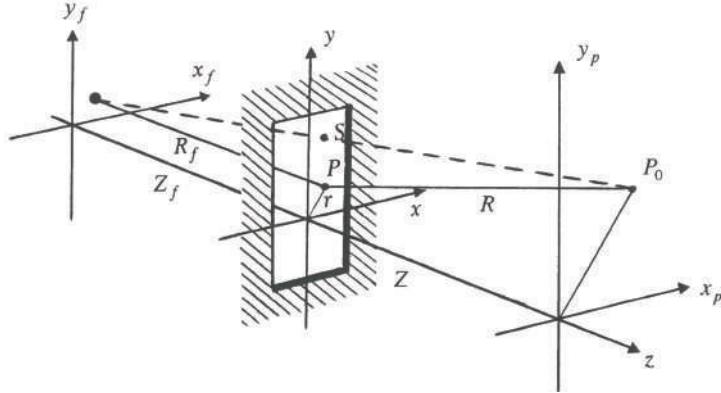


Figura 4.8 – Geometria para a análise da difracção de Fresnel por uma abertura rectangular.

$$E_P = \frac{i}{2} E_l [C(u) - iS(u)]_{u_1}^{u_2} [C(v) - iS(v)]_{v_1}^{v_2} \quad (4.38)$$

onde

$$C(w) = \int_0^{\omega} \cos \left[\frac{\pi s^2}{2} \right] ds \quad (4.39)$$

$$S(w) = \int_0^{\omega} \sin \left[\frac{\pi s^2}{2} \right] ds \quad (4.40)$$

são os chamados *integrais de Fresnel*,

$$u = (x - x_s) \sqrt{2D/\lambda Z Z_f}, \quad (4.41)$$

$$v = (y - y_s) \sqrt{2D/\lambda Z Z_f}, \quad (4.42)$$

$$x_s = (Z_f x_p + Z x_f) / D, \quad (4.43)$$

$$y_s = (Z_f y_p + Z y_f) / D \quad (4.44)$$

e $D = Z + Z_f$. Na Eq. (4.38),

$$E_l = (E_0 / d) e^{-ikd} \quad (4.45)$$

representa o campo que existiria no ponto de observação se não houvesse qualquer obstáculo, sendo d a distância entre a fonte e o ponto de observação. A intensidade no ponto de observação pode apresentar-se na forma:

$$I_P = \frac{I_l}{4} |\vec{V}_{12}(u)|^2 |\vec{V}_{12}(v)|^2 \quad (4.46)$$

onde $\vec{V}_{12} = [C(w) - iS(w)]_{w_1}^{w_2}$ e I_l é a intensidade correspondente à onda não obstruída no ponto de observação.

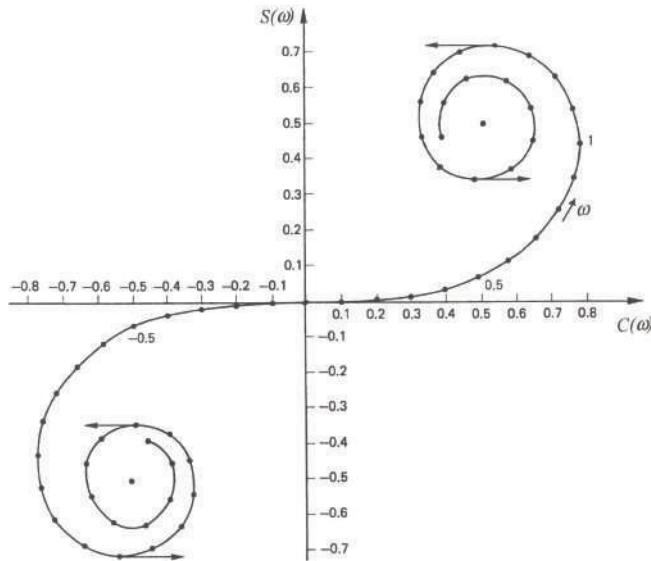


Figura 4.9 – Espiral de Cornu, obtida dispondo os valores de $C(w)$ em função de $S(w)$.

Na Fig. 4.9 representa-se o gráfico de $C(w)$ em função de $S(w)$. Este gráfico é conhecido por espiral de Cornu, em honra de Marie Alfred Cornu (1841-1902), que foi a primeira pessoa a usá-lo no cálculo dos integrais de Fresnel. É de notar que $C(w)$ e $S(w)$ são funções ímpares, tendo-se $C(-w) = -C(w)$ e $S(-w) = -S(w)$. Na prática, para se usar a espiral de Cornu, deve-se começar por marcar sobre esta curva as posições dos limites w_1 e w_2 da abertura. O resultado de cada um dos integrais na Eq. (4.38) é dado pelo comprimento do vector \vec{V}_{12} que une esses dois pontos,

No caso de não haver qualquer obstrução da frente de onda, tem-se, segundo a direcção do eixo dos x , que $u_1 = -\infty$ (correspondente ao ponto $(-0.5, -0.5)$) e $u_2 = \infty$ (correspondente ao ponto $(0.5, 0.5)$). O comprimento do vector que liga esses dois pontos é $\sqrt{2}$. Segundo a direcção do eixo dos y obtém-se um valor igual, pelo que a intensidade no ponto de observação, dada pela Eq. (4.46), é simplesmente $I_p = I_l$, como seria de esperar.

4.3.5. Difracção por uma fenda

Se em vez da abertura rectangular se tiver uma fenda longa, paralela ao eixo dos y , deverá considerar-se $y_1 \rightarrow -\infty$ e $y_2 \rightarrow \infty$, pelo que $v_1 \rightarrow -\infty$ e $v_2 \rightarrow \infty$. Considerando a espiral de Cornu, representada na Fig. 4.9, tem-se que o ponto correspondente a $v_1 \rightarrow -\infty$ tem coordenadas $(-0.5, -0.5)$, enquanto que o ponto correspondente a $v_2 \rightarrow \infty$ tem coordenadas $(0.5, 0.5)$. A distância entre esses dois pontos é $|\vec{V}_{12}(v)| = \sqrt{2}$, pelo que a intensidade, neste caso, é dada por:

$$\begin{aligned}
I_P &= \frac{I_l}{2} |\vec{V}_{12}(u)|^2 \\
&= \frac{I_l}{2} \left\{ [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

4.3.6. Difracção por um ecrã opaco semi-infinito

O padrão da distribuição da intensidade na difracção de Fresnel, determinada por um ecrã opaco semi-infinito, pode ser descrito a partir da situação da fenda considerada anteriormente. De facto, para se ter um ecrã na forma de um semiplano opaco, basta remover um dos semi-planos que definem essa fenda. Supondo que se remove o semiplano correspondente aos valores positivos de x , tem-se que $x_2 \rightarrow \infty$, pelo que $u_2 \rightarrow \infty$. Deste modo, ter-se-á $C(u_2), S(u_2) \rightarrow \frac{1}{2}$, pelo que a intensidade num ponto para além do semiplano será dada a partir da Eq. (4.47) por:

$$I_P = \frac{I_l}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(u_1) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(u_1) \right]^2 \right\} \tag{4.48}$$

Se o ponto de observação P_0 estiver ao nível do bordo do semiplano ($P_0 \equiv P_b$ na Fig. 4.10a), tem-se $u_1 = 0$ e $C(0) = S(0) = 0$, pelo que $I_p = 1/4$. À medida que o ponto P_0 mergulha na sombra geométrica do semiplano ($P_0 \equiv P_s$) o valor (positivo) de u_1 vai aumentando, o comprimento do vector $\vec{V}_{12}(u)$ vai diminuindo e a intensidade decresce monotonamente. Contudo, quando o ponto P_0 se desloca para fora da sombra geométrica ($P_0 \equiv P_l$) e à medida que se afasta do bordo do semiplano, verifica-se que o comprimento do vector $\vec{V}_{12}(u)$ começa por aumentar e adquire, posteriormente, um comportamento oscilatório amortecido em torno de $|\vec{V}_{12}(u)| = \sqrt{2}$, correspondente à evolução de u_1 ao longo da espiral centrada em $(-0.5, -0.5)$. A variação da intensidade com u_1 encontra-se representada na Fig. 4.10b.

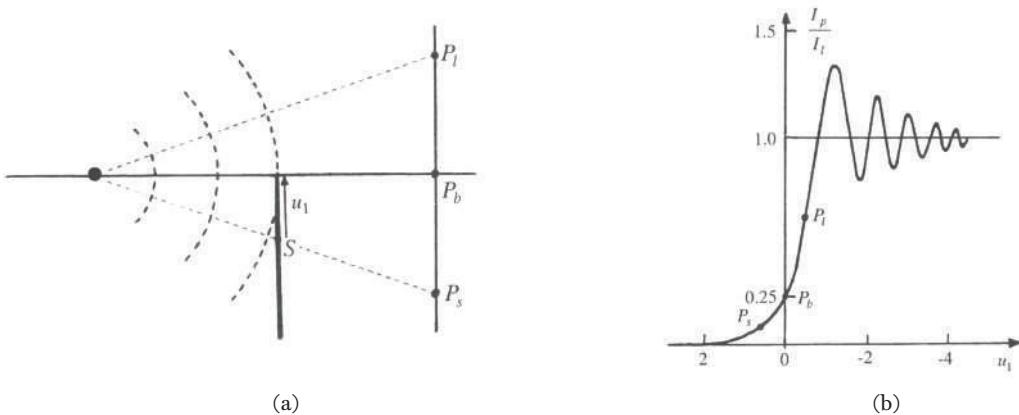


Figura 4.10 – a) Difracção de Fresnel determinada por um semiplano opaco e b) variação da respectiva intensidade.

4.4. Problemas resolvidos

PR 4.1. Considere uma abertura Σ situada no plano xy , iluminada por uma onda plana de amplitude E_i , que se propaga paralelamente ao eixo dos z . Partindo do integral de difracção, dado pela Eq. (4.7), desprezando a contribuição devida às ondas difractadas pela fronteira da abertura e usando o resultado previsto pela óptica geométrica para o campo no ponto de observação, mostre que o factor de obliquidade é dado pela Eq. (4.8).

Resolução

A figura 4.11 ilustra a abertura Σ . A área correspondente à fonte elementar de Huygens no P_1 é dada, em coordenadas polares, por $ds = r dr d\phi$. Atendendo a que $E(r) = E_i = \text{const.}$ para $z = 0$, tem-se que o integral de difracção, dado pela Eq. (4.7), que permite calcular o campo no ponto P_0 da Fig. 4.11, se pode escrever na forma:

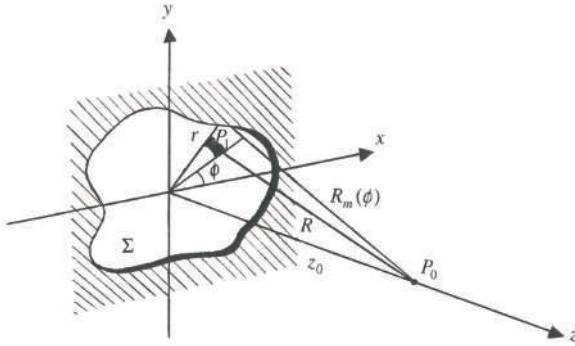


Figura 4.11 – Geometria para o cálculo da grandeza do factor de obliquidade.

$$E(z_0) = Q E_i \int_0^{2\pi} \int_0^{r_m(\phi)} \frac{e^{-ik\vec{R}}}{R} r dr d\phi \quad (1)$$

onde $r_m(\phi)$ é o valor máximo de r , correspondente à periferia da abertura. Considerando a geometria da Fig. 4.11 tem-se que $z_0^2 + r^2 = R^2$, pelo que a variável de integração r na Eq. (1) se pode escrever em termos de R usando a relação $r dr = R dR$. Os limites inferior e superior de integração são, respectivamente,

$$R = z_0 \quad (2a)$$

e

$$R = R_m(\phi) = \sqrt{z_0^2 + r_m^2(\phi)} \quad (2b)$$

pelo que a Eq. (1) fica:

$$E(z_0) = Q E_i \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{R_m(\phi)} e^{-ik\vec{R}} dR d\phi \quad (3)$$

Efectuando a integração sobre R , obtém-se:

$$E(z_0) = \frac{Q E_i}{ik} \left[e^{-ikz_0} \int_0^{2\pi} d\phi - \int_0^{2\pi} e^{-ikR_m(\phi)} d\phi \right] \quad (4)$$

A segunda contribuição na Eq. (4) corresponde à soma das ondas difractadas pela fronteira da abertura. Esta contribuição pode geralmente ser desprezada, dado que o produto $kR_m(\phi)$ varia de vários múltiplos de 2π quando se integra em torno da abertura. Deste modo, o resultado da Eq. (4) pode apresentar-se na forma:

$$E(z_0) = \frac{2\pi Q E}{ik} e^{-ikz_0} = -i\lambda Q E_i e^{-ikz_0} = -i\lambda Q E_{og} \quad (5)$$

onde

$$E_{og} = E_i e^{-ikz_0} \quad (6)$$

é o resultado previsto pela óptica geométrica para o campo no ponto P_0 , situado no eixo dos z , a uma distância z_0 da abertura. Para que a igualdade $E(z_0) = E_{og}$ se verifique, deve ter-se:

$$-i\lambda Q = 1 \quad (7)$$

Ou seja, tem-se

$$Q = \frac{i}{\lambda} \quad (8)$$

PR 4.2. Partindo do integral de difracção dado pela Eq. (4.7), mostre que as intensidades correspondentes à difracção por duas aberturas complementares são iguais (Teorema de Babinet).

Resolução

A fórmula de difracção, dada pela Eq. (4.7), exprime o campo $E(\vec{r}_0)$ na forma de um integral sobre a abertura Σ . Essa abertura pode ser considerada como a soma de duas partes complementares, Σ_1 e Σ_2 , tais que $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Deste modo, o campo no ponto de observação P_0 será dado, a partir da Eq. (4.7), pela soma dos integrais calculados sobre Σ_1 e sobre Σ_2 . O integral sobre Σ_1 dá o campo $E_1(\vec{r}_0)$, que existiria no ponto P_0 se a abertura se resumisse apenas a essa parte, enquanto o integral sobre Σ_2 dá o campo $E_2(\vec{r}_0)$, que haveria nesse mesmo ponto se existisse apenas esta parte da abertura. Deste modo, tem-se

$$E(\vec{r}_0) = E_1(\vec{r}_0) + E_2(\vec{r}_0) \quad (1)$$

Ou seja, o campo correspondente à abertura total obtém-se somando os campos correspondentes às duas aberturas complementares.

A Eq. (1) é particularmente útil quando o cálculo do campo difractado por uma dessas aberturas, por exemplo Σ_1 , é relativamente complicado, podendo ser substituído pela diferença entre os campos correspondentes à abertura total, Σ , e à abertura complementar, Σ_2 .

Uma situação de especial interesse acontece quando o campo no ponto P_0 correspondente à abertura Σ é zero ou desprezável. Neste caso, a Eq. (1) dá

$$E_1(\vec{r}_0) = -E_2(\vec{r}_0) \quad (2)$$

Como a intensidade é proporcional ao quadrado do módulo do campo, tem-se que as intensidades correspondentes às duas aberturas complementares são iguais.

PR 4.3. Considere a geometria da Fig. 4.2 e assuma as condições $|R_0 - R| < R_0$ e $x^2 + y^2 < 2\lambda R_0$, sendo R a distância entre os pontos $P(x, y)$ e $P_0(x_p, y_p)$, enquanto R_0 é a distância entre o centro da abertura, de coordenadas $(0,0)$ e o mesmo ponto $P_0(x_p, y_p)$. Partindo do integral de difracção, dado pela Eq. (4.7), mostre que o campo no ponto de observação $P_0(x_p, y_p)$ é dado pelas Eq.s (4.9) e (4.10).

Resolução

Considerando a geometria da Fig. 4.2, tem-se que a distância entre o ponto P na abertura e o ponto de observação P_0 é dada por:

$$R^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + z^2 \quad (1)$$

Por outro lado, a distância R_0 entre o centro da abertura e o ponto de observação P_0 é:

$$R_0^2 = x_p^2 + y_p^2 + z^2 \quad (2)$$

A partir das Eq.s (1) e (2), tem-se:

$$\begin{aligned} R_0 - R &= \frac{R_0^2 - R^2}{R_0 + R} = \left(\frac{xx_p + yy_p}{R_0} - \frac{x^2 + y^2}{2R_0} \right) \left(\frac{1}{1 - (R_0 - R)/2R_0} \right) \\ &\approx \left(\frac{xx_p + yy_p}{R_0} - \frac{x^2 + y^2}{2R_0} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Na obtenção do resultado final na Eq. (3) considerou-se a situação

$$|R_0 - R| \ll R_0, \quad (4)$$

Usando a Eq. (3), o integral de difracção dado pela Eq. (4.7) fica:

$$E_P = A \iint_{\Sigma} \exp \left[ik \left(\frac{xx_p + yy_p}{R_0} - \frac{x^2 + y^2}{2R_0} \right) \right] dx dy \quad (5)$$

onde

$$A = \frac{QE_i}{R_0} e^{-ik \cdot \vec{R}_0} \quad (6)$$

Na obtenção da Eq. (5) R foi substituído por R_0 no denominador da Eq. (4.7).

Quando o ponto de observação P_0 está suficientemente afastado da abertura, tem-se:

$$\frac{x^2 + y^2}{2\lambda R_0} \ll 1 \quad (7)$$

podendo-se então desprezar o segundo termo na exponencial da Eq. (5) e obter o resultado

$$E_P = A \iint_{\Sigma} \exp \left[ik \left(\frac{xx_p + yy_p}{R_0} \right) \right] dx dy \quad (8)$$

PR 4.4

a) Caracterize o padrão de difracção devido a uma abertura rectangular, cuja função de transmissão é dada pela Eq. (4.12).

b) Partindo do resultado obtido na alínea anterior, obtenha a expressão dada na Eq. (4.13) para a distribuição de intensidade correspondente a uma fenda de largura a .

Resolução

a) Introduzindo a Eq. (4.12) na Eq. (4.11) tem-se:

$$\begin{aligned} E_p &= A \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik_x x} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{ik_y y} dy \\ &= SA \frac{\sin \alpha_x}{\alpha_x} \frac{\sin \alpha_y}{\alpha_y} \end{aligned} \quad (1)$$

onde

$$\alpha_x = \frac{k_x a}{2} = \frac{k a x_p}{2 R_0}, \quad (2)$$

$$\alpha_y = \frac{k_y b}{2} = \frac{k b y_p}{2 R_0} \quad (3)$$

e $S = ab$ é a área da abertura.

A função

$$\frac{\sin(w)}{w} \equiv \text{senc}(w) \quad (4)$$

encontra-se representada Fig. 4.3. Os zeros da função $\text{senc}(w)$ ocorrem para

$$w = m\pi \quad (5)$$

sendo m um número inteiro diferente de zero. Por outro lado, usando a regra de L'Hopital, tem-se

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(w)}{w} \right) = \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(w)}{1} \right) = 1 \quad (6)$$

que corresponde ao máximo central da função $\text{senc}(w)$. A localização dos outros extremos desta função é dada pela condição

$$\frac{d(\text{senc}(w))}{dw} = 0 \quad (7)$$

que dá,

$$\tan(w) = w \quad (8)$$

As soluções desta equação transcendente podem ser determinados gráfica ou numericamente, obtendo-se
 $w = \pm 1.4303\pi, \pm 2.4590\pi, \pm 3.4707\pi \dots$

A distribuição da intensidade no padrão de difracção de Fraunhofer produzido pela abertura rectangular é dada por:

$$I_p = I_0 \operatorname{senc}^2 \alpha_x \operatorname{senc}^2 \alpha_y \quad (9)$$

onde

$$I_0 = (S|A|)^2 \quad (10)$$

representa o máximo da intensidade, que ocorre para $\alpha_x = \alpha_y = 0$. Os mínimos da intensidade ocorrem para $\alpha_x = n\pi$ ou para $\alpha_y = m\pi$, sendo n e m números inteiros. Pode-se verificar que as dimensões do padrão de difracção, dadas pelas coordenadas x_p e y_p do plano de observação correspondentes a $m = n = 1$, são inversamente proporcionais às dimensões da abertura.

b) A fenda simples pode ser considerado como um caso particular da difracção por uma abertura rectangular, considerada antes. Suponhamos que a fenda, com uma largura a , é paralela ao eixo dos y e bastante longa, de modo a ter-se $b \gg \lambda$. Neste caso, o factor $\operatorname{senc}^2 \alpha_y$ na Eq. (9) decresce rapidamente para $y_p \neq 0$, pelo que a luz difractada pela fenda se espalha predominantemente no plano xz . Considerando que $\operatorname{senc}^2 \alpha_y \rightarrow 1$ quando $y_p \rightarrow 0$, a distribuição de irradiância dada na Eq. (9) reduz-se então à forma

$$I = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha^2} \quad (11)$$

onde

$$\alpha = \frac{ka}{2} \operatorname{sen} \theta, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{x_p}{R_0} \quad (12)$$

sendo θ o ângulo medido relativamente ao plano yz .

PR 4.5. Uma fenda simples é iluminada por luz com comprimento de onda $\lambda = 650$ nm e produz um padrão de difracção de Fraunhofer em que os mínimos de primeira ordem se situam numa direcção que faz um ângulo $\theta = 5^\circ$ com a normal ao plano da fenda. Determine a largura da fenda.

Resolução

Das Eq.s (11) e (12) do problema PR 4.4, tem-se que os mínimos de intensidade no padrão de difracção ocorrem para

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \theta = m\pi, \quad m \text{ inteiro} \quad (1)$$

onde a é a largura da fenda. Considerando $m = 1$ e substituindo os valores indicados, tem-se

$$a = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{6.5 \times 10^{-7}}{\operatorname{sen}(5^\circ)} = 7.45 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (2)$$

PR 4.6. Demonstre o teorema matricial, dado pela Eq. (4.16).

Resolução

Considere-se um conjunto de N aberturas idênticas, sendo $f(x)$ a função de transmissão de uma dessas aberturas situada na origem do plano. A função de transmissão de uma abertura centrada no ponto x_n pode exprimir-se em termos da função de transmissão $f(x)$ segundo a relação:

$$f(x - x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x_n - x') dx' \quad (1)$$

onde δ representa a função delta de Dirac. O integral da Eq. (1) pode ser entendido como a convolução da função $f(x)$ com a função $\delta(x - x_n)$. A função de transmissão correspondente ao conjunto de todas as aberturas é dada por:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^N f(x - x_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x_n - x') dx' \end{aligned} \quad (2)$$

O padrão de difracção de Fraunhofer, correspondente ao conjunto das aberturas, é dado pela transformada de Fourier de $g(x)$:

$$G(k_x) = F\{g(x)\} \quad (3)$$

Considerando a função $g(x)$ dada pela Eq. (2) e utilizando o teorema da convolução, obtém-se:

$$\begin{aligned} G(k_x) &= \sum_{n=1}^N F\{f(x)\} F\{\delta(x - x_n)\} \\ &= F\{f(x)\} F\left\{ \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

A duas dimensões, este resultado assume a forma:

$$G(k_x, k_y) = F\{g(x, y)\} = F\{f(x, y)\} F\left\{ \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \delta(y - y_n) \right\} \quad (5)$$

onde

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^N f(x - x_n, y - y_n) \quad (6)$$

PR 4.7

- a) Obtenha a dispersão angular do espectro de primeira ordem para a luz branca que incide normalmente numa rede de transmissão que apresenta 1000 estrias por centímetro.
- b) Calcule a dispersão angular para uma pequena banda de comprimentos de onda, dada por $D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$, para a primeira ordem de dispersão pela mesma rede, funcionando no visível.

Resolução

a) Considerando a Eq. (4.20), tem-se que os máximos principais na distribuição da intensidade ocorrem quando

$$\frac{\operatorname{sen}N\beta}{\operatorname{sen}\beta} = N \quad (1)$$

onde

$$\beta = \frac{kd}{2} \operatorname{sen}\theta \quad (2)$$

A condição (1) verifica-se quando $\beta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ ou seja, quando

$$d \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda. \quad (3)$$

No caso do problema, considera-se $m = 1$ e

$$d = \frac{10^{-2}}{1000} = 1 \times 10^{-5} \text{ m} \quad (4)$$

A luz branca estende-se numa banda de comprimentos de onda compreendida entre $\lambda_1 = 390 \text{ nm}$ e $\lambda_2 = 780 \text{ nm}$, pelo que se tem:

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{390 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-5}} = 0.039 \quad (5)$$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{780 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-5}} = 0.078 \quad (6)$$

Ou seja, tem-se $\theta_1 = 2^\circ 14'$, $\theta_2 = 4^\circ 28'$ e

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2^\circ 14'. \quad (7)$$

b) Neste caso, diferenciando a Eq. (3), obtém-se

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos\theta_m} \quad (8)$$

Considerando $\lambda \approx 500 \text{ nm}$, tem-se $d \gg \lambda$, pelo que a Eq. (3) permite concluir que $\cos\theta_m \approx 1$ para $m = 1$. Deste modo, a dispersão angular é $D \approx 1 \times 10^5 \text{ rad/m}$.

PR 4.8. O padrão de difração de Fraunhofer de uma fenda dupla iluminada com luz de comprimento de onda $\lambda = 500 \text{ nm}$, aparece no plano focal posterior de uma lente com uma distância focal $f = 120 \text{ cm}$. O espaçamento entre franjas brilhantes consecutivas é 1 mm e o terceiro máximo está ausente. Determine a largura de cada fenda e a distância entre elas. Faça uma representação gráfica da distribuição de intensidade.

Resolução

O espaçamento entre franjas na experiência de Young é dado por $\Delta y = D\lambda / d$, tendo-se que, neste caso, $D = f = 120 \text{ cm}$. Assim, o espaçamento entre as fendas é:

$$d = \frac{D\lambda}{\Delta y} = \frac{(120 \times 10^{-2})(500 \times 10^{-9})}{1 \times 10^{-3}} = 0.6 \text{ mm} \quad (1)$$

Os máximos de interferência ocorrem quando:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m \text{ inteiro} \quad (2)$$

Por outro lado, os mínimos no padrão de difracção, produzido por uma fenda simples, ocorrem quando

$$a \sin \theta = n\lambda, \quad n \text{ inteiro} \quad (3)$$

Quando ambas as condições são satisfeitas em simultâneo, nenhuma luz atinge o plano de observação, não se observando então as franjas de interferência que seriam esperadas nessas posições. Tem-se então:

$$\frac{d}{a} = \frac{m}{n} = M \quad (4)$$

No caso em consideração, $m = 3$ e $n = 1$, pelo que $M = m/n = 3$. Assim, a largura da fenda é

$$a = \frac{d}{3} = 0.2 \text{ mm.} \quad (5)$$

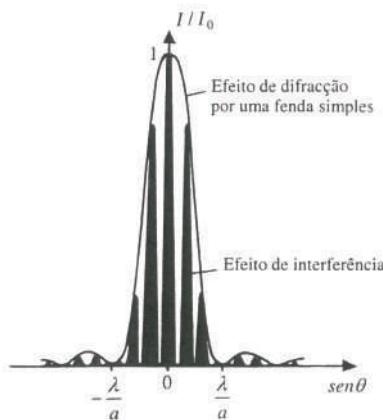


Figura 4.12 – Distribuição da intensidade na difracção por duas fendas iguais, para o caso $d = 3a$.

A Fig. 4.12 ilustra a distribuição da intensidade correspondente à difracção pelas duas fendas quando $d = 3a$. Neste caso, verifica-se que as franjas de interferência de ordem $m = 3, 6, 9, \dots$ estão ausentes.

PR 4.9. Determine o raio do disco central, formado na retina do olho, na imagem de um objecto pontual distante. Considere que a pupila do olho tem um raio $a = 1 \text{ mm}$, que a sua distância à retina é de $d = 2 \text{ cm}$ e que a luz tem um comprimento de onda $\lambda = 600 \text{ nm}$.

Resolução

A pupila do olho funciona como uma abertura circular, formando-se um padrão de difracção de Airy na retina. A partir da Eq. (4.24) tem-se que o raio do disco central desse padrão é dado por:

$$r_{01} = 1.2 \frac{R_0 \lambda}{2a}$$

$$\approx 1.2 \frac{(2 \times 10^{-2})(6 \times 10^{-7})}{2(1 \times 10^{-3})} = 7.32 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (1)$$

PR 4.10. Considerando a geometria da Fig. 4.5, obtenha o resultado dado pela Eq. (4.25) para o campo no ponto de observação correspondente à zona de Fresnel de ordem j :

Resolução

Cada zona de Fresnel na Fig. 4.5 pode ser encarada como uma abertura iluminada do lado esquerdo por uma onda esférica proveniente do ponto P_1 , da forma:

$$E_i(\vec{R}_f) = \frac{E_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_f}}{R_f} \quad (1)$$

Considere-se um anel elementar com raio $R_f \sin \theta$ e largura $R_f d\theta$ dentro de uma dada zona de Fresnel. Usando o princípio de Huygens e introduzindo o factor de inclinação Q , o campo no ponto P_0 devido a esse anel elementar é dado por

$$dE(P_0) = E_i(\vec{R}_f) Q \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{R} dS \quad (2)$$

onde dS é a área do anel elementar, dada por

$$dS = 2\pi R_f^2 \sin \theta d\theta \quad (3)$$

Considerando a geometria da Fig. 4.5 e aplicando a lei dos co-senos, tem-se:

$$R^2 = R_f^2 + (R_f + R_0)^2 - 2R_f(R_f + R_0)\cos\theta \quad (4)$$

Diferenciando esta expressão obtém-se:

$$2RdR = 2R_f(R_f + R_0)\sin\theta d\theta \quad (5)$$

A Eq. (5) pode ser substituída na Eq. (3), obtendo-se:

$$dS = 2\pi \frac{R_f}{R_f + R_0} R dR \quad (6)$$

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (2), tem-se que campo no ponto P_0 devido à zona de Fresnel de ordem j pode ser escrito na forma:

$$E_j(P_0) = 2\pi E_i(\vec{R}_f) Q_j \frac{R_f}{R_f + R_0} \int_{R_{j-1}}^{R_j} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} dR \quad (7)$$

onde $R_j = R_0 + j\lambda/2$ e $R_{j-1} = R_0 + (j-1)\lambda/2$. Ao escrever a Eq. (7) considerou-se que o factor de obliquidade é aproximadamente constante sobre a zona de Fresnel em causa, ou seja, $Q(\varphi) = Q_j$. O cálculo do integral na Eq. (7) permite obter o resultado:

$$E_j(P_0) = 2i(-1)^j \frac{Q_j E_0 \lambda}{R_f + R_0} e^{-ik(R_f + R_0)} \quad (8)$$

PR 4.11. Ondas planas com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm incidem perpendicularmente num ecrã opaco que possui uma abertura circular de raio $a = 1.0$ mm. Determine as distâncias axiais relativamente ao ecrã correspondentes aos dois pontos mais afastados com máximos de intensidade.

Resolução

O raio da n -ésima zona de Fresnel, r_n , relaciona-se com a distância R_0 entre a abertura e o ponto de observação na forma

$$r_n = \sqrt{n\lambda R_0} \quad (1)$$

Fazendo $r_n = a$, tem-se que o ponto mais distante com intensidade máxima corresponde a $n = 1$, situação em que a abertura é completamente preenchida apenas por uma zona de Fresnel. A distância desse ponto ao ecrã é dada por

$$R_{01} = \frac{a^2}{\lambda} = \frac{(1 \times 10^{-3})^2}{5 \times 10^{-7}} = 2 \text{ m} \quad (2)$$

O ponto seguinte com intensidade máxima corresponde a $n = 3$, situação em que a abertura é inteiramente preenchida por três zonas de Fresnel. A distância desse ponto ao ecrã é dada por:

$$R_{03} = \frac{a^2}{3\lambda} = \frac{(1 \times 10^{-3})^2}{3(5 \times 10^{-7})} = 0.67 \text{ m} \quad (3)$$

PR 4.12. Considerando a geometria da Fig. 4.6 e assumindo a aproximação paraxial, obtenha o resultado dado na Eq. (4.36) para a relação entre o raio da zona de Fresnel de ordem n , r_n , e as distâncias, Z e Z_f .

Resolução

Considerando a geometria da Fig. 4.6, tem-se que o raio y de uma zona arbitrária é dado por:

$$R_f^2 - Z_f^2 = R^2 - Z^2 = y^2 \quad (1)$$

A partir da Eq. (1), e supondo que o ângulo θ na Fig. 4.6 é suficientemente pequeno, pode-se escrever:

$$R_f - Z_f = \frac{y^2}{R_f + Z_f} \approx \frac{y^2}{2Z_f} \quad (2)$$

$$R - Z = \frac{y^2}{R + Z} \approx \frac{y^2}{2Z} \quad (3)$$

Quando $y = r_n$, que corresponde ao raio da zona de Fresnel de ordem n , a diferença de percursos entre o raio que vai de P_1 a Q e depois a P_0 e o raio que vai de P_1 a P_0 ao longo do eixo, é dada por:

$$(R_f + R) - (Z_f + Z) = \frac{n\lambda}{2} \quad (4)$$

Substituindo as Eq.s (2) e (3) na Eq. (4) e fazendo $y = r_n$ obtém-se:

$$\frac{1}{Z_f} + \frac{1}{Z} = \frac{n\lambda}{r_n^2} \quad (5)$$

PR 4.13. Um feixe colimado de luz com comprimento de onda λ incide perpendicularmente numa placa zonada, verificando-se o aparecimento de um máximo de intensidade sobre o eixo, 1 m atrás da placa. Determine o ponto onde será focada a luz com o mesmo comprimento de onda, no caso de ela divergir de um ponto situado 1.5 m à frente dessa placa.

Resolução

Da Eq. (4.36) tem-se:

$$\frac{1}{Z_f} + \frac{1}{Z} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

onde

$$\frac{1}{f} = \frac{n\lambda}{r_n^2} \quad (2)$$

No caso de o feixe incidente ser colimado, tem-se $Z_f = \infty$, pelo que $Z = f = 1$ m. Por outro lado, quando $Z_f = 1.5$ m, tem-se:

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{Z} = \frac{1}{1} \quad (3)$$

Ou seja, a luz é focada a uma distância $Z = 3$ m da placa zonada.

PR 4.14. Uma placa zonada de Fresnel é constituída por cinco zonas. A primeira zona consiste num disco circular de raio r_1 . A segunda é um anel concêntrico e transparente situado entre r_1 e r_2 , seguindo-se um anel opaco entre r_2 e r_3 , outro anel transparente entre r_3 e r_4 e, finalmente, uma zona opaca entre r_4 e o infinito. Os valores destes raios estão na razão das raízes quadradas dos respectivos índices. Quando a placa zonada é iluminada por ondas planas monocromáticas com comprimento de onda 500 nm, verifica-se a existência de uma mancha brilhante mais intensa no eixo da placa zonada 1 metro atrás dela.

- a) Qual é o valor do raio r_1 ?
- b) Indique a intensidade dessa mancha em termos da intensidade da onda incidente.
- c) Indique as posições dos máximos de intensidade ao longo do eixo.

Resolução

a) O raio da n -ésima zona, r_n , relaciona-se com a distância R_0 entre a abertura e o ponto de observação na forma dada pela Eq. (4.33). A distância R_0 para a qual de observa a mancha brilhante mais intensa corresponde à situação em que cada anel da placa zonada corresponde a uma única zona de Fresnel. Neste caso, o valor de r_1 é dado pela Eq. (4.33) considerando $R_0 = 1$ m, $\lambda = 500$ nm e $n = 1$, obtendo-se

$$r_1 \approx 7 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (1)$$

b) Tendo em consideração a resposta na alínea anterior, tem-se que o campo no ponto de observação situado no eixo 1 m atrás da placa é

$$E = E_1 + E_3 \approx 2E_1. \quad (2)$$

Por outro lado, o campo que existiria nesse mesmo ponto devido à onda incidente (não obstruída), seria

$$E_\infty \approx E_1 / 2 \quad (3)$$

Ou seja, tem-se $E \approx 4E_\infty$. Como a intensidade é proporcional ao quadrado do módulo do campo, a intensidade da mancha relaciona-se com a intensidade da onda incidente, I_∞ , na forma:

$$I \approx 16I_\infty. \quad (4)$$

c) A distância $R_\infty = 1$ m corresponde à distância focal de primeira ordem, f_1 . As posições dos outros máximos de intensidade ao longo do eixo correspondem às distâncias focais de ordem superior:

$$f_n = \frac{f_1}{n} = \frac{1}{n} \text{ m}, \quad n = 3, 5, 7\dots \quad (5)$$

Nestes casos, cada um dos anéis da placa zonada contém um número ímpar de zonas de Fresnel.

PR 4.15. Partindo do integral de difracção dado pela Eq. (4.7) e tendo por base a geometria da Fig. 4.8, demonstre o resultado dado ela Eq (4.46) para a distribuição de intensidade devida à difracção de Fresnel por uma abertura rectangular.

Resolução

Considere-se a Fig. 4.8, onde se assume que uma abertura rectangular situada no plano (x, y) é iluminada por uma onda esférica $\vec{E}_i = (E_0 / R_f) \exp(-ik \cdot \vec{R}_f)$, originada numa fonte pontual situada em (x_f, y_f, Z_f) .

Considerando o factor de obliquidade como uma constante, pode-se calcular o campo no ponto de observação P_0 com base na Eq. (4.7), que assume o aspecto:

$$E_P = Q E_0 \iint_{\Sigma} \frac{e^{-ik \cdot (\vec{R} + \vec{R}_f)}}{RR_f} dx dy \quad (1)$$

A geometria da Fig. 4.8 permite escrever as seguintes expressões para as distâncias R e R_f :

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + Z^2} \\ &\approx Z + \frac{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}{2Z} \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} R_f &= \sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 + Z_f^2} \\ &\approx Z_f + \frac{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2}{2Z_f} \end{aligned} \quad (2b)$$

No denominador da Eq. (1) pode-se aproximar R e R_f por Z e Z_f , respectivamente, dado que as amplitudes das ondas esféricas não variam significativamente sobre a área de integração. Contudo, no expoente dessa equação deve-se considerar as aproximações dadas pela Eq. (2).

Introduzindo os parâmetros x_s e y_s definidos nas Eq.s (4.43) e (4.44), respectivamente, pode-se reescrever a Eq. (1) na forma:

$$E_p = Q E_0 \frac{e^{-ikd}}{Z_f} \iint_{\Sigma} \exp \left\{ -\frac{ik}{2} \frac{D}{Z_f} [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2] \right\} dx dy \quad (3)$$

onde $D = Z + Z_f$ é a distância entre os planos da fonte pontual e do ponto de observação e

$$d \approx D + \frac{(x_p - x_f)^2 + (y_p - y_f)^2}{2D} \quad (4)$$

é a distância entre a fonte e o ponto de observação.

Usando as novas variáveis u e v , dadas pelas Eq.s (4.41) e (4.42), pode-se escrever a Eq. (3) na forma

$$E_P = \frac{i E_0}{2D} e^{-ikd} \int_{u_1}^{u_2} e^{-i\pi u^2/2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{-i\pi v^2/2} dv \quad (5)$$

onde se usou a Eq. (4.8). Cada um dos integrais na Eq. (5) pode ser calculado com base nos chamados *integrais de Fresnel*, $C(w)$ e $S(w)$, dados pelas Eq.s (4.39) e (4.40). De facto, tem-se:

$$\int_0^w e^{-i\pi s^2/2} ds = C(w) - iS(w) \quad (6)$$

Os integrais de Fresnel foram calculados exaustivamente e os seus valores encontram-se devidamente tabelados. O uso dessas tabelas permite calcular facilmente o campo dado pela Eq. (5), o qual se pode apresentar na forma:

$$E_P = \frac{i}{2} E_l [C(u) - iS(u)]_{u_1}^{u_2} [C(v) - iS(v)]_{v_1}^{v_2} \quad (7)$$

Na Eq. (7), E_l representa o campo que existiria no ponto de observação se não houvesse qualquer obstáculo, dado pela Eq. (4.45).

A intensidade no ponto de observação é dada então por:

$$I_P = \frac{I_l}{4} \{ [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \} \{ [C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2 \} \quad (8)$$

em que I_l é a intensidade correspondente à onda não obstruída no ponto de observação. O resultado anterior pode apresentar-se na forma

$$I_P = \frac{I_l}{4} |\vec{V}_{12}(u)|^2 |\vec{V}_{12}(v)|^2 \quad (9)$$

onde

$$\vec{V}_{12} = [C(w) - iS(w)]_{w_1}^{w_2} \quad (10)$$

é o vector que une os pontos w_1 e w_2 na espiral de Cornu.

PR 4.16. Considere um ecrã opaco semi-infinito disposto verticalmente, de tal modo que o seu limite superior é horizontal. Esse ecrã é iluminado por um feixe colimado de luz que incide normalmente e que apresenta um comprimento de onda de $\lambda = 500$ nm. Determine a intensidade num ponto situado 4 m atrás do ecrã e 2 mm abaixo do nível do seu bordo.

Resolução

Dado que o feixe é colimado, as frentes de onda da luz incidente podem considerar-se planas. Neste caso, tem-se $Z_f = \infty$, pelo que $D = Z_f$ e:

$$u = (x - x_s) \sqrt{\frac{2}{\lambda Z}} \quad (1)$$

Introduzindo os dados do problema, tem-se:

$$u_1 = (x_1 - x_s) \sqrt{\frac{2}{\lambda Z}} = 2 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{2}{(500 \times 10^{-9})(4)}} = 2 \quad (2)$$

Recorrendo a uma tabela dos integrais de Fresnel, tira-se que $C(2) = 0.4882$ e $S(2) = 0.3434$. Deste modo, tendo por base a Eq. (4.48), a intensidade no ponto em causa é dada por

$$I_P = \frac{I_l}{2} \left\{ [0.5 - 0.4882]^2 + [0.5 - 0.3434]^2 \right\} = 0.012 I_l \quad (3)$$

sendo I_l é a intensidade correspondente à onda não obstruída no ponto de observação.

4.5. Problemas propostos

PP 4.1. Um feixe de luz monocromática com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm incide numa fenda simples, sendo o respectivo padrão de difracção observado num ecrã que se encontra à distância de 1 m da fenda. Sabendo que espaçamento entre o primeiro e o terceiro mínimos do padrão de difracção é de 4 mm, determine a largura da fenda.

PP 4.2. Um feixe de luz monocromática com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm incide numa fenda estreita e longa, situada à frente de uma lente delgada convergente de distância focal $f = 80$ cm. Sabendo que os primeiros mínimos (adjacentes à mancha central) do padrão de difracção de Fraunhofer estão espaçados de 6 mm, calcule a largura da fenda.

PP 4.3. Mostre que, na difracção de Fraunhofer, os padrões de intensidade produzidos por dois ecrãs complementares, sendo que um deles é opaco e contém um fenda estreita de largura a , são idênticos, excepto perto do centro. Este problema ilustra um caso particular do Teorema de Babinet.

PP 4.4. Tem-se uma abertura quadrada de lado $2L$, centrada no ponto de coordenadas $(a, b, 0)$ e cujos lados são paralelos aos eixos dos x e y . Essa abertura é iluminada por ondas planas monocromáticas, cuja direcção de propagação, situada no plano xz , faz um ângulo θ com o eixo dos z . Determine, na aproximação de Fraunhofer, a distribuição de intensidade no plano de observação. Compare o resultado obtido com o que se obtém no caso $a = b = 0$ e $\theta = 0$.

PP 4.5. a) Determine a distribuição de intensidade correspondente à difracção de Fraunhofer produzida por duas fendas paralelas, uma de largura a e outra de largura b , espaçadas de h .

b) Use o resultado obtido em na alínea a) para descrever o padrão de difracção no caso $a = b$.

PP 4.6. Duas fendas paralelas e iguais têm uma largura de 0.5 mm e os respectivos centros estão espaçados 2.5 mm. Quais os máximos de interferência que estarão ausentes do padrão de difracção de Fraunhofer?

PP 4.7. Considere um feixe de luz monocromática com comprimento de onda λ que incide numa fenda simples de largura $a = 7\lambda$.

a) Escreva a expressão para a distribuição da intensidade numa região bastante afastada da fenda e faça a respectiva representação gráfica. Calcule as posições do primeiro mínimo e do primeiro máximo secundário.

b) Considere a fenda dividida em duas partes iguais, cada uma com largura $a/2$. Deseja-se alterar de 180° a fase da luz que passa por uma dessas partes. Diga como poderá ser concretizado esse propósito.

c) Obtenha uma expressão que descreva a distribuição de intensidade para a situação da alínea b) numa região bastante afastada da fenda. Calcule as posições dos dois primeiros mínimos e do primeiro máximo neste caso.

PP 4.8. Calcule a separação angular entre as linhas D do sódio ($\lambda = 589.592 \text{ nm}$ e $\lambda = 588.995 \text{ nm}$) no espectro de primeira ordem determinado por uma rede de transmissão com 5000 linhas por centímetro e para uma incidência normal.

PP 4.9. Um feixe colimado de luz monocromática, com comprimento de onda $\lambda = 500 \text{ nm}$, incide numa lente convergente que apresenta um diâmetro de 1.5 cm e uma distância focal $f = 60 \text{ cm}$. Obtenha o diâmetro angular do disco central no padrão de difracção formado no plano focal da lente.

PP 4.10. Considere um ecrã opaco contendo um orifício com 2 mm de diâmetro, que é iluminado normalmente por ondas planas com comprimento de onda $\lambda = 600 \text{ nm}$. Indique as posições mais afastadas sobre o eixo do orifício em que será possível observar dois mínimos de intensidade. Justifique a existência desses mínimos.

PP 4.11. Um feixe colimado de luz de comprimento de onda $\lambda = 500 \text{ nm}$ incide num ecrã opaco que apresenta uma abertura circular com raio, r , ajustável. Um metro atrás e no eixo da abertura encontra-se um detector com uma área sensora bastante pequena. Verifica-se que a intensidade detectada oscila quando o raio da abertura aumenta desde 0 até ∞ .

a) Indique o raio da abertura para o qual se observa o primeiro máximo de irradiação.

b) Indique o valor desse raio correspondente ao primeiro mínimo.

c) Indique a razão entre as intensidades na situação a) e quando $r = r_\infty$.

d) Suponha que o ecrã é substituído por um disco opaco de raio igual ao encontrado em a). Qual a intensidade detectada neste caso?

PP 4.12. Um ecrã opaco apresenta uma abertura com a forma indicada na Fig. 4.13, tendo-se $\overline{BD} = 2 \text{ mm}$, $\overline{BE} = 2.41 \text{ mm}$ e $\overline{AE} = 3.14 \text{ mm}$. Considerando a incidência normal nessa abertura de ondas planas de comprimento de onda 500 nm, determine a amplitude da luz num ponto do eixo a uma distância de 2 m do ecrã, em termos da amplitude que lá existiria se a onda inicial não fosse obstruída.

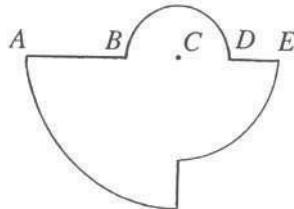


Figura 4.13 – Geometria de uma abertura

PP 4.13. a) Mostre que a área de uma zona de Fresnel é dada por:

$$A = \frac{R_f}{R_f + R_0} \pi R_0 \lambda$$

sendo R_f o raio da frente de onda esférica primária e R_0 a distância desde essa frente de onda até ao ponto de observação

b) Obtenha uma expressão para o número de zonas de Fresnel compreendidas numa abertura circular de raio a , centrada na linha que passa pela fonte pontual da onda primária e pelo ponto de observação. Mostre que essa expressão se pode apresentar com um aspecto semelhante ao da equação de uma lente convencional:

$$\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_0} = \frac{1}{f}$$

e obtenha uma expressão para f .

PP 4.14. Um feixe colimado de luz, com comprimento de onda $\lambda = 550$ nm, incide normalmente numa placa zonada de 3.0 cm de diâmetro. Verifica-se a formação de uma mancha brilhante mais intensa a uma distância de 1.00 m da placa zonada. Determine a que distância se forma a mancha brilhante mais próxima. Justifique a existência dessa mancha.

PP 4.15. Uma fonte pontual F , emitindo luz com comprimento de onda $\lambda = 600$ nm, encontra-se a uma distância de 1.5 m de um ecrã plano e opaco, contendo uma fenda com 0.4 mm de largura. Usando a espiral de Cornu, calcule a intensidade num ponto P situado no lado oposto do ecrã e a 4.5 m dele. Suponha que a linha \overline{FP} é normal ao plano e passa pelo centro da fenda.

PP 4.16. Um ecrã plano de observação está situado a uma distância $d = \overline{FP} = 6$ m de uma fonte pontual F , que emite luz com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm. O ponto P resulta da intersecção entre o ecrã e a normal que passa pela fonte. A meio caminho entre a fonte e o ecrã situa-se um outro ecrã opaco, paralelo ao anterior e semi-infinito, cuja fronteira superior é rectilínea, horizontal e tangente à linha \overline{FP} . Determine a intensidade a) no ponto P e b) 2 mm acima e abaixo de P .

4.6. Referências bibliográficas

1. M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, 6^a Ed., Pergamon Press, Oxford, 1980
2. R. Guenther, *Modern Optics*, 2nd Ed., Oxford University Press, 2015.
3. E. Hecht, *Optics*, 5th Ed., Pearson Education Limited, 2017.
4. M. Klein e T. Furtak, *Optics*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York, 1986.
5. F. L. Pedrotti, L. M. Pedrotti e L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, 3rd Ed., Cambridge University Press, 2018.
6. O. Heavens e R. Ditchburn, *Insight into Optics*, Wiley-Blackwel, 1991.

Capítulo 5

FIBRAS ÓPTICAS

A primeira experiência de óptica guiada foi realizada por John Tyndall em 1870, quando demonstrou que a luz podia ser guiada no interior de um jacto de água, por sucessivas reflexões internas totais. Esse jacto de água funcionou assim como uma fibra óptica primordial. As primeiras fibras ópticas de vidro foram fabricadas já nos anos vinte do século passado, mas a sua utilização tornou-se mais habitual apenas nos anos cinquenta, quando as características de confinamento da luz foram significativamente melhoradas através da incorporação de uma bainha a envolver o núcleo. Desde essa altura e até aos anos setenta, as fibras ópticas foram utilizadas, principalmente, no âmbito da medicina, guiando a luz a distâncias curtas. O seu uso no domínio das telecomunicações não era então minimamente considerado, dada a elevada atenuação dessas fibras ($\sim 1000 \text{ dB/km}$).

As limitações impostas pela atenuação das fibras ópticas começaram a ser ultrapassadas em 1970, quando se conseguiram fabricar fibras ópticas com uma atenuação de cerca de 20 dB/km . O progresso tecnológico permitiu chegar, em 1979, a uma atenuação de apenas 0.2 dB/km na região espectral de $1.55 \mu\text{m}$. A existência de fibras com uma atenuação tão baixa esteve na origem de uma profunda revolução que se operou desde então no domínio das comunicações ópticas. As fibras ópticas são também muito utilizadas actualmente para implementar diversos dispositivos, nomeadamente acopladores, sensores, amplificadores, lasers, etc..

5.1. Fibras ópticas com índice em degrau

Na sua forma mais simples, a fibra óptica apresenta um núcleo com índice de refracção uniforme, rodeado por uma bainha cujo índice de refracção é igualmente uniforme e inferior ao do núcleo. Devido à variação abrupta do índice de refracção na interface entre o núcleo e a bainha, estas fibras são chamadas *fibras com índice em degrau*. A Fig. 5.1 mostra esquematicamente o perfil do índice de refracção para este tipo de fibras.

É útil considerar algumas propriedades das fibras ópticas com base no conceito de raio luminoso da óptica geométrica. Deve notar-se, contudo, que esta descrição é válida apenas quando o raio do núcleo, a , é bastante superior ao comprimento de onda da luz, λ , o que corresponde às chamadas *fibras multimodo*. Quando as duas grandezas são comparáveis, como sucede nas chamadas *fibras monomodo*, torna-se necessário usar a teoria electromagnética para descrever adequadamente a propagação da luz ao longo da fibra.

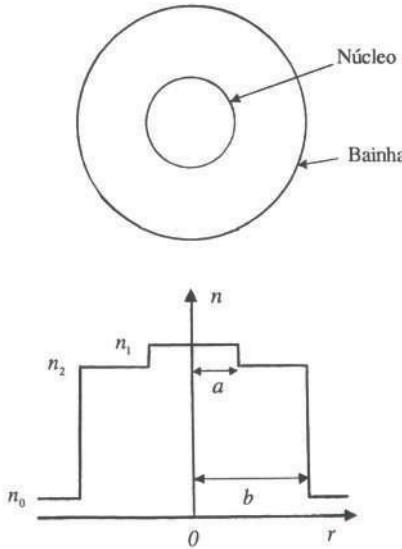


Figura 5.1 – Representação esquemática da secção e do perfil do índice de refracção para fibras com índice em degrau.

5.1.1. Abertura numérica

Considerando a geometria associada ao raio (1) da Fig. 5.2, tem-se que a refracção do raio que entra no núcleo da fibra é traduzida pela equação:

$$n_0 \operatorname{sen} \theta_i = n_1 \operatorname{sen} \theta_t \quad (5.1)$$

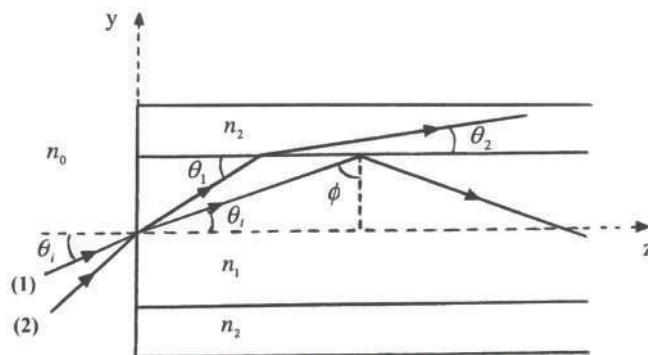


Figura 5.2 – Propagação de um raio guiado no núcleo de uma fibra com índice em degrau.

onde n_1 e n_0 são os índices de refracção do núcleo da fibra e do ar, respectivamente. O raio transmitido no núcleo sofre uma reflexão total na interface núcleo/bainha se o ângulo de incidência nesta interface for superior ao ângulo crítico para reflexão total, dado por:

$$\operatorname{sen} \phi_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.2)$$

onde n_2 é o índice de refracção da bainha. Todos os raios com $\phi > \phi_c$ permanecem confinados ao núcleo, correspondendo aos chamados *modos guiados* da fibra.

Pode-se usar as Eq.s (5.1) e (5.2) para determinar o ângulo de incidência máximo para um raio à entrada da fibra, de modo a que ele seja posteriormente guiado pelo núcleo. Introduzindo $\theta_i = \pi / 2 - \phi_c$ na Eq. (5.1) e usando a Eq. (5.2), tem-se:

$$\begin{aligned} n_0 \operatorname{sen} \theta_{i,\max} &= n_1 \cos \phi_c \\ &= (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

O cone de aceitação limitado correspondente aos raios incidentes que são posteriormente guiados pela fibra é habitualmente expresso em termos da chamada *abertura numérica (AN)* da fibra, dada por:

$$AN = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (5.4)$$

Para uma fibra óptica típica, em que $n_1 = 1.48$ e $n_2 = 1.46$, tem-se uma abertura numérica $AN = 0.242$ e um ângulo máximo de aceitação $\theta_{i,\max} \approx 14^\circ$ quando $n_0 = 1$.

Para $n_1 \approx n_2$, a abertura numérica pode ser aproximada por:

$$AN = n_1(2\Delta)^{1/2}, \quad (5.5)$$

onde

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (5.6)$$

A abertura numérica e, portanto, a capacidade de aceitação da luz pela fibra, aumenta quando Δ aumenta. Contudo, como se verá a seguir, o aumento de Δ determina também um aumento da chamada *dispersão intermodal*, o que é indesejável na perspectiva dos sistemas de comunicação.

5.1.2. Dispersão intermodal

A dispersão intermodal pode ser entendida com base na Fig. 5.2. É evidente que raios distintos percorrem distâncias diferentes. Em consequência, estes raios chegam em instantes diferentes ao fim da fibra, ainda que tenham partido ao mesmo tempo e viajado com a mesma velocidade. O percurso mais curto ocorre para $\theta_i = 0$, enquanto que o percurso mais longo ocorre para o ângulo $\theta_i = \theta_{i,\max}$, dado pela Eq. (5.3). O atraso temporal ΔT entre os dois raios que percorrem os caminhos mais curto e mais longo é uma medida do alargamento experimentado por um impulso lançado à entrada da fibra.

Num sistema de comunicação por fibra óptica, o atraso temporal ΔT deve ser menor que o tempo de bit $T_B = 1/B$, sendo B o ritmo de transmissão. Deste modo, mostra-se no problema PR 5.2 que o produto do ritmo de transmissão pela distância, que caracteriza um sistema de comunicação, deve satisfazer a condição:

$$BL < \frac{n_2}{n_1^2} \frac{c}{\Delta} \quad (5.7)$$

A título de exemplo, tem-se $BL < 20$ (Mb/s)-km para $\Delta = 0.01$ e $n_1 = 1.5 (\approx n_2)$. Estas fibras podem servir para comunicar a uma taxa de 2 Mb/s ao longo de uma distância de 10 km. A Eq. (5.7) mostra claramente a conveniência de se usar fibras ópticas com abertura numérica reduzida, de modo a que o produto do ritmo de transmissão pela distância atinja valores suficientemente elevados.

Os efeitos da dispersão intermodal podem ser significativamente reduzidos usando fibras com índice gradual, discutidas a seguir, ou mesmo completamente eliminados, usando fibras monomodo

5.2. Fibras ópticas com índice gradual

Para além das fibras com índice em degrau, existe um outro tipo de fibras que se caracteriza pelo facto de o seu índice de refracção no núcleo não ser constante, mas decrescer gradualmente desde um valor máximo no eixo até um valor mínimo na fronteira com a bainha. Estas fibras são chamadas *fibras com índice gradual*. A Fig. 5.3 mostra esquematicamente o perfil do índice de refracção para este tipo de fibras.

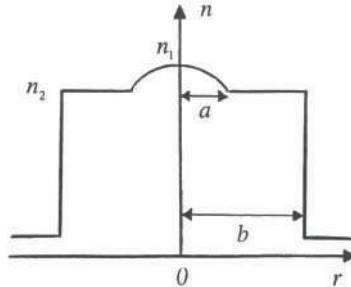


Figura 5.3 – Representação esquemática do perfil do índice de refracção para fibras com índice gradual.

As fibras com índice gradual apresentam um índice de refracção que pode, geralmente, ser descrito na forma:

$$n(r) = \begin{cases} n_1 [1 - \Delta(r/a)^\alpha] & r < a \\ n_1(1 - \Delta) = n_2 & r \geq a \end{cases} \quad (5.8)$$

onde a é o raio do núcleo, Δ é dado pela Eq. (5.6) e α é uma constante. O caso $\alpha = 2$ corresponde a um índice de refracção com perfil parabólico. Uma fibra com índice em degrau corresponde ao limite $\alpha \rightarrow \infty$.

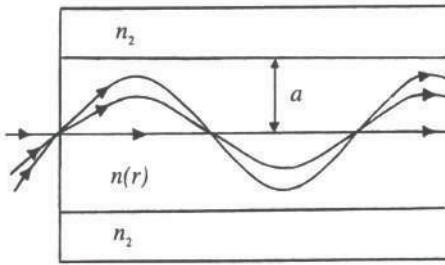


Figura 5.4 – Trajectórias de raios guiados em fibras com índice gradual.

Mostra-se no problema PR 5.4 que um raio meridional se propaga numa fibra com índice gradual com perfil parabólico segundo uma trajectória sinusoidal. Na Fig. 5.4 representa-se a evolução de três raios meridianos guiados, correspondentes a três valores distintos do ângulo inicial com o eixo. Com base nesta figura, torna-se fácil entender, em termos qualitativos, a redução da dispersão intermodal que se obtém usando uma fibra com índice gradual. Como acontece com as fibras com índice em degrau, o percurso mais longo corresponde aos raios mais oblíquos. Contudo, no caso das fibras com índice gradual, a velocidade do raio varia ao longo do seu caminho, devido à variação do índice de refracção. O raio que se propaga ao longo do eixo da fibra tem um trajecto mais curto, mas, em contrapartida, viaja com uma velocidade inferior. Os raios mais oblíquos têm uma parte significativa do seu trajecto em zonas com um índice de refracção mais baixo, onde a sua velocidade é superior. Em consequência, consegue-se uma redução significativa da dispersão intermodal usando fibras com um índice de refracção gradual, desde que o perfil do índice de refracção seja escolhido de modo conveniente.

5.3. Modos guiados

A transformada de Fourier do campo eléctrico é dada por

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) \exp(i\omega t) dt , \quad (5.9)$$

e satisfaz a seguinte equação, obtida da equação de onda (1.15):

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + n^2(\omega) k_0^2 \vec{E}_\omega = 0 \quad (5.10)$$

onde $k_0 = \omega/c$ é o número de onda no vazio.

Dada a simetria cilíndrica da fibra óptica, torna-se conveniente reescrever a Eq. (5.10) usando as coordenadas cilíndricas r, ϕ e z :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}_\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_\omega}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_\omega}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 \vec{E}_\omega = 0 \quad (5.11)$$

onde $n = n_1$ para $r \leq a$ e $n = n_2$ para $r > a$. Pode-se escrever uma equação semelhante à anterior para a transformada de Fourier do campo magnético \vec{H}_ω . Como os campos \vec{E} e \vec{H} satisfazem as equações de Maxwell (1.7)-(1.10), tem-se que das seis componentes apenas duas são independentes. Considera-se habitualmente $E_{\omega z}$ e $H_{\omega z}$ como as duas componentes independentes. Assumindo que $E_{\omega z}$ se pode escrever na forma

$$E_{\omega z}(r, \phi, z) = F(r)\Phi(\phi)Z(z) \quad (5.12)$$

e substituindo na equação (5.11), obtém-se as soluções $Z(z) = \exp(i\beta z)$ e $\Phi(\phi) = \exp(im\phi)$, onde β é a constante de propagação e m é um número inteiro. Por outro lado, $F(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(n^2 k_0^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F = 0 \quad (5.13)$$

As soluções da Eq. (5.13) são dadas em termos de funções de Bessel e podem ser apresentadas na forma:

$$F(r) = \begin{cases} AJ_m(pr) + A'Y_m(pr); & r \leq a \\ CK_m(qr) + C'I_m(qr); & r > a \end{cases} \quad (5.14)$$

onde A, A', C e C' são constantes, J_m e Y_m são funções ordinárias de Bessel de ordem m de primeira e de segunda classe, respectivamente, enquanto I_m e K_m são funções modificadas de Bessel de ordem m de primeira e de segunda classe, respectivamente. Os parâmetros p e q são dados por:

$$p = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \quad (5.15)$$

$$q = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \quad (5.16)$$

e satisfazem a relação:

$$p^2 + q^2 = (n_1^2 - n_2^2)k_0^2 \quad (5.17)$$

Dado que $Y_m(pr)$ apresenta uma singularidade para $r = 0$, deve admitir-se que $A' = 0$ para que a solução tenha significado físico. Por outro lado, a solução $F(r)$ deve decair na bainha para valores crescentes r , pelo que deve ter-se $C' = 0$. Como consequência, a solução geral dada pela Eq. (5.12) fica reduzida à forma:

$$E_{\omega z} = \begin{cases} AJ_m(pr) \exp(im\phi) \exp(i\beta z); & r \leq a \\ CK_m(qr) \exp(im\phi) \exp(i\beta z); & r > a \end{cases} \quad (5.18)$$

De modo semelhante, a solução para $H_{\omega z}$ pode ser escrita na forma:

$$H_{\omega z} = \begin{cases} BJ_m(pr) \exp(im\phi) \exp(i\beta z); & r \leq a \\ DK_m(qr) \exp(im\phi) \exp(i\beta z); & r > a \end{cases} \quad (5.19)$$

As equações de Maxwell podem ser usadas para encontrar as expressões das componentes transversais dos campos eléctrico e magnético em termos de derivadas das componentes longitudinais. Em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$E_{\omega r} = \frac{i}{p^2} \left(\beta \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial r} + \omega \mu \frac{1}{r} \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial \phi} \right) \quad (5.20)$$

$$E_{\omega \phi} = \frac{i}{p^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial r} \right) \quad (5.21)$$

$$H_{\omega r} = \frac{i}{p^2} \left(\beta \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial r} - \omega \epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial \phi} \right) \quad (5.22)$$

$$H_{\omega \phi} = \frac{i}{p^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial \phi} + \omega \epsilon \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial r} \right) \quad (5.23)$$

Estas expressões são igualmente válidas na região da bainha se p^2 for substituído por $-q^2$.

Impõo a continuidade das componentes tangenciais dos campos na fronteira núcleo/bainha ($r = a$), obtém-se quatro equações. Tem-se uma solução não-trivial para as constantes A, B, C , e D se o determinante da matriz dos coeficientes for nulo, o que conduz à seguinte equação a valores próprios:

$$\left[\frac{J'_m(pa)}{pJ_m(pa)} + \frac{K'_m(qa)}{qK_m(qa)} \right] \left[\frac{n_1^2}{n_c^2} \frac{J'_m(pa)}{pJ_m(pa)} + \frac{K'_m(qa)}{qK_m(qa)} \right] = \frac{m^2}{a^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \quad (5.24)$$

onde as linhas indicam a derivada em ordem ao argumento da função.

As soluções da Eq. (5.24) dão as constantes de propagação β para os diferentes modos da fibra. Para cada valor de m existem várias soluções β_{mn} ($n = 1, 2, \dots$). Cada valor β_{mn} corresponde a um modo de propagação específico, cujas componentes dos campos eléctrico e magnético são dadas pelas Eq.s (5.18)-(5.23). Para $m=0$ os modos da fibra são designados por TE_{0n} e TM_{0n} , consoante correspondam a modos de propagação com campo eléctrico transverso ($E_z = 0$) ou com campo magnético transverso ($H_z = 0$). Para $m > 0$ os modos da fibra são híbridos, dado que as seis componentes do campo electromagnético são não-nulas. Estes modos híbridos são designados por HE_{mn} ou EH_{mn} , dependendo da grandeza relativa das componentes $H_{\omega z}$ e $E_{\omega z}$. Por exemplo, se $E_{\omega z}$ apresenta uma grandeza maior, o modo é designado por HE .

No caso em que $n_1 \approx n_2$, a equação a valores próprios (5.24) pode ser simplificada e apresentar-se na forma:

$$\frac{J'_m(pa)}{pJ_m(pa)} + \frac{K'_m(qa)}{qK_m(qa)} = \pm \frac{m}{a} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \quad (5.25)$$

A Eq. (5.25) com o sinal mais no membro direito é a equação a valores próprios para os modos EH_{mn} , enquanto com o sinal menos é a equação para os modos HE_{mn} . O caso em que o membro direito é nulo corresponde aos modos TE e TM .

Cada modo da fibra tem um índice de refracção efectivo $n_{eff} = \beta / k_0$, tal que $n_1 > n_{eff} > n_2$. A situação $n_{eff} = n_2$ corresponde à chamada condição de corte, em que se tem $q = 0$. Torna-se útil introduzir a frequência normalizada V , dada por

$$V = k_0 a \left(n_1^2 - n_2^2 \right)^{1/2} \quad (5.26)$$

Este parâmetro conjuga os parâmetros estruturais da fibra e o comprimento de onda da luz guiada, determinando o número de modos suportados pela fibra. Para uma fibra multimodo com um valor elevado de V , esse número é dado aproximadamente por $V^2/2$.

5.4. Fibras ópticas monomodo

A condição para que uma fibra óptica suporte apenas um modo é dada pelo valor de V para o qual os modos TE_{01} e TM_{01} atingem o corte. Das equações a valores próprios (5.24) ou (5.25) pode verificar-se que a condição de corte para ambos os modos é dada por $J_0(V) = 0$. O menor valor de V para o qual esta condição é satisfeita é 2.405. Ou seja, para valores $V < 2.405$ a fibra suporta apenas o modo HE_{11} , que é conhecido como modo fundamental.

Na aproximação de guiagem fraca, as componentes axiais E_z e H_z do modo fundamental são desprezáveis e a sua polarização é aproximadamente linear. Assumindo uma polarização linear ao longo do eixo dos x , o campo eléctrico do modo HE_{11} é dado por

$$E_{ox} = \begin{cases} E_0 J_0(pr) \exp(i\beta z); & r \leq a \\ E_0 [J_0(pa)/K_0(qa)] K_0(qr) \exp(i\beta z); & r > a \end{cases} \quad (5.27)$$

A mesma fibra suporta um outro modo polarizado linearmente segundo o eixo dos y . Na situação ideal, em que a geometria é perfeitamente cilíndrica e o material é isotrópico, verifica-se uma degenerescência entre esses dois modos polarizados ortogonalmente. Na prática, contudo, um pequeno desvio da geometria cilíndrica da fibra ou uma ligeira anisotropia do material determinam uma quebra dessa degenerescência. Neste caso, a constante de propagação β torna-se ligeiramente diferente para os modos polarizados nas duas direcções ortogonais. O grau de birrefringência modal, δ , é definido na forma:

$$\delta = \frac{|\beta_x - \beta_y|}{k_0} = |n_x - n_y| \quad (5.28)$$

onde n_x (n_y) é o índice de refracção para o modo polarizado segundo o eixo dos x (eixo dos y).

Devido às flutuações na geometria da fibra e na anisotropia do material, a birrefringência δ não se mantém constante ao longo da fibra. Em consequência, a luz que é lançada na fibra com polarização linear adquire geralmente uma polarização arbitrária ao propagar-se ao longo dessa fibra.

Através de um projecto apropriado da fibra, é possível introduzir intencionalmente uma birrefringência significativa, de modo a tornar possível a propagação de luz com um estado de polarização constante. As fibras assim obtidas são designadas por *fibras com manutenção da polarização*.

5.5. Atenuação

Actualmente, as fibras ópticas apresentam uma atenuação que, embora sendo muito baixa, não pode ser ignorada nos sistemas de comunicação a longa distância. Se representarmos por P_0 a potência lançada na entrada de uma fibra com comprimento L , a potência à saída é dada por:

$$P_t = P_0 \exp(-\alpha L) \quad (5.29)$$

onde α é a constante de atenuação. É costume indicar a atenuação da fibra em unidades de dB/km, usando a relação:

$$\alpha_{dB} = -\frac{10}{L} \log\left(\frac{P_t}{P_0}\right) = 4.343\alpha \quad (5.30)$$

Um vidro de sílica ordinário apresenta, em geral, uma atenuação bastante superior a 100 dB/km, a qual é devida à absorção por diversas impurezas, nomeadamente iões metálicos (ferro, crómio e cobre). Contudo, um vidro de sílica pura caracteriza-se por uma atenuação bastante baixa, inferior a 1 dB/km, para comprimentos de onda entre 0.8 e 1.8 μm . Fora deste intervalo a atenuação aumenta rapidamente.

Na Fig. 5.5 mostra-se uma curva típica para a atenuação de um vidro de sílica de elevada qualidade em função do comprimento de onda. A atenuação apresenta valores mínimos perto de 1.3 e 1.55 μm , atingindo neste último caso um valor de 0.2 dB/km. As bandas próximas desses comprimentos de onda constituem as janelas que têm sido usadas nos sistemas de comunicação por fibras ópticas.

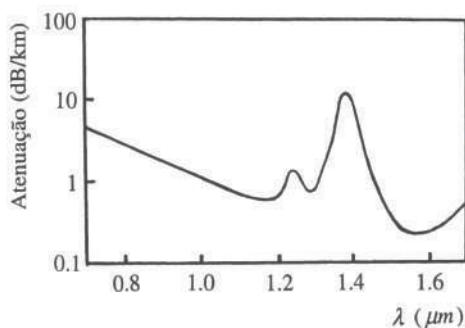


Figura 5.5 – Perfil típico da atenuação em função do comprimento de onda num vidro de sílica de elevada qualidade.

A absorção pelo material e a dispersão de Rayleigh constituem as contribuições dominantes para a atenuação residual da sílica fundida. A sílica pura absorve na região do ultravioleta, assim como na região do infravermelho além dos 2 μm . Contudo, mesmo uma quantidade relativamente pequena de impurezas pode determinar uma absorção significativa na região 0.5 - 2 μm . A impureza mais importante que afecta a atenuação nesta região tem que ver com a água dissolvida no vidro, mais concretamente com o ião hidroxilo (OH^-), cujo pico de absorção principal se situa perto de 2.73 μm . O pico na Fig. 5.5 perto de 1.37 μm corresponde ao segundo harmónico desse valor.

A dispersão de Rayleigh é um efeito de carácter fundamental, resultante das flutuações aleatórias da densidade do material da fibra. Daí resultam flutuações locais do índice de refracção, que provocam a dispersão da luz em todas as direcções. Este efeito varia com λ^{-4} , de modo que se torna mais significativo para baixos comprimentos de onda. A atenuação mínima da fibra perto de 1.55 μm é dominada pela dispersão de Rayleigh.

A atenuação de uma fibra óptica pode ficar a dever-se também às imperfeições geométricas introduzidas durante o seu processo de fabricação, assim como ao seu excessivo encurvamento, que impossibilita a guiação completa da luz através de sucessivas reflexões totais internas.

Uma fibra óptica ordinária pode ser obtida aquecendo o centro de uma vara de vidro e puxando as suas extremidades. Contudo, uma fibra óptica de qualidade, constituída por um núcleo e uma bainha e apresentando um diâmetro constante, requer uma técnica de fabricação mais sofisticada. Existe para o efeito dois métodos: estiramento a partir de uma vara pré-formada, a qual se apresenta já constituída por um núcleo e uma bainha, ou estiramento a partir de um cadinho duplo e concêntrico, no qual as duas partes são fundidas separadamente. Deve notar-se que a temperatura à qual a sílica pura apresenta uma viscosidade conveniente para esse efeito (cerca de 2000° C) é bastante superior à do vidro ordinário (cerca de 1000° C). Depois de concluído aquele processo de estiramento, é acrescentado um revestimento adicional de plástico para proteger a fibra.

A obtenção de um gradiente do índice de refracção devidamente controlado pode ser conseguido a partir de uma pré-forma que já apresente um índice de refracção gradual. Esta graduação do índice de refracção da

pré-forma é habitualmente realizada por difusão de vários dopantes, tais como GeO_2 e P_2O_5 , no vidro de sílica. Numa situação típica, a adição de 10% de algum destes dopantes é suficiente para aumentar o índice de refracção do vidro de 1.46 para 1.47.

5.6. Dispersão cromática

A dispersão cromática tem origem na interacção da onda electromagnética com os electrões ligados de um dieléctrico e manifesta-se através da dependência relativamente à frequência do índice de refracção $n(\omega)$, que se relaciona com a constante de propagação $\beta(\omega)$ na forma:

$$n(\omega) = \frac{c\beta(\omega)}{\omega} \quad (5.31)$$

Geralmente, esta relação de dispersão não é conhecida de modo explícito. Contudo, a constante de propagação β pode ser expandida numa série de Taylor em torno do valor central β_0 :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (5.32)$$

onde

$$\frac{d\beta}{d\omega} \equiv \beta_1 = \frac{1}{c} \left[n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right] = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{v_g} \quad (5.33)$$

e

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \equiv \beta_2 = -\frac{dv_g/d\omega}{v_g^2} \quad (5.34)$$

Na Eq. (5.33), $n_g = n + \omega(dn/d\omega)$ e v_g representam o índice de refracção de grupo e a velocidade de grupo, respectivamente. O parâmetro β_2 corresponde à dispersão da velocidade de grupo (DVG), a qual é muitas vezes caracterizada pelo parâmetro D , dado por:

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (5.35)$$

O parâmetro D tem unidades de [ps/(nm.km)].

Verifica-se que D se anula para um dado valor do comprimento de onda $\lambda = \lambda_D$, tendo-se geralmente $\lambda_D \approx 1.3 \mu\text{m}$. Contudo, a DVG depende não apenas das características do material, mas também das características geométricas da fibra óptica. Deste modo, o projecto apropriado de uma fibra óptica permite desviar o comprimento de onda correspondente ao zero da DVG, ajustando-o ao comprimento de onda para o mínimo de atenuação, $\lambda_D \approx 1.55 \mu\text{m}$, obtendo-se assim a chamada *fibra com dispersão desviada*. É possível igualmente obter uma fibra com uma DVG muito baixa e quase uniforme numa banda de comprimentos de onda. A dispersão para ambos os tipos de fibra encontra-se ilustrada na Fig. 5.6, juntamente com o caso de uma fibra standard.

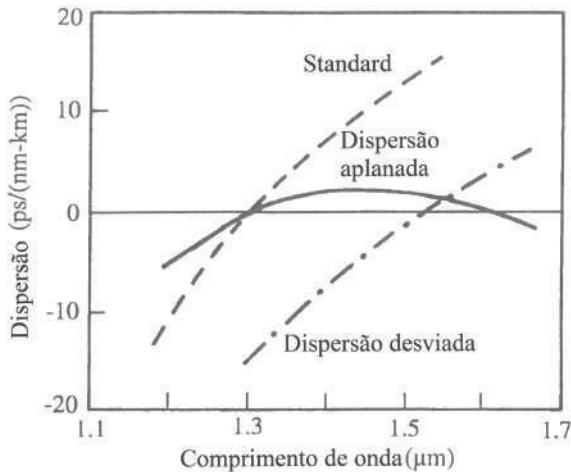


Figura 5.6 – Dispersão em função do comprimento de onda para três tipos de fibra.

No *regime de dispersão normal*, em que $D < 0$, as componentes de um impulso correspondentes às frequências mais elevadas viajam mais lentamente que as componentes com frequências inferiores. No *regime de dispersão anómala*, onde $D > 0$, acontece o oposto. As fibras ópticas convencionais exibem uma dispersão anómala para comprimentos de onda superiores a λ_D . Este regime de dispersão apresenta um interesse especial, dado que nele se torna possível a formação de impulsos ópticos com características especiais - os chamados *solitões brilhantes* - com base num balanço entre os efeitos dispersivo e não-linear.

Considere-se o caso de um impulso Gaussiano lançado na entrada da fibra, dado por:

$$E(0, t) = E_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right\} \exp \{-i\omega_0 t\} \quad (5.36)$$

onde E_0 é pico da amplitude, ω_0 é a frequência da portadora e t_0 representa a meia largura no ponto 1/e da intensidade. Ela está relacionada com a largura total a meia altura, t_{FWHM} , do modo $t_{FWHM} = 2(\ln 2)^{1/2} t_0 \approx 1.665 t_0$. Mostra-se no problema PR 5.8 que a largura do impulso, t_p , aumenta com a distância de propagação na forma:

$$t_p^2(z) = t_0^2 \left[1 + (\beta_2 z / t_0^2)^2 \right] \quad (5.37)$$

A Eq. (5.37) mostra que o alargamento do impulso depende da DVG, β_2 , da largura inicial, t_0 , e da distância de propagação, z .

Mostra-se no problema PR 5.9 que a dispersão cromática impõe ao impulso um trinado, cujas características dependem do regime de dispersão. No regime de dispersão normal a frequência instantânea do impulso numa dada posição z aumenta com o tempo. Como consequência, o espectro na parte da frente do impulso é desviado para o vermelho, enquanto na parte de trás é desviado para o azul. Por outro lado, no regime de dispersão anómala, a frequência instantânea decresce com o tempo. Neste caso, o espectro na parte da frente do impulso é desviado para o azul, enquanto na parte de trás é desviado para o vermelho. A Fig. 5.7 ilustra o trinado do impulso para os dois regimes de dispersão.

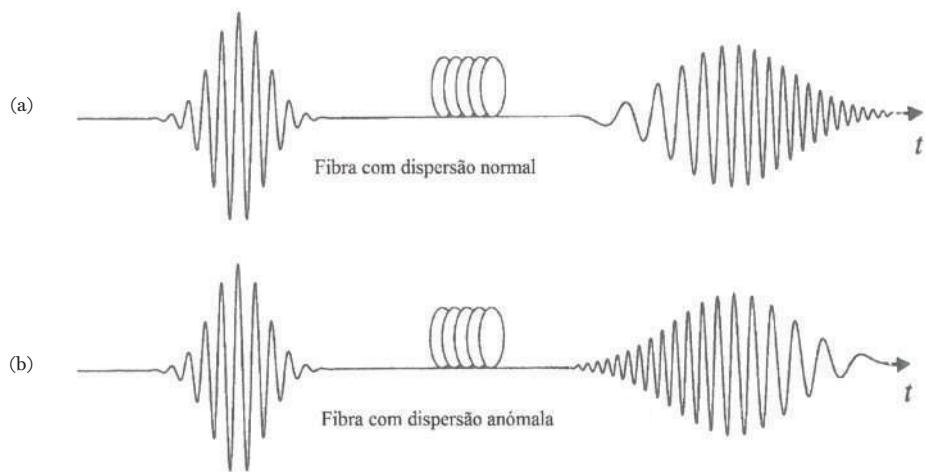


Figura 5.7 – Representação esquemática do trinado imposto ao impulso nos regimes de dispersão (a) normal e (b) anómala.

5.7. Fibras ópticas microestruturadas

As fibras ópticas microestruturadas (FOMs), também designadas por fibras de cristal fotónico, têm sido desenvolvidas desde 1996 e representam uma nova classe de fibras, sendo caracterizadas pelo facto de apresentarem uma bainha com múltiplos micro-canais de ar, paralelos ao núcleo. Estas fibras podem dividir-se em duas categorias, consoante apresentem um núcleo sólido ou um núcleo oco.

As fibras microestruturadas com núcleo oco conduzem a luz devido à existência de bandas espectrais proibidas na bainha, determinadas pela periodicidade da rede de micro-canais que as constitui. Quanto às fibras microestruturadas com núcleo sólido, a propagação da luz pode basear-se igualmente na existência de bandas proibidas na bainha ou, simplesmente, por efeito da reflexão total interna, de modo análogo às fibras convencionais. Esta situação é possível desde que o índice de refracção médio da bainha seja inferior ao índice de refracção do núcleo.

A Fig. 5.8 ilustra uma FOM com núcleo sólido, exibindo uma rede hexagonal de micro-canais na bainha. Uma MOF é caracterizada através de dois parâmetros estruturais: o diâmetro dos micro-canais, d , e o espaçamento entre eles, Λ .

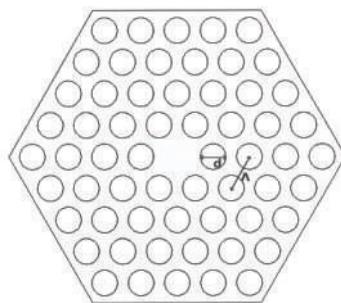


Figura 5.8 – Representação esquemática de uma fibra óptica microestruturada com núcleo sólido, apresentando uma rede hexagonal de micro-canais de ar na bainha.

O controlo dos parâmetros estruturais da bainha permite alterar significativamente as características de dispersão de uma FOM. A Fig. 5.9 mostra as curvas de dispersão para uma FOM de sílica com uma rede hexagonal de micro-canais espaçados de i) $1\mu\text{m}$ e ii) $2.5\mu\text{m}$, para valores diferentes dos diâmetros desses canais,. No caso ii), as curvas de dispersão têm apenas um zero de dispersão e apresentam um perfil aproximadamente uniforme acima desse zero. Já para o caso i), as curvas de dispersão têm dois zeros de dispersão, apresentando uma janela com dispersão anómala entre eles. Essa janela torna-se maior à medida que a razão (d/Λ) entre o diâmetro dos micro-canais e o espaçamento entre eles aumenta.

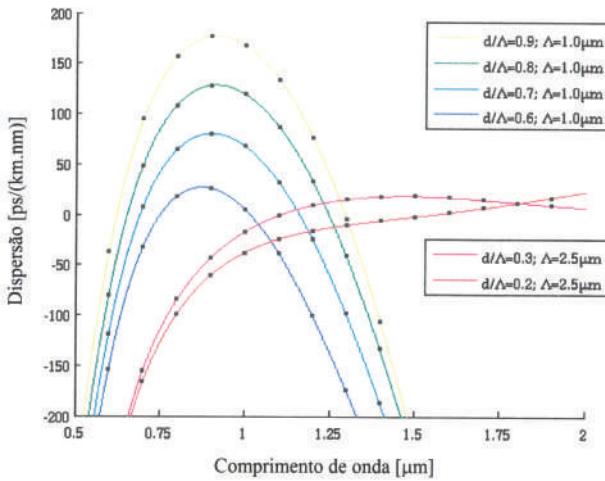


Figura 5.9 - Curvas de dispersão para uma FOM com uma rede hexagonal de micro-canais espaçados de i) $1\mu\text{m}$ e ii) $2.5\mu\text{m}$, para $\lambda = 1.5\mu\text{m}$, para diferentes diâmetros desses canais

Aumentando a razão (d/Λ) numa FOM com núcleo sólido diminui o índice de refracção médio da bainha, ou seja, aumenta a diferença entre os índices de refracção do núcleo e da bainha. Na situação limite, teremos o núcleo rodeado praticamente por ar, o que proporciona um maior confinamento do campo óptico guiado pela fibra. A intensidade do campo guiado é máxima neste caso, o que pode favorecer o desenvolvimento de diversos efeitos não-lineares, nomeadamente para valores reduzidos do diâmetro do núcleo.

5.8. Acopladores de fibra óptica

Com a utilização crescente das fibras ópticas, sobretudo nos domínios das comunicações e dos sensores, verifica-se a conveniência de usar vários componentes também de fibra óptica capazes de executar as mais variadas funções: modulação, divisão do feixe, amplificação, controle da polarização, filtragem, etc.. Entre os componentes mais importantes encontra-se o acoplador direccional de fibra óptica, representado na Fig. 5.10.

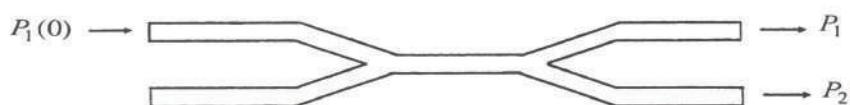


Figura 5.10 – Representação esquemática de um acoplador de fibra óptica.

O funcionamento do acoplador direccional de fibra óptica baseia-se no facto de o campo do modo guiado se estender para além da interface núcleo-bainha. Assim, quando os núcleos de duas fibras se dispõem paralelamente e se encontram suficientemente próximos um do outro, de modo a proporcionar a sobreposição dos seus campos modais, verifica-se a transferência periódica de potência entre as duas fibras. Essa transferência é incompleta na situação mais geral em que as constantes de propagação dos modos das fibras individuais são diferentes. Contudo, pode-se conseguir a transferência completa de potência entre as duas fibras quando as suas constantes de propagação são iguais. Neste caso, designando por $P_1(0)$ a potência na fibra 1 no início da região de acoplamento ($z = 0$), tem-se que as potências nas duas fibras numa posição $z > 0$ dessa região são dadas por:

$$P_1(z) = P_1(0) \cos^2(\mu z) \quad (5.38)$$

$$P_2(z) = P_1(0) \sin^2(\mu z) \quad (5.39)$$

Nas equações anteriores μ representa o chamado *coeficiente de acoplamento*, sendo uma medida da grandeza da interacção entre as duas fibras. O coeficiente de acoplamento depende dos parâmetros das fibras, da separação entre os seus núcleos e do comprimento de onda da luz propagada.

A variação da constante de acoplamento com o comprimento de onda está na base de uma outra aplicação bastante importante dos acopladores direccionalis, no âmbito da multiplexagem/desmultiplexagem por divisão de comprimentos de onda (ver o problema PR 5.11).

5.9. Sensores de fibra óptica

As fibras ópticas podem ser úteis também como sensores para a medição de várias grandezas físicas e químicas: pressão, temperatura, campos eléctrico e magnético, corrente, rotação, aceleração, deslocamento, concentração química, pH, etc.. Os sensores de fibra óptica apresentam algumas características que os tornam particularmente atractivos: são imunes às interferências electromagnéticas, apresentam uma grande versatilidade, podem proporcionar uma medição distribuída espacialmente, apresentam um tempo de resposta bastante curto, a informação de vários sensores pode ser combinada e transmitida a longas distâncias através das próprias fibras ópticas, etc..

Numa situação típica, a luz lançada numa fibra óptica é guiada até à região pretendida. Aí, alguma das propriedades da luz (intensidade, fase, estado de polarização ou frequência) é modulada pela grandeza que se pretende medir, após o que a luz modulada é enviada pela mesma ou por outra fibra para detecção e processamento da informação. Quando a modulação é realizada sobre a luz que se propaga na fibra, tem-se um sensor de fibra *intrínseco*. No caso de essa modulação ser realizada quando a luz viaja entre duas fibras, tem-se um sensor de fibra *extrínseco*. Em geral, o uso de fibras monomodo permite que o sensor apresente uma sensibilidade bastante superior à proporcionada pelas fibras multimodo.

Na Fig. 5.11 mostra-se a representação esquemática de um microfone óptico, que constitui um exemplo de um sensor de fibra extrínseco. A membrana do microfone éposta a vibrar por uma onda sonora. No lado oposto, essa membrana é iluminada por luz laser proveniente de uma fibra óptica. Uma outra fibra recebe a luz reflectida. Devido à vibração da membrana, a direcção da luz reflectida varia, determinando assim uma modulação da

intensidade recebida pela segunda fibra. Na prática, as dimensões deste sensor podem ser bastante reduzidas, permitindo a sua utilização em situações muito variadas.

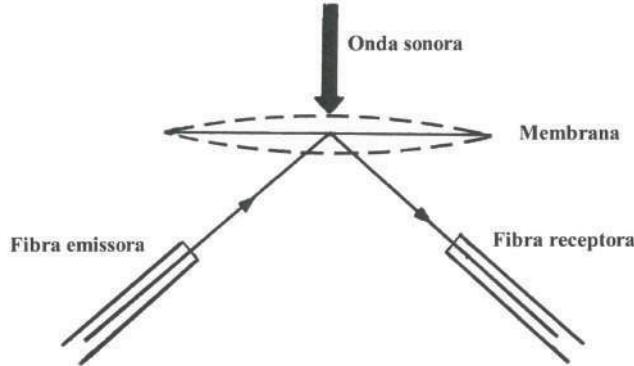


Figura 5.11 – Representação esquemática de um microfone óptico.

O sensor interferométrico de Mach-Zehnder, representado na Fig. 5.12, é um exemplo de um sensor de fibra intrínseco, que apresenta uma sensibilidade particularmente elevada. A luz proveniente de um laser passa por um acoplador direccional (AD) que funciona como um divisor de feixe 50:50. Os dois feixes daí resultantes são guiados por duas fibras monomodo, que constituem os dois braços do interferómetro de Mach-Zehnder. Essas duas fibras ligam-se às entradas de um segundo acoplador, idêntico ao anterior, o qual permite a sobreposição dos dois feixes e a posterior detecção e processamento do campo resultante. Um dos braços do interferómetro é constituído pela fibra sensível à grandeza que se quer medir, enquanto que o outro braço é constituído por uma fibra que se procura manter imune às perturbações externas. Quando a grandeza a medir actua na fibra sensível, a fase da luz que nela se propaga é alterada. Dado que a fase na outra fibra não é afectada, tem-se que a diferença de fase entre os dois feixes aquando da sua sobreposição no segundo acoplador, vai determinar em geral diferentes valores para as potências nas duas saídas desse acoplador. A medição dessas potências permitirá caracterizar a grandeza em causa.

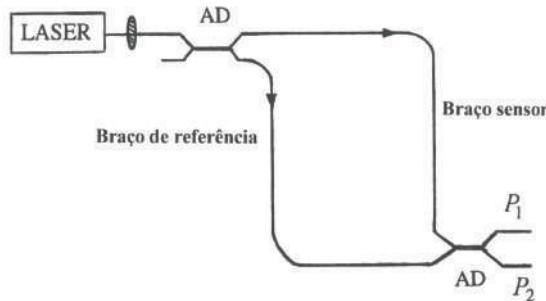


Figura 5.12 – Representação esquemática do sensor interferométrico de Mach-Zehnder.

Indicando por $\Delta\psi$ a diferença de fase entre os dois feixes à entrada do segundo acoplador, tem-se que as potências à saída desse acoplador são dadas por:

$$P_1 = P_0 \cos^2 \frac{\Delta\psi}{2} \quad (5.40)$$

$$P_2 = P_0 \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \quad (5.41)$$

onde P_0 é a potência inicial. Se $\Delta\psi = 0$ rad toda a potência sai pela fibra 1, enquanto que se $\Delta\psi = \pi$ rad toda a potência sai pela fibra 2. Para outros valores da diferença de fase a potência divide-se pelas duas saídas.

Dado que as variações da diferença de fase $\Delta\psi$ entre os dois braços provocadas pela perturbação externa é geralmente bastante pequena (da ordem dos mili- ou microradianos), verifica-se que, se o sensor operar perto de um extremo (mínimo ou máximo) das potências P_1 e P_2 , a modulação dessa potência daí resultante será mínima. O ponto de funcionamento que proporciona uma sensibilidade máxima corresponde a uma diferença de fase $\Delta\psi = (2p+1)\frac{\pi}{2}$ rad, sendo referido habitualmente como *ponto de quadratura*.

5.10. Problemas resolvidos

PR 5.1. Uma vara de vidro, com índice de refracção $n=1.5$, tem secção rectangular e encontra-se dobrada como mostra a Fig. 5.13. Um feixe de luz colimada incide perpendicularmente à superfície plana A. Determine o valor mínimo da razão R/d para o qual toda a luz que entra na vara através da superfície A sai através da superfície B.

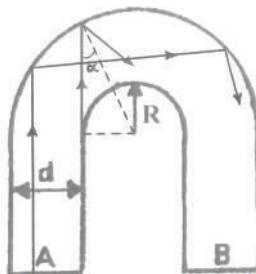


Figura 5.13 – Geometria para a propagação de luz numa vara de vidro dobrada.

Resolução

O raio de luz que entrando em A e se propaga junto à parede interna da vara de vidro reflecte-se na parede externa com o menor ângulo de incidência α , como se representa na Fig 5.13, sendo o raio reflectido tangente à parede interna. O raio em causa deve reflectir-se totalmente até chegar a B. Se $\alpha > \theta_c$, toda a luz que entra em A sai em B. Assim, deve ter-se

$$\sin \alpha > \frac{1}{n} \quad (1)$$

A geometria da Fig. 5.13 dá:

$$\sin \alpha = \frac{R}{R+d} \quad (2)$$

Assim, deve ser

$$\frac{R}{R+d} > \frac{1}{n} \quad (3)$$

Ou seja,

$$\left(\frac{R}{d}\right)_{\min} = \frac{1}{n-1} = 2 \quad (4)$$

PR 5.2. Considerando a geometria associada ao raio (2) da Fig. 5.2 e assumindo uma situação próxima de reflexão interna total, obtenha

- uma expressão para a profundidade de penetração do campo evanescente na bainha e
- o valor dessa profundidade de penetração para um ângulo próximo do ângulo crítico e para um comprimento de onda $\lambda=1.3 \mu\text{m}$.

Resolução

a) Considerando a geometria da Fig. 5.2 e usando a lei de Snell, tem-se:

$$\sin \theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \cos^2 \theta_1} \quad (1)$$

Quando o ângulo de incidência na interface núcleo/bainha excede o ângulo crítico a raiz quadrada na Eq. (1) torna-se imaginária, tendo-se:

$$\sin \theta_2 = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \cos^2 \theta_1} = \pm i\delta \quad (2)$$

Nesta situação, a amplitude da onda transmitida do núcleo para a bainha pode-se escrever na forma:

$$\begin{aligned} E_t &= A \exp ik_2(z \cos \theta_2 + y \sin \theta_2) \\ &= A \exp \left[ik_2 \frac{n_1}{n_2} z \cos \theta_1 \right] \exp(-\delta k_2 y) \end{aligned} \quad (3)$$

A Eq. (3) mostra que a amplitude da onda transmitida para a bainha decresce exponencialmente na direcção do eixo dos y . A profundidade de penetração, ξ , é dada pelo inverso da constante de decaimento δk_2 :

$$\xi \equiv \frac{1}{\delta k_2} = \left[k_2^2 \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \cos^2 \theta_1 - 1 \right) \right]^{-1/2} \quad (4)$$

b) Para um ângulo próximo do ângulo crítico e para um comprimento de onda $\lambda=1.3 \mu\text{m}$, tem-se $\xi \approx 10 \mu\text{m}$. Este resultado mostra que a bainha deve ser suficientemente espessa para conter a onda evanescente até que a sua amplitude seja praticamente nula. Por outro lado, atendendo a que uma parte considerável da energia transmitida ao longo a fibra é transportada por essa onda evanescente, o vidro da bainha deve ser de qualidade praticamente tão elevada como o do núcleo, de forma a minimizar as perdas.

PR 5.3.

- Demonstre a condição dada pela Eq. (5.7) para o produto do ritmo de transmissão, B , pela distância L .
- Calcule o ritmo máximo de transmissão imposto pela dispersão intermodal para um sistema de comunicação que utilize fibras ópticas com um comprimento $L=10 \text{ km}$, tais que i) $n_1 = 1.5$ e $n_2 = 1$; ii) $n_1 = 1.5$ e $n_2 = 1.497$. Que conclusão pode tirar dos resultados obtidos?

Resolução

a) Consideremos os dois casos extremos no que respeita aos raios guiados na geometria da Fig. 5.2. O percurso mais curto ocorre para $\theta_i = 0$ e corresponde a uma distância exactamente igual ao comprimento da fibra, L . O percurso mais longo ocorre para o ângulo $\theta_i = \theta_{i,\max}$, dado pela Eq. (5.3), e corresponde a uma distância $L/\sin \phi_c$. Considerando a velocidade de propagação $v = c/n_1$, o atraso temporal é dado por:

$$\Delta T = \frac{n_1}{c} \left(\frac{L}{\sin \phi_c} - L \right) = \frac{L}{c} \frac{n_1^2}{n_2} \Delta \quad (1)$$

sendo

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (2)$$

Num sistema de comunicação por fibra óptica, o atraso temporal ΔT deve ser menor que o tempo de bit $T_B = 1/B$, sendo B o ritmo de transmissão. Deste modo, usando a Eq. (1), tem-se que o produto do ritmo de transmissão pela distância percorrida deve satisfazer a condição:

$$BL < \frac{n_2}{n_1^2} \frac{c}{\Delta} \approx \frac{1}{n_1} \frac{c}{\Delta} \quad (3)$$

O resultado final é válido se $n_1 \approx n_2$.

b) Usando a Eq. (1), tem-se

$$B < \frac{1}{\Delta T} = \frac{c}{n_1 L} \left(\frac{\sin \phi_c}{1 - \sin \phi_c} \right) \quad (4)$$

Para os dois casos considerados, obtém-se

- i) $B < 0.04 \text{ Mb/s}$
- ii) $B < 10 \text{ Mb/s}$

Conclui-se, assim, que a introdução de uma bainha com um índice de refracção próximo do índice de refracção do núcleo permite aumentar significativamente o ritmo de transmissão.

PR 5.4. Considere uma fibra óptica em que o núcleo tem um índice de refracção $n_1 = 1.465$ e a bainha tem um índice de refracção $n_2 = 1.460$. Determine

- a) o valor máximo do raio do núcleo para se ter uma fibra monomodo e
- b) o número de modos guiados quando esse raio é $a = 16 \mu\text{m}$. Considere que a luz tem um comprimento de onda $\lambda = 1.25 \mu\text{m}$.

Resolução

a) O valor máximo do raio que garante um regime monomodo para a fibra pode ser calculado a partir da condição

$$V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.4048 \quad (1)$$

Da Eq. (1) obtém-se o valor máximo do raio do núcleo para se ter uma fibra monomodo:

$$a < \frac{2.4048}{k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = \frac{2.4048}{2\pi \sqrt{(1.465)^2 - (1.46)^2}} (1.25 \times 10^{-6}) = 3.95 \mu\text{m} \quad (2)$$

b) O número V da fibra cujo núcleo tem um raio $a = 16 \mu\text{m}$ é:

$$V = \frac{2\pi}{.25 \times 10^{-6}} 16 \times 10^{-6} \sqrt{(1.465)^2 - (1.46)^2} = 9.73 \quad (3)$$

Para uma fibra multimodo com um valor elevado de V , o número de modos guiados é dado aproximadamente por $V^2/2$. Neste caso, tem-se

$$n_{\max} = \frac{1}{2}V^2 = 47 \quad (4)$$

PR 5.5. Mostre que, no caso de uma fibra com índice gradual apresentando um perfil parabólico ($\alpha = 2$ na Eq. (5.8)), um raio meridional lançado na fibra segundo um ângulo θ_0 com o eixo tem uma trajectória sinusoidal, sendo a distância ao eixo dada por

$$r = b \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \left(\frac{z}{b \cos \theta_0} \right)$$

onde $b = a / \sqrt{2\Delta}$.

Resolução

Para descrever a propagação de um raio luminoso numa fibra com índice gradual, torna-se conveniente considerar a equação da eikonal em coordenadas cilíndricas:

$$|\vec{\nabla}L|^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 = n^2(r) \quad (1)$$

Verifica-se facilmente que a eikonal deste problema se pode apresentar na forma:

$$L(r, \phi, z) = \int \left(n^2 - \frac{c_2^2}{r^2} - c_1^2 \right)^{1/2} dr + c_2 \phi + c_1 z + c_0 \quad (2)$$

onde c_0, c_1 e c_2 são constantes.

A equação diferencial da trajectória do raio luminoso é dada pela Eq. (1.53):

$$\vec{\nabla}L = n\hat{s} \quad (3)$$

onde

$$\hat{s} = \frac{d\vec{R}}{dR} \quad (4)$$

e \vec{R} é o vector de posição. Exprimindo este vector em coordenadas cilíndricas e diferenciando, obtém-se:

$$d\vec{R} = dr\hat{u}_r + rd\phi\hat{u}_\phi + dz\hat{u}_z \quad (5)$$

A partir das Eq.s (1)-(5), obtém-se as equações:

$$n \frac{dr}{dR} = \frac{\partial L}{\partial r} = \sqrt{n^2 - \frac{c_2^2}{r^2} - c_1^2} \quad (6)$$

$$nr^2 \frac{d\phi}{dR} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = c_2 \quad (7)$$

$$n \frac{dz}{dR} = \frac{\partial L}{\partial z} = c_1 \quad (8)$$

Suponhamos que o ponto de incidência do raio à entrada da fibra coincide com a origem das coordenadas ($z = 0$, $r = 0$, $\phi = 0$) e que a direcção inicial desse raio faz um ângulo θ_0 com o eixo dos z . Nestas condições, as constantes c_2 e c_1 obtidas a partir das Eq.s (7) e (8) são:

$$c_2 = 0, \quad c_1 = n_1 \cos \theta_0 \quad (9)$$

Verifica-se que, para as condições de lançamento consideradas, o raio não abandona o plano meridional $\phi = 0$.

Para se obter a trajectória do raio, pode-se dividir, membro a membro, a Eqs (6) e (8), introduzindo depois a Eq. (5.8) com $\alpha = 2$ e substituindo as constantes c_2 e c_1 pelos resultados anteriores. Chega-se então à equação:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - 2\Delta(r/a)^2}}{\cos \theta_0} \quad (10)$$

A integração da Eq. (10) permite obter o resultado:

$$r = b \sin \theta_0 \operatorname{sen} \left(\frac{z}{b \cos \theta_0} \right) \quad (11)$$

onde $b = a / \sqrt{2\Delta}$. Verifica-se da Eq. (11) que o raio tem uma trajectória sinusoidal, com uma amplitude $A = b \sin \theta_0$ e um período espacial $z_p = 2\pi b \cos \theta_0$.

No caso de as condições iniciais do lançamento do raio não serem as assumidas anteriormente, a solução do problema será mais complexa. Em geral, o raio guiado não se restringe ao plano meridional e apresenta uma trajectória helicoidal.

PR 5.6. No caso de uma fibra monomodo com um grau de birrefringência δ , a potência é trocada periodicamente entre os dois modos ortogonais. Encontre uma expressão para o período dessa troca.

Resolução

Numa fibra monomodo birrefringente, o modo polarizado segundo o eixo dos x (y) tem uma constante de propagação $\beta_x = n_x \omega / c$ ($\beta_y = n_y \omega / c$), onde n_x (n_y) é o índice de refracção efectivo para esse modo. O eixo ao longo do qual o índice de refracção é inferior (superior) é chamado eixo rápido (lento), dado que a velocidade de grupo é superior (inferior) para a luz que se propaga nessa direcção. Tem-se

$$\Delta\beta = \beta_x - \beta_y = \frac{\omega}{c} \Delta n_{\text{eff}} \quad (1)$$

onde $\Delta n_{\text{eff}} = n_x - n_y$.

Considere-se o campo óptico dado na forma:

$$\vec{E}(z) = \exp(i\beta_x z) [E_{0x} \hat{i} + E_{0y} \exp(-i\Delta\beta z) \hat{j}] \quad (2)$$

onde E_{0x} e E_{0y} são as amplitudes iniciais segundo os eixos x e y , respectivamente. A Eq. (2) descreve uma onda cujo estado de polarização evolui de uma polarização linear para uma polarização elíptica, retornando depois

à polarização linear inicial quando $\Delta\beta z = 2\pi$. O período espacial deste processo, conhecido como *distância de batimento*, é dado por:

$$L_b = \frac{2\pi}{|\Delta\beta|} = \frac{\lambda}{\delta} \quad (3)$$

sendo δ dado pela Eq. (5.28).

PR 5.7. Mostre que o atraso relativo, Δt_D , no tempo de chegada da informação nas frequências ω_1 e ω_2 , depois de percorrida uma distância z , devido à dispersão da velocidade de grupo é dada por:

$$\Delta t_D = -\beta_2(\omega_2 - \omega_1)z$$

Comente o resultado em função dos regimes de dispersão possíveis.

Resolução

O atraso relativo, Δt_D , no tempo de chegada da informação nas frequências ω_1 e ω_2 , depois de percorrida uma distância z , é dado pela diferença dos respectivos tempos de propagação, $t_i = z/v_g(\omega_i)$:

$$\Delta t_D = t_1 - t_2 = \frac{z}{v_g(\omega_1)} - \frac{z}{v_g(\omega_2)} = \frac{|v_g(\omega_2) - v_g(\omega_1)|z}{v_g(\omega_2)v_g(\omega_1)} . \quad (1)$$

Expandindo no numerador $v_g(\omega_i)$ em série de Taylor em torno de uma dada frequência ω_0 e assumindo que, no denominador, $v_g(\omega_1)v_g(\omega_2) \approx v_g^2$, tem-se

$$\Delta t_D = \frac{\frac{dv_g}{d\omega}(\omega_2 - \omega_1)z}{v_g^2} \quad (2)$$

Considerando que, pela Eq. (5.34), se tem

$$\beta_2 = -\frac{dv_g/d\omega}{v_g^2} \quad (3)$$

a Eq. (2) pode apresentar-se na forma:

$$\Delta t_D = -\beta_2(\omega_2 - \omega_1)z \quad (4)$$

A Eq. (4) mostra que a diferença no tempo de chegada das duas frequências é proporcional à dispersão da velocidade de grupo, β_2 , à diferença das frequências, $\omega_2 - \omega_1$, e à distância de propagação, z . Se $\beta_2 < 0$ (regime de dispersão anómala) as frequências mais elevadas chegam primeiro, enquanto para $\beta_2 > 0$ (regime de dispersão normal) acontece o contrário.

PR 5.8. Considere um impulso Gaussiano, descrito pela Eq. (5.36), lançado na entrada ($z = 0$) de uma fibra óptica, que apresenta uma dispersão da velocidade de grupo β_2 . Obtenha uma expressão para o impulso após ter percorrido uma distância z na fibra e verifique que a largura do impulso evolui de acordo com Eq (5.37).

Resolução

O espectro do impulso à entrada da fibra é obtido calculando a transformada de Fourier da Eq. (5.36):

$$E(0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right\} \exp\{i(\omega - \omega_0)t\} dt = \frac{E_0 t_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t_0^2(\omega - \omega_0)^2}{2}\right\} \quad (1)$$

Cada componente espectral do impulso percorre a distância z na fibra com uma constante de propagação $\beta(\omega)$, experimentando uma variação da fase $\beta(\omega)z$. Deste modo, a função que descreve o impulso no domínio do tempo na posição z é dada pela transformada de Fourier inversa:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(0, \omega) \exp\{i[\beta(\omega)z - \omega t]\} d\omega \quad (2)$$

Expandindo a constante de propagação até ao termo de segunda ordem, tem-se:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)^2 \quad (3)$$

onde $\beta_0 = \beta(\omega_0)$, $d\beta/d\omega = 1/v_g$ e $d^2\beta/d\omega^2 = \beta_2$. Substituindo a Eq. (3) na Eq. (2) e realizando a integração, obtém-se

$$E(z, t) = \frac{E_0}{(1 + \sigma^2)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{(t - z/v_g)^2}{2t_p^2(z)}\right\} \exp\{i[\beta_0 z - \phi(z, t)]\} \quad (4)$$

onde

$$\phi(z, t) = \omega_0 t + \kappa \left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2 - \frac{1}{2} t g^{-1}(\sigma) \quad (5)$$

$$\kappa = \frac{\sigma}{2(1 + \sigma^2)t_o^2}, \quad (6)$$

$$\sigma = \frac{\beta_2 z}{t_o^2} \quad (7)$$

$$t_p^2(z) = t_o^2(1 + \sigma^2) \quad (8)$$

A Eq. (8) corresponde à Eq. (5.37) e dá a meia largura no ponto 1/e da intensidade do impulso, $t_p(z)$, depois de percorrida uma distância z na fibra.

PR 5.9. Com base no resultado obtido no problema PR 5.8,

- a) mostre que a energia do impulso se mantém constante durante a propagação na fibra e
- b) caracterize o trinado do impulso para os regimes de dispersão normal e anómala.

Resolução

a) A energia do impulso é proporcional ao produto do pico da intensidade pela largura do impulso. Da Eq. (4) do problema PR 5.8 tem-se que o pico de intensidade numa posição arbitrária z é dada por:

$$|E'_0|^2 = \frac{|E_0|^2}{(1 + \sigma^2)^{1/2}} \quad (1)$$

Usando a Eq. (8) do problema PR 5.8, tem-se

$$|E_0|^2 t_p = \frac{|E_0|^2}{(1 + \sigma^2)^{1/2}} t_0 (1 + \sigma^2)^{1/2} = |E_0|^2 t_0 \quad (2)$$

Este resultado mostra que a energia do impulso numa posição arbitrária é igual ao seu valor inicial.

b) A Eq. (5) do problema PR 5.8 mostra que a fase do impulso varia com o quadrado do tempo. Como consequência, a frequência instantânea também varia com o tempo, pelo que o impulso se encontra trinado. A frequência instantânea é dada pela derivada da fase em ordem ao tempo:

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + 2\kappa \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \quad (3)$$

A taxa de variação da frequência com o tempo é dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 2\kappa \quad (4)$$

Este resultado mostra que no regime de dispersão normal ($\kappa > 0$) a frequência instantânea numa dada posição z aumenta com o tempo. Como consequência, o espectro na parte da frente do impulso é desviado para o vermelho, enquanto na parte de trás é desviado para o azul. Por outro lado, no regime de dispersão anómala ($\kappa < 0$) a frequência instantânea decresce com o tempo. Neste caso, o espectro na parte da frente do impulso é desviado para o azul, enquanto na parte de trás é desviado para o vermelho. Estas características do trinado são ilustradas na Fig. 5.7

PR 5.10. Considerando as Eq.s (5.38) e (5.39) para as potências nas duas fibras de um acoplador, obtenha a distância mínima z ao fim da qual

- a) toda a potência se transfere da fibra de entrada para a outra fibra e
- b) o acoplador funciona como um divisor de potência 50:50.

Resolução

a) Verifica-se das Eq.s (5.38) e (5.39) que para

$$z = (2p+1) \frac{\pi}{2\mu}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

se tem $P_1(z) = 0$, $P_2(z) = P_1(0)$, pelo que a toda a potência lançada na fibra 1 se encontra na fibra 2. A distância mínima ao fim da qual isso acontece é dada por:

$$z_a = \frac{\pi}{2\mu} \quad (2)$$

Esta distância é conhecida como a *distância de acoplamento*.

b) Se a distância de interacção do acoplador linear for $z = L = \pi / 4\mu$, verifica-se das Eq.s (5.38) e (5.39) que as potências à saída de cada uma das fibras do acoplador são

$$P_1(L) = P_2(L) = \frac{1}{2} P_1(0), \quad (3)$$

Ou seja, o acoplador direccional funciona neste caso como um divisor de potência 50:50. Atendendo a que a constante de acoplamento, μ , varia com o comprimento de onda, este resultado verifica-se, em rigor, apenas para um determinado comprimento de onda.

PR 5.11. Mostre que, dada a dependência da constante de acoplamento com o comprimento de onda da luz, se pode usar um acoplador direccional, para realizar a desmultiplexagem de um sinal com dois comprimentos de onda, λ_1 e λ_2 .

Resolução

Considere-se um acoplador direccional com comprimento L constituído por fibras idênticas e com constantes de acoplamento μ_1 e μ_2 , correspondentes aos comprimentos de onda λ_1 e λ_2 , respectivamente, tais que

$$\mu_1 L = p\pi \quad (1)$$

e

$$\mu_2 L = (2p+1)\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Nestas circunstâncias, suponhamos que é lançada luz com esses dois comprimentos de onda em simultâneo numa das fibras do acoplador, de tal modo que

$$P_l(0) = P_l(\lambda_1, 0) + P_l(\lambda_2, 0) \quad (3)$$

Neste caso, tem-se para a luz com comprimento de onda λ_1 que

$$P_2(\lambda_1, L) = P_l(\lambda_1, 0) \operatorname{sen}^2(\mu_1 L) = 0 \quad (4)$$

enquanto para a luz com comprimento de onda λ_2 se tem

$$P_2(\lambda_2, L) = P_l(\lambda_2, 0) \operatorname{sen}^2(\mu_2 L) = P_l(\lambda_2, 0) \quad (5)$$

Ou seja, a luz com comprimento de onda λ_1 sairá pela fibra de entrada, enquanto a luz com comprimento de onda λ_2 sairá pela outra fibra, conseguindo-se assim realizar a desmultiplexagem desejada.

PR 5.12. Verifica-se ser possível medir com o sensor interferométrico de Mach-Zehnder variações de fase da ordem de 10^{-6} rad. Considerando que a luz usada tem um comprimento de onda $\lambda = 1\mu\text{m}$, determine a variação correspondente do comprimento da fibra.

Resolução

Uma variação da fase $\Delta\psi$ corresponde a uma variação do comprimento da fibra dada por:

$$\Delta l = \frac{\Delta\psi}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}n\right)} \quad (1)$$

Considerando o valor referido para a variação mínima da fase e supondo que o índice de refracção do núcleo da fibra é $n = 1.5$, tem-se

$$\Delta l = \frac{10^{-6}}{\left(\frac{(2)(3.14)}{10^{-6}}(1.5)\right)} \approx 10^{-13} \text{ m} \quad (2)$$

Ou seja, o sensor pode medir variações do comprimento da fibra da ordem de um décimo de pm.

5.11. Problemas propostos

PP 5.1. Mostre que, no caso de uma fibra óptica em que os índices de refracção do núcleo e da bainha são muito próximos, a abertura numérica pode apresentar-se na forma dada pelas Eq.s (5.5) e (5.6).

PP 5.2. A diferença entre os índices de refracção do núcleo e da bainha de uma fibra óptica com índice em degrau é de 1%. Calcule o índice de refracção do núcleo sabendo que a abertura numérica da fibra é $AN = 0.18$.

PP 5.3. Num sistema de comunicações, a atenuação da fibra óptica é de 0.5 dB/km, existindo uma atenuação adicional de 1dB nas junções, cujo espaçamento é de 10 km. Calcule o comprimento máximo que esse sistema pode ter, sabendo que a potência debitada pelo laser emissor é de 1.5 mW e que o nível de detecção limiar é de $2\mu\text{W}$.

PP 5.4. Considere uma fibra óptica com índice em degrau, tendo um núcleo de raio $a = 25 \mu\text{m}$ e índice de refracção $n_1 = 1.475$, e uma bainha com índice $n_2 = 1.460$.

- Obtenha o valor máximo do ângulo entre o raio e o eixo da fibra para o qual o raio pode ser guiado.
- Calcule o número de reflexões na interface núcleo/bainha que sofreria um raio propagando-se segundo esse ângulo numa fibra com 1 km de comprimento.
- Assumindo que em cada uma das reflexões da alínea anterior se verifica uma atenuação da potência de 0.01%, calcule a atenuação total em dB/km.

PP 5.5. Determine o ritmo máximo de transmissão determinado pela dispersão intermodal para o caso de uma fibra óptica com as características referidas no problema anterior e comprimento $L = 20 \text{ km}$.

PP 5.6. Assumindo que a solução da Eq. (5.11) é dada na forma $E_{oz}(r, \phi, z) = F(r)\Phi(\phi)Z(z)$, mostre que se tem $Z(z) = \exp(i\beta z)$ e $\Phi(\phi) = \exp(im\phi)$, onde β é a constante de propagação e m é um número inteiro. Mostre ainda que $F(r)$ satisfaz a Eq. (5.13).

PP 5.7. Partindo das equações de Maxwell, obtenha as Eq.s (5.20)-(5.23) para as componentes transversais dos campos eléctrico e magnético.

PP 5.8. Considere uma fibra óptica com índice em degrau, com um núcleo de raio $a = 4 \mu\text{m}$ e índice de refracção $n_1 = 1.45$, assim como uma diferença relativa dos índices de refracção $\Delta = 3 \times 10^{-3}$. Diga para que valores do comprimento de onda esta será uma fibra monomodo.

PP 5.9. Explique a origem da birrefringência modal nas fibras ópticas e a razão por que ela determina em geral um alargamento temporal dos impulsos.

PP 5.10. A diferença entre as constantes de propagação, $\Delta\beta$, dos dois modos polarizados ortogonalmente numa fibra birrefringente, dada pela Eq. (1) do problema PR 5.6, determina um atraso temporal relativo, $\Delta\tau$, entre eles, dado por $\Delta\tau = Ld(\Delta\beta)/d\omega$, sendo L o comprimento da fibra.

- Mostre que esse atraso temporal se pode escrever na forma:

$$\Delta\tau = \frac{L}{c} \left(\Delta n_{eff} + \omega \frac{d\Delta n_{eff}}{d\omega} \right)$$

onde $\Delta n_{eff} = n_x - n_y$.

b) Desprezando a dispersão de Δn_{eff} , mostre que o atraso temporal correspondente à distância de batimento, dada pela Eq. (3) do problema PR 5.6, é $\Delta\tau_b = 1/f$, sendo f a frequência da luz transmitida na fibra.

PP 5.11. Uma fibra com três metros de comprimento é usada como sensor interferométrico das variações de temperatura. O índice de refracção da fibra é $n = 1.46$, enquanto que a variação desse índice de refracção com a temperatura é dada pelo coeficiente $dn/dT = 1.5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ e o coeficiente de expansão térmica linear do material da fibra é $\sigma = 6.5 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1}$. Determine a menor variação de temperatura que pode ser detectada, assumindo que a resolução do sensor, em termos da variação de fase da luz, é de 0.1 rad.

PP 5.12. Um impulso Gaussiano propaga-se numa fibra óptica que apresenta dispersão da velocidade de grupo $\beta_2 = 20 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$. A largura do impulso aumenta com a distância de propagação de acordo com a Eq (5.37). Calcule a distância percorrida pelo impulso se a sua largura aumentar vinte vezes relativamente ao valor inicial $t_0 = 5 \text{ ps}$.

5.12. Referências bibliográficas

1. A. G. Ghatak e K. Thyagarathan, *An Introduction to Fiber Optics*, Cambridge University Press, 1998.
2. A. Kaiser, *Optical Fibre Communications*, 4th Ed., McGraw-Hill, 2010.
3. J. C. Palais, *Fiber Optic Communications*, 4th Ed., Prentice Hall, 1998.
4. J. M. Senior, *Optical Fibre Communications: Principles and Practice*, 3th Ed., Pearson Education, 2009.
5. A. W. Snyder e J. D. Love, *Optical Waveguide Theory*, Chapman Hall, 1983.
6. M. F. Ferreira, *Nonlinear Effects in Optical Fibers*, John Wiley & Sons, 2011.

Capítulo 6

LASERS E LUZ LASER

Os lasers constituem uma importante ferramenta no âmbito da investigação que se faz hoje em praticamente todas as áreas da ciência. Por outro lado, eles são usados em variadas aplicações no nosso dia-a-dia, desde a leitura de códigos de barras até aos leitores de CD, ou no domínio da tecnologia, desde as comunicações ópticas até ao processamento de materiais ou à medicina.

O processo de *emissão estimulada* constitui a base do funcionamento do laser e foi demonstrado teoricamente por Albert Einstein já em 1917. Contudo, apenas nos primeiros anos da década de cinquenta do século passado, na sequência dos trabalhos de Charles H. Townes (EUA), Alexander M. Prokhorov e Nikolai G. Basov (ex-União Soviética), se conseguiu pôr a funcionar um dispositivo de microondas que amplificava a radiação através desse processo de emissão estimulada. Este dispositivo foi designado por MASER, um acrônimo da expressão inglesa “Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation”. Em 1958, Charles H. Townes e Arthur L. Schawlow publicaram um artigo em que discutiam a extensão dos princípios do maser à região óptica do espectro electromagnético. O funcionamento do chamado maser óptico, ou laser, foi conseguido pela primeira vez por Theodore H. Maiman em Junho de 1960, que utilizou para o efeito, como meio activo, um pequeno cristal sintético de rubi rosa, com faces paralelas entre si, perpendiculares ao eixo e espelhadas, instalado no eixo de uma lâmpada de descarga gasosa helicoidal. Desde então, uma grande variedade de lasers foram sendo desenvolvidos.

Qualquer tipo de laser é constituído por três elementos essenciais (Fig. 6.1): (1) um *meio activo*, ou seja, um conjunto de átomos, moléculas ou iões (designados a seguir genericamente por ‘átomos’) capaz de emitir radiação óptica; (2) uma fonte de *bombeamento de energia* capaz de excitar os átomos do meio activo; e (3) uma *cavidade ressonante*, constituída por dois espelhos nos quais o feixe de radiação é sucessivamente reflectido, obrigando-o a passar um número elevado de vezes através do meio activo. Nas secções seguintes abordar-se-á separadamente cada um destes aspectos.

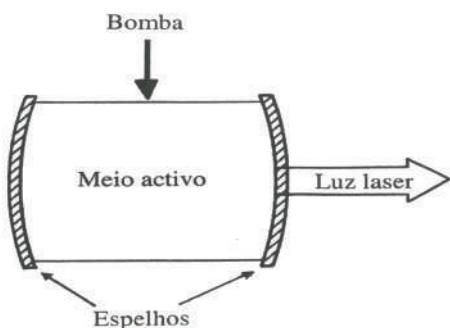


Figura 6.1 – Representação dos elementos essenciais de um laser: o meio activo, a fonte de bombeamento e a cavidade ressonante.

6.1. O meio activo - Absorção e emissão de radiação

Considere-se um meio activo cujos átomos são caracterizados por dois estados de energia: o estado fundamental, de energia E_0 , e um estado excitado, de energia E_1 ($E_1 > E_0$). Na presença de radiação com uma frequência

$$\nu_{10} = \frac{E_1 - E_0}{h} \quad (6.1)$$

onde $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s é a constante de Planck, verifica-se a passagem de alguns átomos do estado fundamental para o estado excitado. Este processo designa-se por *absorção estimulada*.

Uma vez no estado excitado, um átomo pode emitir um fotão de energia ν_{10} e regressar ao seu estado fundamental. Este processo pode ocorrer sem qualquer influência externa, sendo então designado por *emissão espontânea*, ou ser induzido por um fotão pré-existente com aquela mesma frequência, situação em que se fala de *emissão estimulada*. Neste último caso, o fotão emitido apresenta as mesmas características do fotão estimulante. A Fig. 6.2 ilustra os três processos de transição referidos.

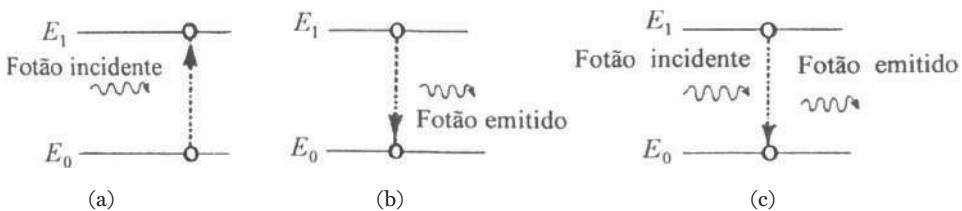


Figura 6.2 – Diagramas representativos dos processos de transição num meio activo:
(a) absorção estimulada, (b) emissão espontânea e (c) emissão estimulada.

As taxas dos três processos de transição referidos anteriormente encontram-se relacionadas entre si. No caso da emissão espontânea, a taxa respectiva é proporcional ao número de átomos, N_1 , que se encontram no estado excitado de energia E_1 , podendo escrever-se

$$\left(\frac{dN_0}{dt} \right)_{esp} = -\left(\frac{dN_1}{dt} \right)_{esp} = A_{10} N_1 \quad (6.2)$$

onde A_{10} é o chamado *coeficiente de Einstein para a emissão espontânea*. A população N_1 decresce com uma constante de tempo $\tau = 1/A_{10}$, verificando-se um despovoamento do nível com energia E_1 a um ritmo N_1/τ e um povoamento do nível com energia E_0 ao mesmo ritmo. A constante τ é conhecida por *tempo de vida da emissão espontânea*.

As transições relativas à absorção ou à emissão estimuladas ocorrem apenas na presença de radiação estimulante. No caso da absorção, Einstein postulou que a respectiva taxa de transição seria proporcional ao número de átomos no estado fundamental, N_0 , e à densidade espectral de energia do campo incidente $\rho(\nu_{10})$ (unidades de energia por unidade de volume por unidade de intervalo de frequência, $Jm^{-3} Hz^{-1}$) com frequência ν_{10} :

$$-\left(\frac{dN_0}{dt} \right)_{ab} = \left(\frac{dN_1}{dt} \right)_{ab} = B_{01} N_0 \rho(\nu_{10}) \quad (6.3)$$

onde a constante de proporcionalidade, B_{01} , é o chamado *coeficiente de Einstein para a absorção estimulada*. De modo semelhante, a taxa de transição para o processo de emissão estimulada é proporcional ao número de átomos no estado excitado, N_1 , e à densidade espectral de energia do campo incidente $\rho(v_{10})$, tendo-se:

$$\left(\frac{dN_0}{dt} \right)_{est} = -\left(\frac{dN_1}{dt} \right)_{est} = B_{10} N_1 \rho(v_{10}) \quad (6.4)$$

onde B_{10} é o chamado *coeficiente de Einstein para a emissão estimulada*.

Numa situação de equilíbrio térmico, verifica-se um balanço entre os três processos anteriores, traduzido pela condição

$$A_{10} N_1 + B_{10} N_1 \rho(v_{10}) = B_{01} N_0 \rho(v_{10}) \quad (6.5)$$

As populações N_1 e N_0 encontram-se relacionadas através da chamada *distribuição de Boltzman*:

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{N_0} &= \exp\left(-\frac{E_1 - E_0}{k_B T}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{hv_{10}}{k_B T}\right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde T é a temperatura absoluta e k_B é a constante de Boltzman.

Das Eq.s (6.5) e (6.6) tem-se

$$\begin{aligned} \rho(v_{10}) &= \frac{A_{10}}{B_{01}(N_0/N_1) - B_{10}} \\ &= \frac{A_{10}}{B_{01} \exp(hv_{10}/k_B T) - B_{10}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Por outro lado, a densidade espectral de energia $\rho(v)$ é dada pela *lei da radiação de Planck*:

$$\rho(v_{10}) = \frac{8\pi h v_{10}^3}{c^3} \frac{1}{\exp(hv_{10}/k_B T) - 1} \quad (6.8)$$

As Eq.s (6.7) e (6.8) conduzem à igualdade:

$$\frac{A_{10}}{B_{01} \exp(hv_{10}/k_B T) - B_{10}} = \frac{8\pi h v_{10}^3}{c^3} \frac{1}{\exp(hv_{10}/k_B T) - 1} \quad (6.9)$$

A Eq. (6.9) é satisfeita quando

$$A_{10} = \frac{8\pi h v_{10}^3}{c^3} B_{10} \quad (6.10)$$

e

$$B_{01} = B_{10} \quad (6.11)$$

As Eq.s (6.10) e (6.11) são designadas por *relações de Einstein*. Elas podem ser generalizadas a um par arbitrário de estados de energia atómicos, E_i e E_j ($E_j > E_i$), substituindo E_0 por E_i e E_1 por E_j .

Da discussão anterior ressaltam duas ideias importantes para se conseguir o funcionamento de um laser. A primeira tem que ver com a existência de um processo, a *emissão estimulada*, que proporciona a amplificação da luz. A segunda refere-se à necessidade de se conseguir a *inversão da população* nos dois níveis de energia dos átomos do meio activo, de tal modo que o efeito dessa emissão estimulada seja superior ao efeito contrário, devido à absorção estimulada.

6.2. Coeficientes de absorção e de ganho

Considere-se um feixe colimado de luz monocromática, de frequência $v_{ij} = (E_j - E_i)/h$, que se propaga na direcção do eixo dos z e passa por um meio activo homogéneo. A variação da intensidade entre dois planos situados em z e $z + \Delta z$ é dada por:

$$\begin{aligned}\Delta I(z) &= I(z + \Delta z) - I(z) \\ &= -\alpha I(z)\Delta z\end{aligned}\tag{6.12}$$

onde α é o chamado *coeficiente de absorção* e o sinal menos traduz a redução da intensidade determinada pela absorção.

A Eq. (6.12) pode ser escrita na forma de uma equação diferencial:

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\alpha I(z)\tag{6.13}$$

A solução da Eq. (6.13) é dada por:

$$I(z) = I(0) \exp(-\alpha z)\tag{6.14}$$

sendo $I(0)$ a intensidade à entrada do meio activo. A Eq. (6.14) mostra que a intensidade decresce exponencialmente quando o feixe se propaga num meio em que o efeito da absorção é dominante.

Se, ao passar pelo meio activo, o número de emissões estimuladas exceder o número de absorções, a intensidade aumentará em vez de diminuir. O número de emissões estimuladas depende da densidade espectral de energia $\rho(\nu)$, que se relaciona com a intensidade na forma

$$\rho(\nu) = \frac{I(\nu)}{c}\tag{6.15}$$

Assumindo que o feixe é constituído por radiação perfeitamente monocromática, mostra-se no Problema PR 6.3 que a evolução da intensidade no meio activo é dada por

$$I(z) = I(0) \exp(\beta z) \quad (6.16)$$

onde β é o chamado *coeficiente de ganho*, dado por:

$$\beta = (n_j - n_i) \frac{c^2 A_{ij}}{8\pi h v_{ij}^2} \quad (6.17)$$

sendo n_i e n_j as densidades de população nos níveis de energia inferior e superior, respectivamente.

Pode-se ver da Eq. (6.17) que se $n_j > n_i$ então β é positivo e a intensidade aumenta com a distância. Este processo, que consiste na amplificação da luz por emissão estimulada, constitui a base para o funcionamento dos lasers.

A amplificação da luz por emissão estimulada é possível apenas quando a população do nível superior de energia excede a população do nível inferior, condição conhecida por *inversão da população*. Esta situação pode ser atingida através de um bombeamento adequado do meio activo. O facto de o coeficiente de ganho dado pela Eq. (6.17) ser inversamente proporcional ao quadrado da frequência v_{ij} indica que será mais difícil construir lasers emitindo luz na região do ultravioleta do que na região do infravermelho.

6.3. Bombeamento do laser

Considerando um par arbitrário de estados de energia E_i e E_j ($E_j > E_i$), a Eq. (6.6) assume a forma:

$$\frac{N_j}{N_i} = \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta E_{ji}}{k_B T}\right) \quad (6.18)$$

onde $\Delta E_{ji} = E_j - E_i$. Quando $k_B T \ll \Delta E_{ji}$ a razão anterior é bastante pequena e praticamente não existem átomos no estado excitado. Por outro lado, para temperaturas suficientemente elevadas, situação em que $k_B T \gg \Delta E_{ji}$, a população no nível de energia E_j aproxima-se da população no nível E_i . De qualquer modo, numa situação de equilíbrio térmico, a população no nível de energia E_j nunca pode ser superior à população no nível E_i . Para se conseguir a inversão de população, os átomos devem ser excitados - ou bombeados - por recurso a uma fonte externa de energia.

O bombeamento do meio activo de um laser pode ser de natureza óptica, eléctrica, química ou térmica. No caso dos lasers gasosos, o método de bombeamento mais habitual consiste numa descarga eléctrica. Em alguns lasers deste tipo, os electrões livres, gerados no processo da descarga, colidem e excitam directamente os átomos do meio activo. Noutros lasers gasosos, a excitação ocorre através de colisões inelásticas entre átomos. Neste caso, usa-se uma mistura de dois gases, tais que as duas espécies de átomos têm estados excitados idênticos. Um exemplo é o laser de He-Ne, no qual os átomos de néon (Ne) são excitados por transferência de energia fornecida pelos átomos de hélio (He) que se encontram num estado meta-estável. Os átomos de hélio recebem essa energia dos electrões livres que com eles colidem.

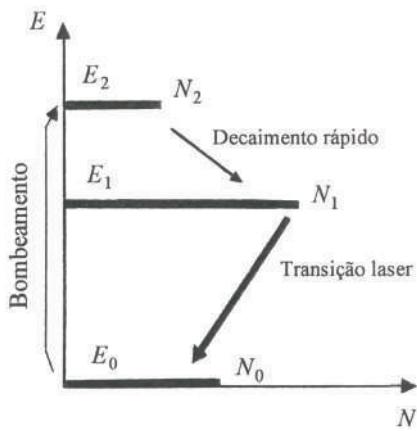


Figura 6.3 – Distribuição da população num sistema de três níveis.

Um dos esquemas possíveis para o bombeamento do laser faz uso de três níveis de energia, como se representa na Fig. 6.3. Quando os átomos do meio activo são excitados pela fonte de bombeamento, uma parte deles passa do estado fundamental ao estado com energia mais elevada, E_2 , de onde decaem depois para o estado meta-estável de energia E_1 . Verifica-se a inversão da população quando a população deste último estado é superior à do estado fundamental. Para que esta situação seja atingida facilmente é necessário que a transição de E_2 para E_1 seja rápida.

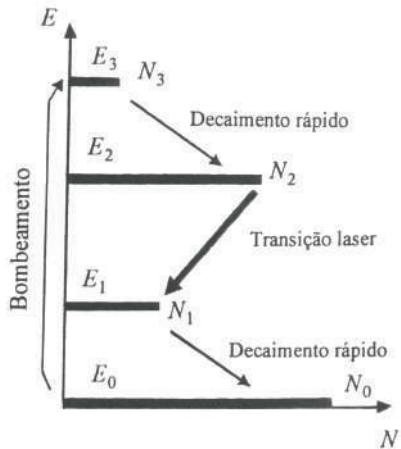


Figura 6.4 – Distribuição da população num sistema de quatro níveis.

No caso de um sistema de três níveis, são necessárias potências de bombeamento relativamente elevadas, dado que o estado final da transição laser é o estado fundamental e mais de metade dos átomos neste nível devem ser bombeados para o estado excitado de modo a verificar-se a inversão da população. Contudo, a potência de bombeamento pode ser bastante reduzida no caso de um esquema com quatro níveis, como se ilustra na Fig. 6.4. Neste caso, os átomos do estado fundamental são excitados através do bombeamento para o nível de energia mais elevado, E_3 , a partir do qual eles decaem para o estado meta-estável de energia E_2 . Se as transições de E_3 para E_2 e de E_2 para E_0 forem rápidas comparativamente com a transição de E_2 para E_1 , a inversão da população, nesta última transição, pode ser conseguida com valores modestos da potência de bombeamento.

Os esquemas de bombeamento de alguns tipos de lasers são bastante mais complexos que os esquemas de três ou de quatro níveis referidos anteriormente. Contudo, estes esquemas podem constituir excelentes modelos para um grande número de lasers reais.

6.4. Realimentação óptica

A amplificação proporcionada pelo meio activo quando a luz o atravessa uma única vez é, em geral, relativamente baixa. Contudo, esta limitação pode ser ultrapassada usando espelhos, com os quais o comprimento efectivo do meio amplificador se torna um múltiplo elevado do comprimento do laser. Os espelhos proporcionam a realimentação óptica do sistema e formam uma *cavidade óptica ressonante* que suporta oscilações electro-magnéticas com a frequência da transição laser. A oscilação tem origem na emissão espontânea de radiação, que é posteriormente amplificada, até se atingir um certo estado estacionário. No regime estacionário, toda a energia adicional proporcionada pelo processo de emissão estimulada serve para alimentar a potência de saída do laser.

6.4.1. Condição limiar de um laser

Considere-se que o meio activo preenche completamente a região entre os dois espelhos, E_1 e E_2 , do laser e que o bombeamento é uniforme. Quando a radiação se desloca desde o espelho E_1 até ao espelho E_2 , a intensidade aumenta desde o seu valor inicial I_0 até um valor I dado por:

$$I = I_0 \exp\{(\beta - \alpha_p)d\} \quad (6.19)$$

onde d é a separação entre os espelhos, β é o coeficiente de ganho e α_p são as perdas devidas à dispersão e eventual absorção por parte dos constituintes não-activos do laser. Depois da reflexão no espelho E_2 , a razão entre a intensidade reflectida e a intensidade inicial I_0 é dada por $r_2^2 \exp\{(\beta - \alpha_p)d\}$, sendo r_2 o coeficiente de reflexão em amplitude do espelho. Após uma volta no meio activo e uma reflexão no espelho E_1 , a razão entre as intensidades final, I_f , e inicial, I_0 , é dado por:

$$\frac{I_f}{I_0} \equiv G = r_1^2 r_2^2 \exp\{2(\beta - \alpha_p)d\} \quad (6.20)$$

onde r_1 o coeficiente de reflexão em amplitude do espelho E_1 .

O parâmetro G , dado pela Eq. (6.20), representa o ganho líquido em potência numa volta do laser. Se $G > 1$, verifica-se a amplificação da radiação com frequência igual à frequência de ressonância do laser, o que corresponde a um aumento das oscilações da cavidade. Por outro lado, se $G < 1$, as oscilações no interior da cavidade acabam por desaparecer. A *condição limiar de oscilação* do laser é dada por $G = 1$. Apenas quando esta condição é verificada durante um certo tempo a potência de saída do laser adquire um valor estacionário.

Fazendo $G = 1$ na Eq. (6.20) pode-se obter o seguinte resultado para o valor limiar do coeficiente de ganho, β_{lim} :

$$\beta_{\text{lim}} = \alpha_p + \frac{1}{d} \ln\left(\frac{1}{r_1 r_2}\right) = \alpha_p + \alpha_0 \quad (6.21)$$

onde

$$\alpha_0 = \frac{1}{d} \ln\left(\frac{1}{r_1 r_2}\right) \quad (6.22)$$

Verifica-se da Eq. (6.21) que, no regime estacionário, o ganho deve ser igual à soma das perdas por absorção pelo material (α_p) com as perdas correspondentes à emissão de luz para o exterior (α_0). A estabilização do coeficiente de ganho no seu valor limiar é habitualmente referida como *saturação do ganho*.

6.4.2. Modos longitudinais

Os espelhos de um laser formam uma cavidade ressonante na qual a luz pode ser armazenada por múltiplas reflexões entre eles. Apenas para certas frequências da luz essas sucessivas reflexões estão em fase, ou seja, a diferença de fase entre elas satisfaz a relação:

$$\Delta\varphi = 2\pi p, \quad p \text{ inteiro} \quad (6.23)$$

pelo que as ondas reflectidas constituem réplicas das ondas iniciais. A condição para que isto se verifique é que o comprimento da cavidade seja um múltiplo de meio comprimento de onda:

$$d = p \frac{\lambda}{2} = p \frac{\lambda_0}{2n}, \quad p \text{ inteiro} \quad (6.24)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda da luz no vazio e n é o índice de refração do meio activo. Dado que p pode ser um número inteiro qualquer, existem vários comprimentos de onda, dentro da linha de transição do laser, que satisfazem a condição anterior. Os campos correspondentes a esses diferentes comprimentos de onda são designados por *modos longitudinais*, ou *axiais*. A frequência destes modos é dada por:

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} = p \frac{c}{2nd} \quad (6.25)$$

Desprezando-se a dependência do índice de refracção com a frequência, a diferença de frequências entre modos longitudinais vizinhos é dada por:

$$\Delta\nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c}{2nd} \quad (6.26)$$

Se se considerar um laser gasoso, em que $n \approx 1$, e um espaçamento entre os espelhos $d = 30$ cm, obtém-se para a separação entre as frequências modais o resultado $\Delta\nu = 500$ MHz. Dado que a largura das linhas de transição laser é geralmente bastante superior a 500 MHz, verifica-se a possibilidade de o laser emitir luz em várias frequências discretas, separadas entre si de $c/(2d)$.

6.4.3. Condição de estabilidade da cavidade ressonante

Em muitos casos, a cavidade ressonante é constituída por espelhos esféricos, dado que eles proporcionam geralmente uma configuração mais estável para o confinamento da luz comparativamente a outros tipos de espelhos. Na Fig. 6.5 representa-se o caso em que esses espelhos têm raios R_1 e R_2 e se encontram centrados no eixo dos z , separados de uma distância d . Os espelhos podem ser côncavos ($R < 0$) ou convexos ($R > 0$). Um espelho plano corresponde ao caso $R = \infty$.

Pode-se usar o método matricial, apresentado no Capítulo 2, para determinar as condições de confinamento dos raios luminosos na cavidade ressonante. De facto, uma cavidade ressonante é um exemplo de um sistema óptico periódico, dado que os raios luminosos percorrem o mesmo sistema repetidamente.

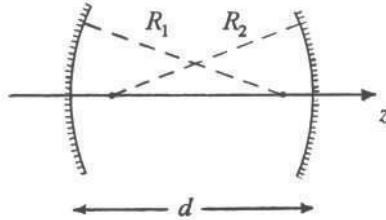


Figura 6.5 – Geometria de uma cavidade ressonante constituída por espelhos esféricos côncavos.

Mostra-se no problema PR 6.6 que a condição de estabilidade para a cavidade ressonante é dada por:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (6.27)$$

onde

$$g_1 = 1 + \frac{d}{R_1} \quad \text{e} \quad g_2 = 1 + \frac{d}{R_2} \quad (6.28)$$

são os chamados *parâmetros g* da cavidade. A condição (6.27) também é conhecida como *condição de confinamento*. Quando esta condição não é verificada a cavidade ressonante diz-se *instável*. No caso de se ter alguma das igualdades na Eq. (6.27) a cavidade é *condicionalmente estável*.

6.5. Taxa de bombeamento e intensidade do campo óptico

Considerando as transições dominantes para o caso de um sistema de quatro níveis, análogo ao representado na Fig. 6.4, mostra-se no problema PR 6.10 que, no estado estacionário, a diferença de população $N_2 - N_1$ dos dois níveis envolvidos na transição lasers é dada por:

$$N_2 - N_1 = \frac{R(A_{10} - A_{21})}{A_{10} \left[A_{21} + A_{21} \left(\frac{I}{c} \right) \right]} \quad (6.29)$$

onde R é a taxa de bombeamento do nível fundamental para o nível de energia mais elevado, I é a intensidade do campo óptico na cavidade do laser, c é a velocidade da luz no vazio, A_{21} , A_{10} e B_{21} são os coeficientes de Einstein para as transições entre os níveis 0, 1, e 2. Verifica-se da Eq. (6.29) que apenas quando $A_{21} < A_{10}$ o numerador é positivo e se consegue atingir a inversão da população.

Abaixo do limiar, a emissão estimulada a partir do nível superior da transição laser é pequena, dado que a intensidade na cavidade, I , é também bastante baixa. Nestas circunstâncias, a Eq. (6.29) pode ser, aproximadamente, escrita na forma:

$$N_2 - N_1 \approx R \left(\frac{1}{A_{21}} - \frac{1}{A_{10}} \right) \quad (6.30)$$

Verifica-se que, neste regime, a diferença de população aumenta linearmente com a taxa de bombeamento.

No limiar, a intensidade I é ainda relativamente pequena, pelo que a diferença de população nesse caso, ΔN_l , é dada pela Eq. (6.30) com $R = R_l$. O valor limiar da taxa de bombeamento, R_l , é dado então por:

$$R_l = \Delta N_l \frac{A_{21} A_{10}}{A_{10} - A_{21}} \quad (6.31)$$

No estado estacionário, a diferença de população não excede o seu valor no limiar, ΔN_l . É de notar que o coeficiente de ganho β dado pela Eq. (6.17) é proporcional à diferença de populações e que o seu valor limiar é determinado pela soma das perdas por absorção pelo material com as perdas correspondentes à emissão de luz para o exterior, como se mostra na Eq. (6.21). Deste modo, para taxas de bombeamento superiores ao respectivo valor limiar, tem-se da Eq. (6.29) que:

$$\Delta N_l = \frac{R \left(1 - \frac{A_{21}}{A_{10}} \right)}{A_{21} + B_{21} \left(\frac{I}{c} \right)}, \quad \text{para } R > R_l \quad (6.32)$$

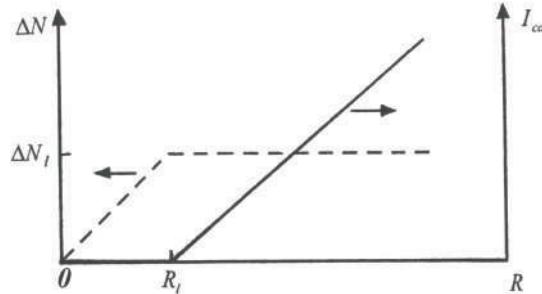


Figura 6.6 – Diferença de população e intensidade do campo óptico na cavidade em função da taxa de bombeamento.

Usando as Eq.s (6.31) e (6.32), pode-se escrever a intensidade do campo óptico na cavidade em função da taxa de bombeamento R do modo seguinte:

$$I_{cav} = \left[\frac{R - R_l}{R_l} \right] \frac{c}{B_{21}} A_{21} \quad (6.33)$$

Verifica-se deste resultado que a intensidade aumenta linearmente uma vez ultrapassada a condição limiar. Na Fig. 6.6 representa-se ΔN e I_{cav} em função da taxa de bombeamento R .

6.6. Lasers semicondutores

Os lasers semicondutores foram inventados em 1962, mas a sua utilização tornou-se corrente apenas na década de setenta do século XX, depois de se ter conseguido o seu funcionamento contínuo à temperatura ambiente. O desenvolvimento que experimentaram desde então foi de tal ordem que eles são, actualmente, de entre todos os tipos de lasers, os mais importantes do ponto de vista económico.

As aplicações dos lasers semicondutores são actualmente muito variadas, podendo referir-se, nomeadamente, a sua utilização no âmbito dos sistemas de comunicação por fibra óptica, nos leitores dos códigos de barras, nas impressoras laser, nos leitores de CDs, etc.. No caso dos sistemas de comunicação por fibra óptica, a preferência pelo lasers semicondutores tem que ver com as suas reduzidas dimensões (tipicamente inferiores a 1 mm), área de emissão compatível com as dimensões do núcleo das fibras, elevada eficiência, adequado comprimento de onda da luz emitida e possibilidade de modulação directa a frequências bastante elevadas.

6.6.1. Amplificação óptica num semicondutor

Se E_1 e E_2 forem as energias dos estados do electrão na banda de valência e na banda de condução, respectivamente, a probabilidade de ocorrer a absorção de um fotão com energia $h\nu = E_2 - E_1$ numa situação de quase-equilíbrio é dada por:

$$P_{ab}(\nu) = f_v(E_1)[1 - f_c(E_2)] \quad (6.34)$$

onde f_c e f_v representam as funções de distribuição nas bandas de condução e de valência, respectivamente, dadas por:

$$f_c(E) = \frac{1}{1 + e^{-(E-E_f)/k_bT}} \quad (6.35)$$

e

$$f_v(E) = \frac{1}{1 + e^{-(E-E_f)/k_bT}} \quad (6.36)$$

sendo E_{fc} e E_{fv} os chamados *quase-níveis de Fermi*. É de notar que, se $f_v(E_1)$ representa a probabilidade da ocupação de um estado na banda de valência com energia E_1 , $[1 - f_c(E_2)]$ dá a probabilidade de um estado na banda de condução com energia E_2 estar desocupado.

A probabilidade de ocorrer a emissão de um fotão com a mesma energia $h\nu = E_2 - E_1$ é dada por:

$$P_{em}(\nu) = f_c(E_2)[1 - f_v(E_1)] \quad (6.37)$$

O processo de emissão dominará sobre o processo de absorção se se verificar a condição:

$$P_{em}(\nu) > P_{ab}(\nu) \quad (6.38)$$

Usando as Eq.s (6.34)-(6.37), a Eq. (6.38) resulta na condição:

$$E_{fc} - E_{fv} > h\nu \quad (6.39)$$

Dado que deve ter-se $h\nu \geq E_b$, sendo E_b a banda de energia proibida, segue-se que

$$E_{fc} - E_{fv} > E_b \quad (6.40)$$

A Eq. (6.40) representa a condição necessária para se ter amplificação óptica num meio semicondutor, sendo equivalente à condição de inversão da população para um sistema atómico. Pode verificar-se que não é possível ter amplificação óptica num semicondutor em equilíbrio térmico.

6.6.2. Díodos emissores de luz e lasers semicondutores

A aplicação de uma diferença de potencial externa no sentido directo a uma junção p-n, dá origem a uma corrente através da junção nesse mesmo sentido: os electrões do lado n da junção são injectados na região p, enquanto que as lacunas da região p são injectadas na região n. Neste processo, verifica-se a recombinação destes dois tipos de portadores, dando origem a radiação óptica através do processo de emissão espontânea. Este fenómeno é designado por *electroluminiscência de injecção*, sendo a base do funcionamento dos *díodos emissores de luz* (LEDs, de Light-Emitting Diodes).

A potência emitida por um LED aumenta continuamente com a corrente de injecção, como se mostra na Fig. 6.7 Contudo, para correntes de injecção elevadas, a potência de saída satura, podendo atingir então valores na ordem de alguns miliwatts.

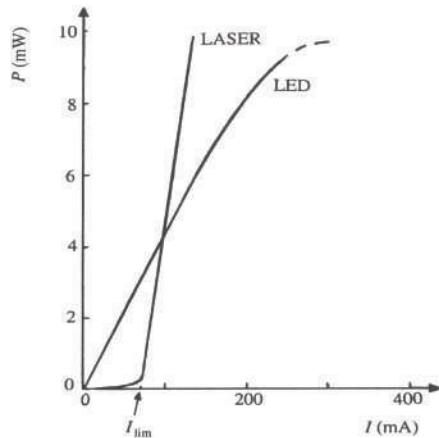


Figura 6.7 – Variação da potência emitida por um LED e por um laser semicondutor em função da corrente de injecção.

O espectro da luz emitida por um LED é geralmente bastante largo (da ordem de 30-80 nm). Este facto determina uma dispersão elevada quando o LED é usado em sistemas de comunicação por fibra óptica. Por outro lado, o facto de a emissão espontânea ser aleatória e se verificar em todas as direcções faz com que a luz emitida por um LED não seja muito direcionada, apresentando ângulos de divergência que variam desde cerca de 30°, perpendicularmente à junção, até cerca de 120°, paralelamente a essa mesma junção. Esta característica torna o acoplamento da luz às fibras ópticas monomodo pouco eficiente.

Em geral, não é possível satisfazer a condição (6.40) quando a junção p-n é formada a partir de semicondutores do tipo n e do tipo p dopados moderadamente. Contudo, essa condição pode ser satisfeita no caso de ambos os semicondutores estarem fortemente dopados ($\sim 0.1\%$) e a diferença de potencial aplicada ser também suficientemente elevada. Esta é a base do funcionamento dos *lasers semicondutores*.

Nos lasers semicondutores, as faces nas extremidades do cristal são cortadas paralelamente entre si e convenientemente polidas, de modo a formar uma cavidade ressonante. A grande diferença entre os índices de refracção no semicondutor ($n \approx 3.5$) e no ar ($n \approx 1.0$) faz com que a interface entre os dois meios apresente uma reflectância de cerca de 30%, que é suficiente para constituir aquela cavidade. Na Fig. 6.8 indicam-se as dimensões típicas de um laser semicondutor.

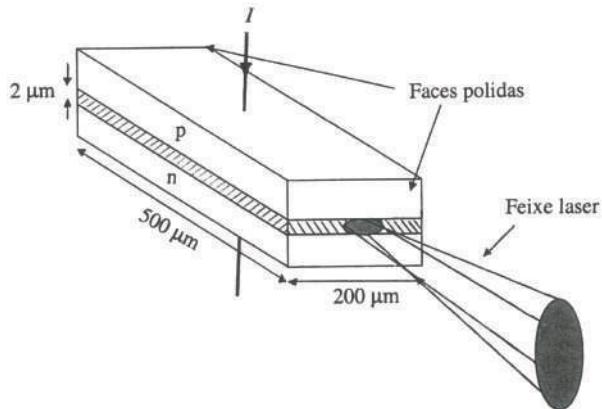


Figura 6.8 – Representação esquemática de um laser semicondutor.

Como foi discutido na Secção 6.5, um laser caracteriza-se pela existência de um valor limiar para a taxa de bombeamento. No caso de um laser semicondutor, o bombeamento é realizado através da corrente de injecção. Na Fig. 6.7 mostra-se a variação típica da potência à saída do laser com essa corrente. Verifica-se que abaixo de um determinado valor limiar da corrente, a potência emitida pelo laser é bastante baixa, enquanto que acima desse valor a potência emitida aumenta significativamente. Na realidade, o declive da curva acima do limiar é bastante superior ao da curva abaixo desse limiar. Abaixo do limiar, a luz emitida é devida essencialmente à emissão espontânea e o laser semicondutor comporta-se de modo semelhante a um LED.

Um parâmetro importante para caracterizar um laser semicondutor é a sua eficiência, dada pelo declive da curva da Fig. 6.7 acima do limiar. Se dI representar a variação da corrente através do diodo, então a variação do número de electrões injectados por unidade de tempo no laser é dI/e , onde e é a carga do electrão. Se dP representar a variação correspondente na potência de saída do laser, então a variação do número de fotões é dP/hv , onde v é a frequência da radiação. A *eficiência quântica externa* do laser é definida por:

$$\eta = \frac{dP/hv}{dI/e} = \frac{e}{hv} \frac{dP}{dI} \quad (6.41)$$

Os valores típicos de η para lasers semicondutores que funcionam no modo contínuo situam-se entre 0.25 e 0.6. A partir da Eq. (6.41) pode traduzir-se relação entre a potência à saída do laser e a corrente de injecção na forma:

$$P = \eta \frac{hv}{e} (I - I_{\text{lim}}) \quad (6.42)$$

onde I_{lim} é a *corrente limiar*, cujos valores típicos são da ordem de 25 – 250 mA. A corrente limiar varia com a temperatura, sendo essa dependência dada por:

$$I_{\text{lim}}(T) = I_0 e^{T/T_0} \quad (6.43)$$

onde I_0 é uma constante e T_0 é a chamada *temperatura característica do diodo*.

Quando é utilizado no âmbito dos sistemas ópticos de comunicação, torna-se necessário modular o feixe emitido pelo laser. Uma das propriedades mais interessantes dos lasers semicondutores é a possibilidade de realizar directamente essa modulação através da corrente de injecção. De facto, quando se varia esta corrente, a população de electrões e de lacunas na cavidade do laser também varia. Como consequência, o ganho é alterado, o que faz variar, por sua vez, a potência emitida pelo laser.

A dinâmica da modulação directa de um laser semicondutor é determinada por vários factores, nomeadamente pelos tempos de recombinação dos portadores e pelo tempo de vida dos fotões na cavidade do laser. O tempo de recombinação dos portadores devido à emissão estimulada depende da densidade de fotões dentro da cavidade e é da ordem de 10 ps. Quanto ao tempo de vida dos fotões, ele corresponde ao tempo médio que um fotão demora dentro da cavidade do laser antes de ser absorvido ou de ser emitido para o exterior, sendo dado por:

$$\tau_f = \frac{n}{c\beta_{\text{lim}}} \quad (6.44)$$

onde β_{lim} é o valor limiar do coeficiente de ganho, dado pela Eq. (6.21). Considerando valores típicos para os parâmetro envolvidos, tem-se $\tau_f \approx 2$ ps.

Devido ao curto tempo de vida dos portadores no processo de recombinação estimulada, os lasers semicondutores podem ser modulados com ritmos superiores a 20 GHz.

6.6.3. Lasers semicondutores de heterojunção

Na sua versão mais simples, o laser semicondutor usa o mesmo semicondutor em ambos os lados da junção p-n, sendo, por isso, designado por *laser de homojunção*. Este tipo de laser foi inventado em 1962 e o seu funcionamento só é possível no regime pulsado, dado que os valores típicos das suas correntes limiares são da ordem de algumas dezenas de amperes. Deste modo, o funcionamento em regime contínuo seria catastrófico para estes lasers.

Actualmente, a configuração básica utilizada na grande maioria dos lasers semicondutores é baseada numa *dupla heterojunção*. A heterojunção é formada entre dois semicondutores distintos, apresentando bandas proibidas diferentes. Os materiais típicos para este efeito são GaAs e AlGaAs. Para se obter uma dupla heterojunção, coloca-se uma camada fina de um dado material semicondutor (por exemplo, GaAs) entre duas camadas de material semicondutor com uma banda proibida maior (por exemplo, AlGaAs). Na Fig. 6.9 apresenta-se uma representação esquemática de um laser com dupla heterojunção.

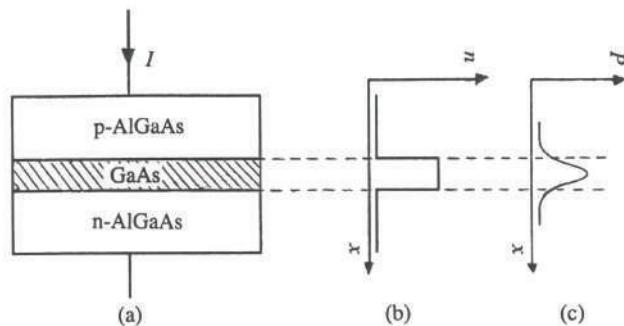


Figura 6.9 – (a) Diagrama de um laser semicondutor com dupla heterojunção, no qual a camada activa de GaAs se encontra intercalada entre as regiões *p* e *n* de AlGaAs; (b) variação do índice de refracção na heterojunção e (c) distribuição da potência óptica.

A heterojunção apresenta três vantagens importantes relativamente à homojunção. Em primeiro lugar, ela mantém os portadores de carga numa região limitada onde a sua recombinação se torna mais provável. Em segundo lugar, a região central activa apresenta um índice de refracção superior ao das camadas adjacentes (Fig. 6.9b), ajudando assim a confinar o campo óptico e aumentando a eficiência da emissão estimulada. Por fim, a absorção da luz nas regiões adjacentes à região activa é pouco significativa, de modo que as perdas são minimizadas. Estes três efeitos fazem com que a corrente limiar para o funcionamento do laser de heterojunção seja bastante inferior ao do laser de homojunção, permitindo o seu funcionamento no regime contínuo à temperatura ambiente.

As características de um laser de dupla heterojunção são significativamente alteradas quando a espessura da camada activa se torna comparável ao comprimento de onda de Broglie associado ao electrão ou à lacuna. Na dupla heterojunção os electrões e as lacunas estão confinados à região central, onde a separação entre bandas E_b é inferior à das regiões adjacentes. Ou seja, os electrões e as lacunas estão confinados a um poço de potencial, estando os seus níveis de energia dependentes das dimensões desse poço. Os lasers semicondutores baseados nestas estruturas são chamados *lasers de poços quânticos* e caracterizam-se por uma corrente limiar bastante baixa e um ganho elevado.

6.6.4. Materiais para os lasers semicondutores

A energia dos fotões emitidos por um laser semicondutor é próxima da energia correspondente à banda proibida, E_g . Num laser de GaAs, tem-se $E_g = 1.42$ eV e o comprimento de onda da luz emitida é cerca de 904 nm. A adição de Al à camada activa permite aumentar a banda proibida e diminuir consequentemente o comprimento de onda da luz emitida. Deste modo, é possível construir lasers baseados nas ligas AlGaAs/GaAs emitindo luz na banda de 780-880 nm. Estes lasers são bastante utilizados em variadas aplicações do dia-a-dia, nomeadamente em leitores de CDs, impressoras laser e sistemas de comunicação funcionando na região dos 850 nm.

A maior parte dos lasers semicondutores, actualmente existentes, são constituídos a partir de uma combinação de elementos do terceiro e do quinto grupos da Tabela Periódica, sendo, por isso, designados por lasers III-V. É o caso dos lasers baseados nas ligas ternárias AlGaAs e InGaAs ou na liga quaternária InGaAsP. Os lasers baseados nesta última liga são particularmente úteis no domínio das comunicações por fibras ópticas, dado que podem emitir luz com comprimentos de onda nas regiões de 1300 nm e 1550 nm, nas quais a atenuação dessas fibras é mínima.

O composto $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ é formado a partir do composto III-V binário InP, substituindo uma fracção x de átomos de In por Ga, que é outro elemento do grupo III, e uma fracção y de P por As, que é outro elemento do grupo V. Podem-se escolher as fracções x e y de tal modo que a banda proibida corresponda ao comprimento de onda pretendido. Consegue-se um acordo das redes de $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ e de InP quando $x \approx 0.45y$.

Os lasers baseados na combinação de elementos do segundo e sexto grupos da Tabela Periódica, designados por lasers II-VI, proporcionam luz na região do azul-verde. A emissão contínua de luz azul, a 410 nm, é possível, por exemplo, com um laser de InGaN.

6.6.5. Lasers semicondutores com um modo longitudinal

O facto de os lasers semicondutores apresentarem um espectro de emissão largo é indesejável na perspectiva dos sistemas de comunicação por fibra óptica, dado que determina uma grande dispersão dos impulsos. Para reduzir ao mínimo esta dispersão, o laser deverá oscilar num único modo longitudinal.

Um método eficaz para obter o funcionamento num único modo longitudinal consiste na introdução de componentes ou mecanismos na cavidade laser que provocam perdas para todos os modos longitudinais excepto para um deles. Deste modo, apenas um modo longitudinal - aquele para o qual o ganho excede as perdas - poderá satisfazer a condição de oscilação. Uma das técnicas que permite realizar este objectivo inclui o uso de cavidades externas, tendo-se então os chamados *lasers de cavidade externa* (LCE), como se representa na Fig. 6.10(a). Outra técnica para conseguir o funcionamento em modo único consiste no uso de redes de Bragg em uma ou em ambas as extremidades da região activa, como acontece nos lasers do tipo DBR (de “distributed Bragg reflector”), ilustrados na Fig. 6.10(b). Alternativamente, essas redes de Bragg podem ser aplicadas ao longo da própria região activa, obtendo-se então os lasers do tipo DFB (de “distributed feedback”) ilustrados na Fig. 6.10(c).

A reflexão proporcionada pelas redes de Bragg depende do comprimento de onda; as componentes reflectidas em cada passo da rede estão em fase se o período dessa rede, Λ , satisfaz a condição de Bragg

$$2n_{ef}\Lambda = m\lambda \quad (6.45)$$

onde n_{ef} é o índice de refracção efectivo e m é um número inteiro. Uma escolha adequada do período Λ permite seleccionar um único modo de oscilação do laser. Assumindo $n_{ef} \approx 3.5$ e para um comprimento de onda de 1550 nm, o período espacial da rede deverá ser 221 nm. Redes com períodos desta ordem de grandeza são geralmente fabricadas usando técnicas holográficas.

No caso dos lasers DFB, a rede de Bragg é formada numa camada situada por cima da camada activa. Deste modo, a realimentação óptica é distribuída ao longo de todo o comprimento da cavidade, sendo as faces do laser geralmente revestidas com um filme anti-reflector.

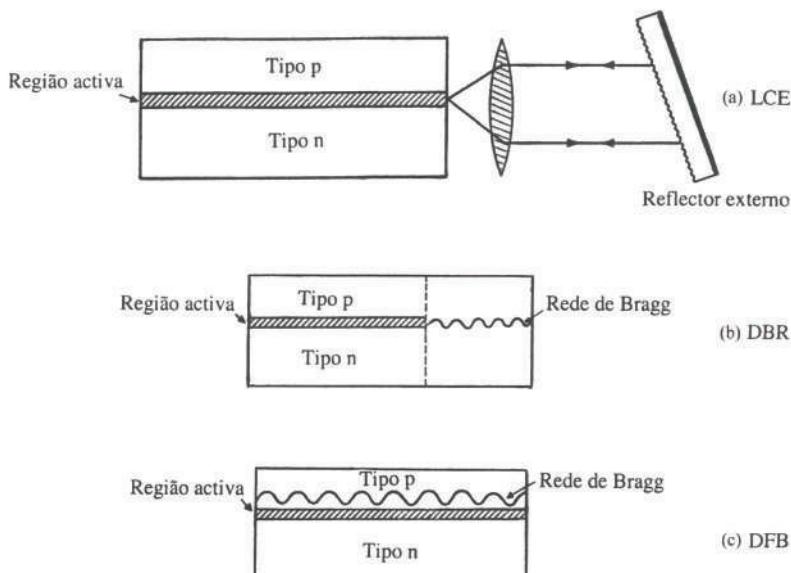


Figura 6.10 – Estruturas de lasers semicondutores susceptíveis de funcionar num único modo longitudinal: (a) laser de cavidade externa (LCE) ; (b) laser do tipo DBR; (c) laser do tipo DFB.

6.7. Outros lasers

Para além dos lasers semicondutores discutidos na secção anterior, existe actualmente uma grande variedade de lasers. Descreve-se a seguir, de modo sumário, dois outros tipos de lasers: o laser de rubi – o primeiro a ser desenvolvido - e o laser de Hélio-Néon.

6.7.1. O primeiro laser - laser de rubi

Como se referiu no início deste capítulo, o primeiro laser construído foi um laser cujo meio activo era constituído por um pequeno cristal sintético de rubi rosa, ou seja, um cristal de Al_2O_3 com cerca de 0.05% de Cr_2O_3 . O cristal apresentava faces paralelas entre si, perpendiculares ao eixo e parcialmente espelhadas (formando uma cavidade ressonante), encontrando-se instalado no eixo de uma lâmpada de descarga gasosa helicoidal (fonte de bombeamento).

O laser de rubi constitui um exemplo de um laser com três níveis. Quando se procede à descarga na lâmpada de bombeamento, verifica-se a excitação de muitos iões Cr^{3+} para bandas de absorção. Os iões excitados decaem através de transições não radiativas para um par de níveis intermédios metaestáveis, onde permanecem durante vários milissegundos até decaírem para o estado fundamental, emitindo uma radiação fluorescente vermelha centrada em 694.3 nm. Os laser de rubi são hoje utilizados como fontes pulsadas de radiação coerente e de grande intensidade, em interferometria, análise de plasmas, holografia, etc..

6.7.2. O laser de Hélio-Néon

Sete meses após a descoberta do laser de rubi por Maiman, Ali Javan, W. R. Bennett e D. R. Herriott mostraram a possibilidade de construir um laser com emissão contínua usando como meio activo um gás a baixa pressão, constituído por uma mistura de hélio e de néon. O laser de He-Ne é, actualmente, o laser mais popular, funcionando quase sempre no visível e fornecendo alguns miliwatts de potência contínua.

Os átomos de hélio são excitados através de uma descarga eléctrica. Quando um dos átomos metaestáveis de hélio, que apresenta uma vida média elevada, colide com um átomo de néon no estado fundamental, existe uma probabilidade elevada de se verificar uma transferência de energia para este átomo, excitando-o para um dos níveis 3s, enquanto o átomo de hélio regressa ao estado fundamental (Fig. 6.11). A inversão de população pode ser conseguida relativamente às transições entre os níveis 3s e 3p (emissão a $3.39 \mu\text{m}$), 3s e 2p ($632.8 \mu\text{m}$), 2s e 2p ($1.15 \mu\text{m}$).

Em contraste com o laser de rubi, o laser de Hélio-Néon proporciona uma emissão contínua de luz de elevada coerência. A cavidade do laser inclui, com frequência, espelhos externos e janelas de Brewster para eliminar perdas por reflexão. Noutras configurações, os espelhos encontram-se no interior ou constituem parte do próprio tubo de descarga.

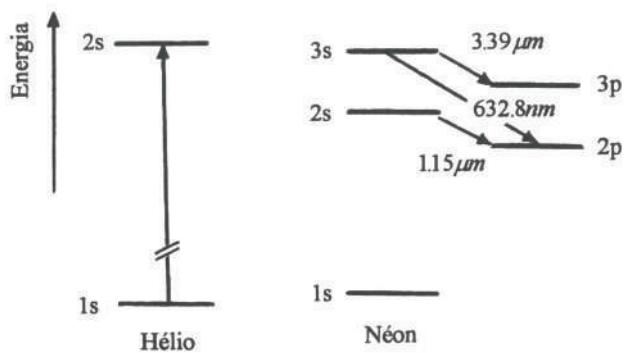


Figura 6.11 – Níveis de energia do laser de Hélio-Néon.

6.8. A luz laser

O processo de emissão estimulada, que é a base do funcionamento do laser, dá origem a uma multiplicidade de fotões com características idênticas, no que respeita à sua amplitude, fase e direcção de propagação. A luz laser resulta assim extraordinariamente coerente, quer em termos temporais, quer em termos espaciais, o que contrasta claramente com as características caóticas da luz emitida por emissão espontânea. A coerência da luz laser possibilita a sua focagem numa área com dimensões da ordem do comprimento de onda. A intensidade atingida nessa área pode ser de tal modo elevada que permite perfurar ou cortar materiais bastante duros. Os valores mais elevados do fluxo de potência são obtidos com lasers funcionando por impulsos ultra-curtos, cuja duração pode ser de apenas alguns fento-segundos.

6.8.1. O feixe laser

O feixe correspondente ao modo fundamental da cavidade laser (o chamado modo TEM_{00}) caracteriza-se por apresentar uma intensidade cuja variação radial é descrita por uma função Gaussiana do tipo

$$I(r) = I_0 \exp\left(\frac{-2r^2}{w^2}\right) \quad (6.46)$$

Na Eq. (6.46), r é a variável radial, I_0 é o valor máximo da intensidade obtido para $r=0$, e w é uma medida do raio do feixe, correspondendo à distância radial para a qual a amplitude do campo é reduzida de $1/e$ relativamente ao seu valor máximo. Este parâmetro assume um valor mínimo, w_0 , dentro da cavidade do laser, onde se situa a chamada *cintura do feixe*. O raio do feixe aumenta com a distância z relativamente a essa cintura (Fig. 6.12), sendo dada por:

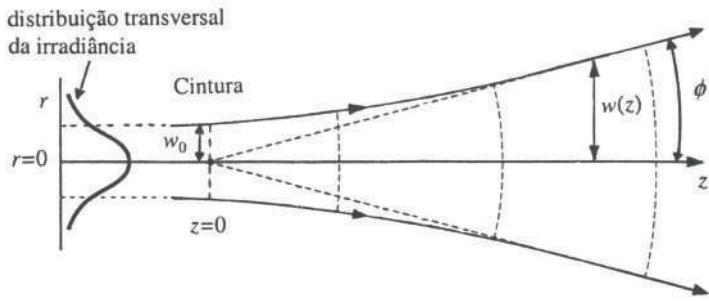


Figura 6.12 – Representação esquemática da propagação de um feixe Gaussiano ao longo do eixo dos z .

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.47)$$

Na sua cintura, o feixe Gaussiano tem uma frente de onda plana. A uma distância z dessa cintura, o raio de curvatura da frente de onda é:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (6.48)$$

Se as frentes de onda esféricas fossem concêntricas em torno de $z = 0$ deveria ter-se $R(z) = z$, o que não acontece na realidade. De facto, tem-se:

$$R(z) \approx z \quad (6.49)$$

apenas quando

$$z \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (6.50)$$

situação que corresponde ao chamado *campo longínquo*. Nesta região, a largura do feixe aumenta de um modo praticamente linear com a distância à cintura, sendo dada por:

$$w(z) \approx \frac{\lambda z}{\pi w_0} \quad (6.51)$$

6.8.2. Direccionalidade

A direccionalidade da luz laser será talvez a propriedade que mais facilmente prende a nossa atenção. Uma maneira simples de entender essa direccionalidade consiste em considerar os espelhos da cavidade laser como equivalentes a aberturas de colimação. De facto, esses espelhos apresentam, geralmente, uma reflectividade tão elevada que a luz gerada na cavidade laser é reflectida neles bastantes vezes, antes de ser transmitida para o exterior. As reflexões múltiplas aumentam a distância percorrida pela luz, a qual se mantém contudo confinada a

uma pequena região entre os espelhos. Devido à longa distância assim percorrida, a curvatura da frente de onda é bastante reduzida, pelo que a luz emitida resulta aproximadamente colimada.

O grau de direccionalidade de uma qualquer fonte de luz depende da monocromaticidade e da coerência da luz emitida. As fontes ordinárias não são nem monocromáticas nem coerentes. Por outro lado, um laser distingue-se precisamente por essas duas características, pelo que a luz por eles emitida apresenta também um elevado grau de direccionalidade.

De acordo com a Eq. (6.51), a largura do feixe laser aumenta linearmente com z quando a condição (6.50) é satisfeita. Dado que o semi-ângulo, ϕ , do cone de divergência do feixe é relativamente pequeno, pode fazer-se $\tan \phi \approx \phi$, tendo-se então (Fig. 6.12)

$$\phi = \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{0.64 \lambda}{D_0} \quad (6.52)$$

onde $D_0 = 2w_0$ é o diâmetro do feixe na cintura. É de notar que a divergência do feixe é tanto maior quanto menor for o diâmetro na cintura. A divergência típica do feixe emitido por um laser de He-Ne é da ordem de um milí-radiano, significando este valor que a dimensão do feixe aumenta de cerca de 1 mm por cada metro por ele percorrido.

O resultado dado pela Eq. (6.52) é semelhante ao obtido no capítulo 4 para o raio angular do disco de Airy correspondente ao padrão de difracção de Fraunhofer por uma abertura circular:

$$\theta = \frac{1.22 \lambda}{D} \quad (6.53)$$

sendo D o diâmetro da abertura. Tanto a Eq. (6.52) como a Eq. (6.53) dependem da razão entre o comprimento de onda e o diâmetro, diferindo apenas no factor constante. De facto, verifica-se que a divergência do feixe gaussiano é aproximadamente metade da divergência de uma onda plana difractada por uma abertura circular com um diâmetro igual ao desse feixe na cintura.

A semelhança entre as Eq.s (6.52) e (6.53) sugere que se possa interpretar a divergência do feixe laser, traduzida pela Eq. (6.52), em termos de difracção. Nesta perspectiva, a cintura do feixe corresponde a uma abertura circular efectiva, que se situa dentro da cavidade laser e cujo diâmetro poderá ser ajustado de modo a controlar a divergência do feixe. Note-se, contudo, que no caso da difracção de Fraunhofer por uma abertura circular esta abertura é real e que a luz nela incidente é constituída por ondas planas com intensidade uniforme. No caso de um feixe laser, a cintura não é de facto uma abertura e as frentes de onda nessa posição, embora sendo planas, apresentam uma intensidade que varia com a distância ao eixo de acordo com a função Gaussiana dada pela Eq. (6.46).

O diâmetro do feixe laser na cintura relaciona-se com o comprimento da cavidade resonante, L , e com o comprimento de onda, λ , na forma

$$D_0 = \left(\frac{2\lambda L}{\pi} \right)^{1/2} \quad (6.54)$$

6.8.3. Focagem e expansão do feixe laser

É habitual na óptica geométrica representar a focagem de um feixe colimado num simples ponto através do uso de uma lente convergente. Esse ponto imagem, contudo, não passa de uma idealização, devido, nomeadamente, às aberrações que afectam essa lente. O ideal de concentrar a luz numa mancha com um diâmetro extremamente

reduzido - aproximadamente igual ao comprimento de onda dessa luz - pode, no entanto, ser conseguido usando uma lente convergente para focar um feixe laser (Fig. 6.13).

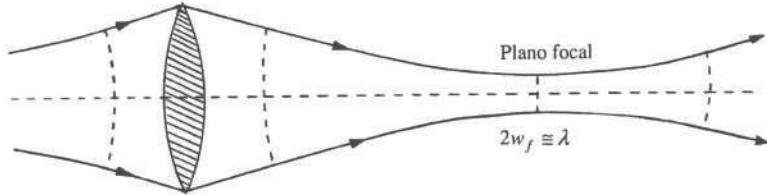


Figura 6.13 – Focagem de um feixe laser através de uma lente convergente.

Se o diâmetro d da lente for igual ao diâmetro do feixe laser a uma distância z da sua cintura, tem-se da Eq. (6.51) que

$$d = 2 \frac{\lambda z}{\pi w_0} \quad (6.55)$$

Por acção da lente, o feixe é focado e o seu diâmetro atinge um valor mínimo no plano focal, dado por

$$2w_f = \frac{4f\lambda}{\pi d} = \frac{4\lambda}{\pi} F \quad (6.56)$$

onde $F = f/d$ é o chamado *número-F*. No caso de se ter $F = 1$, verifica-se que o diâmetro do feixe no plano focal é, aproximadamente, igual ao comprimento de onda da luz.

Como consequência da focagem do feixe laser, a intensidade no plano focal da lente adquire geralmente valores muito elevados. Este facto permite realizar perfurações ou cortes muito finos em materiais bastante duros e, em geral, realizar operações industriais ou médicas em alvos com dimensões semelhantes ao comprimento de onda da luz. Na área da oftalmologia, por exemplo, são usados habitualmente lasers de Nd:YAG em cirurgias oculares, tendo-se então intensidade na ordem de 10^9 a 10^{12} W/cm².

O feixe laser pode ser expandido usando duas lentes convergentes, espaçadas de uma distância igual à soma das respectivas distâncias focais (Fig. 6.14). A primeira lente, com uma distância focal f_1 , foca o feixe colimado inicial, enquanto a segunda lente, com uma distância focal $f_2 > f_1$, volta a colimar o feixe já expandido. Neste processo, o diâmetro do feixe na cintura é aumentado de um factor igual à razão entre essas distâncias focais

$$\frac{D_e}{D_0} = \frac{f_2}{f_1} \quad (6.57)$$

Simultaneamente com a expansão do feixe, obtém-se igualmente uma diminuição do seu ângulo de divergência, dada pela razão $\frac{f_1}{f_2}$.

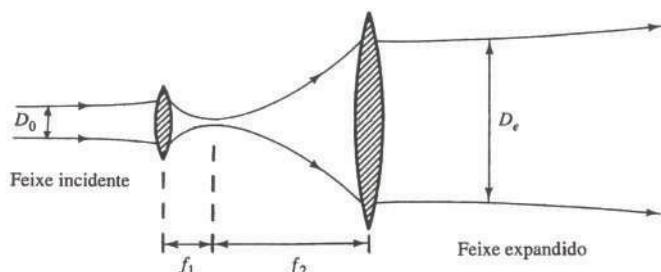


Figura 6.14 – Expansão de um feixe laser usando duas lentes convergentes.

6.8.4. Monocromaticidade

Do ponto de vista do investigador laboratorial, a propriedade mais importante da luz laser será talvez a sua extraordinária monocromaticidade. Todavia, mesmo a luz de um laser não é absolutamente monocromática, constituindo apenas uma boa aproximação a esse ideal.

O grau de monocromaticidade da luz emitida por uma dada fonte pode ser traduzido pela largura em comprimentos de onda, $\Delta\lambda$, da linha de emissão. Dependendo da fonte e do seu nível de excitação, a luz emitida pode corresponder a um espectro mais ou menos estreito. No caso da luz branca tem-se $\Delta\lambda \approx 300$ nm, enquanto que para uma lâmpada de descarga ordinária se tem $\Delta\lambda \approx 0.1$ nm e para uma lâmpada de cádmio de baixa pressão ($\lambda = 643.8$ nm) se tem $\Delta\lambda \approx 0.001$ nm.

No caso de um laser, o processo de emissão estimulada restringe consideravelmente a banda de comprimentos de onda emitidos durante a emissão espontânea. Deste modo, a largura espectral $\Delta\lambda$ é bastante reduzida, conduzindo a um elevado grau de monocromaticidade da luz emitida. Um laser de He-Ne monomodo ($\lambda = 632.8$ nm) apresenta uma largura $\Delta\lambda \approx 10^{-8}$ nm. Ou seja, um laser de He-Ne monomodo é 10 milhões de vezes mais monocromático do que uma lâmpada de descarga ordinária e cem mil vezes mais monocromática do que uma lâmpada de cádmio de baixa pressão.

6.8.5. Brilho

Outra característica importante da luz laser é o seu brilho, ou luminância. De facto, a luz laser caracteriza-se por uma potência radiante muito elevada, que flui no interior de um pequeno ângulo sólido sob a forma de um feixe com diâmetro reduzido. Uma lâmpada de incandescência, por exemplo, gera consideravelmente mais energia radiante que um laser contínuo de baixa potência, mas a sua emissão é incoerente, o feixe dispersa-se no interior de um ângulo sólido elevado e a largura de banda é significativa.

No caso de um laser de He-Ne ($\lambda = 632.8$ nm), 1 miliwatt de potência corresponde a um fluxo luminoso de 0.16 lm. Considerando um feixe com 1 mm de diâmetro e uma divergência de 1 mrad, a que corresponde um ângulo sólido de cerca de 10^{-6} sr, temos que o brilho (luminância) da luz desse laser é:

$$L_v \approx 2 \times 10^7 \text{ lm/sr.cm}^2 \quad (6.58)$$

Atendendo a que a largura espectral da luz emitida por um laser de He-Ne multimodo é aproximadamente 0.2 nm, a luminância espectral respectiva será $L_v(\lambda) = 10^8 \text{ lm/sr.cm}^2 \text{ nm}$.

Por outro lado, a luminância do sol é de apenas $1.5 \times 10^5 \text{ lm/sr.cm}^2$. Considerando que o espectro visível da luz solar tem uma largura de cerca de 300 nm, a luminância espectral do sol é $L_v(\lambda) = 5 \times 10^2 \text{ lm/sr.cm}^2 \text{ nm}$. Deste modo, conclui-se que um laser de He-Ne multimodo de apenas 1 mW de potência tem uma luminância espectral cinco a seis ordens de grandeza superior à luminância espectral do sol.

6.8.6. Coerência

A propriedade da coerência da luz pode ser entendida com base no conceito de correlação. Se a luz de uma dada fonte for completamente coerente, quer em termos espaciais quer em termos temporais, existirá então uma correlação perfeita entre as variações do campo eléctrico em dois pontos arbitrários do espaço. Tendo-se medido

uma vez as variações do campo eléctrico nesses dois pontos, será possível, num momento posterior, predizer, com absoluta certeza, o comportamento do campo num deles, medindo simplesmente o campo eléctrico no outro ponto.

Apenas a luz monocromática pode ser completamente coerente no espaço e no tempo. Como consequência, é fácil de entender por que razão o grau mais elevado de coerência entre todos os tipos de fontes se verifica nos lasers. É essa propriedade que permite a sua utilização em áreas como a holografia e a interferometria.

A coerência temporal de uma fonte está directamente relacionada com a largura do seu espectro de emissão, $\Delta\nu$. Essa coerência temporal é caracterizada pelo chamado *tempo de coerência* τ_c , durante o qual as componentes do espectro mantêm uma relação de fase fixa entre si, e que é dado por:

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (6.59)$$

O comprimento de coerência l_c é a distância percorrida durante o tempo de coerência, sendo dado por:

$$l_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu} \quad (6.60)$$

O comprimento de coerência de um laser de He-Ne vulgar, funcionando simultaneamente em vários modos, é de cerca de 50 cm. Contudo, no caso de um laser de He-Ne funcionando num modo único, a sua largura espectral é tipicamente de 1kHz, a que corresponde um comprimento de coerência de 300 km.

O comprimento de coerência pode ser medido usando um interferómetro de Michelson. No caso de lasers com largura espectral da ordem de 1 GHz, pode usar-se a configuração aberta deste interferómetro, descrita no capítulo 3, dado que as diferenças de percursos ópticos nos seus dois braços são, nesse caso, inferiores a 30 cm. Contudo, para lasers com largura espectral inferior a 1 MHz a diferença de percursos ópticos resulta superior a 300 m. Nestas circunstâncias, torna-se mais prático usar uma fibra óptica num dos braços do interferómetro de Michelson.

6.8.7. Granitado laser

Uma consequência imediata da coerência espacial da luz laser é o aparecimento do granitado laser (speckle), que ocorre quando o feixe laser é reflectido por superfícies difusoras. A luz difundida preenche a região circundante da superfície com um padrão de interferência estacionário, que apresenta uma estrutura granitada, constituída por grãos brilhantes e escuros. Verifica-se que as dimensões destes grãos se tornam mais reduzidas quando o observador se aproxima da superfície difusora.

Em qualquer ponto do espaço, o campo difundido resulta da sobreposição de um grande número de ondas difundidas. As diferenças de fase entre estas ondas são determinadas pelos percursos ópticos entre cada ponto da superfície difusora e o ponto de observação. Pequenos movimentos da vista alteram essas diferenças de fase e produzem um efeito de cintilação da estrutura granitada.

O granitado laser pode ser registado numa placa fotográfica. Um dado ponto desta placa recebe contribuições provenientes de toda a superfície iluminada. As fases relativas dessas múltiplas contribuições variam de modo significativo num ponto adjacente da placa para o qual a diferença de percursos, relativamente às extremidades da zona iluminada, varia de um comprimento de onda, λ .

A descrição anterior permite concluir que as dimensões do granitado laser podem ser obtidas tendo por base a experiência de Young descrita no Capítulo 3. Assim, suponhamos que a área iluminada tem um diâmetro h e que a distância entre esta área e o plano de observação é D (Fig. 6.15). Considerando os dois pontos extremos da área iluminada, o espaçamento, d , entre as franjas no plano de observação é dado por:

$$d = \lambda \frac{D}{h} \quad (6.61a)$$

Deste modo, para uma dada configuração ($\lambda = \text{const.}$, $L = \text{const.}$), tem-se $d \propto 1/h$; ou seja, o espaçamento entre as franjas aumenta quando a distância entre os dois pontos diminui. O espaçamento dado pela Eq. (6.61a) corresponde assim à menor dimensão possível para a estrutura do granitado laser. Atendendo a que a luz é difundida por toda a área iluminada e não apenas pelos dois pontos extremos considerados, a Eq. (6.61a) é apenas uma aproximação, tendo-se então

$$d \approx \lambda \frac{D}{h} \quad (6.61b)$$

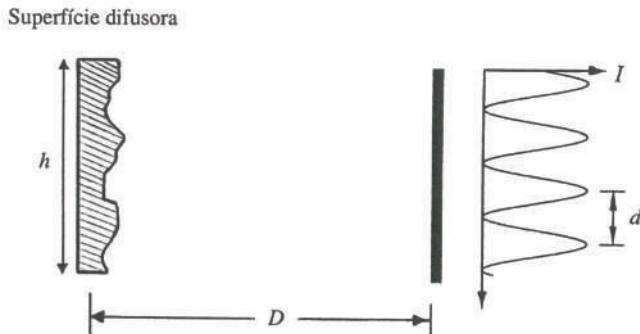


Figura 6.15 – Representação esquemática para a análise da dimensão do granitado laser objectivo.

O granitado laser, considerado anteriormente, é chamado granitado objectivo, dado que as suas características não estão dependentes de qualquer sistema de formação de imagem. Por contraste, chama-se granitado subjectivo àquele que é obtido através de um sistema de formação de imagem, como é o caso do olho humano.

Quando se olha para uma superfície iluminada por luz laser, a cada ponto dessa superfície corresponde a sua imagem na retina. Contudo, a pupila do olho funciona como uma abertura circular, que difracta a luz nela incidente, pelo que essa imagem não é pontual. Em consequência, a um dado ponto da retina chegam contribuições de diferentes pontos da superfície iluminada, sendo a fase de cada uma dessas contribuições aleatória. Forma-se assim um padrão de interferência com o aspecto de granitado.

A dimensão do granitado observado pela vista, d_v , é dada aproximadamente por:

$$d_v \approx \lambda \frac{D}{s} \quad (6.62)$$

onde λ é o comprimento de onda da luz, D é a distância da vista à superfície difusora e s é o diâmetro da pupila. Esta relação pode ser facilmente comprovada pala experiência. De facto, quando se fecha ligeiramente os olhos o granitado torna-se maior, o mesmo se verificando quando a distância entre a superfície e o observador aumenta.

O granitado não desaparece quando a vista é desfocada ou quando se retiram os óculos. Quando a cabeça se move, os caminhos ópticos desde os pontos na superfície iluminada até à retina são alterados, pelo que se observa, em geral, um movimento correspondente do padrão de granitado. No caso de um observador hipermetrópe, esse padrão move-se no mesmo sentido do movimento da cabeça. Contudo, para um observador míope, esse movimento verifica-se em sentido oposto. Um observador com visão perfeita não observará qualquer movimento.

O efeito do granitado laser é geralmente indesejável. No caso de imagens fotográficas, por exemplo, ele constitui um ruído de fundo inconveniente. Contudo, para além do seu interesse pedagógico, o granitado laser pode ser aproveitado com utilidade no campo da interferometria.

6.9. Problemas resolvidos

PR 6.1. Considere que o coeficiente de Einstein para a emissão espontânea numa transição correspondente a um comprimento de onda $\lambda = 600 \text{ nm}$ é $A_{10} = 10^5 / \text{s}$.

- Qual é o correspondente coeficiente de Einstein para a emissão estimulada?
- Qual deverá ser a intensidade dentro da cavidade para que a taxa de emissão estimulada seja três vezes superior à taxa de emissão espontânea?

Resolução

a) O coeficiente de Einstein para a emissão estimulada obtém-se a partir do coeficiente de Einstein para a emissão espontânea usando a Eq. (6.19), que pode ser reescrita na forma:

$$B_{10} = \frac{\lambda^3}{8\pi h} A_{10} \quad (1)$$

Substituindo os valores para os parâmetros, tem-se

$$B_{10} = 1.3 \times 10^{18} \text{ J}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}. \quad (2)$$

b) Usando as Eq.s (6.2), (6.4) e (6.15), tem-se que taxa de emissão estimulada será três vezes superior à taxa de emissão espontânea se

$$B_{10} \frac{I}{c} = 3A_{10} \quad (3)$$

Substituindo os valores de B_{10} , A_{10} e c , obtém-se

$$I = 6.9 \times 10^{-5} \text{ Wm}^{-2} \text{Hz}^{-1}. \quad (4)$$

PR 6.2. Considere um sistema atómico em que o estado fundamental tem energia E_0 e o primeiro estado excitado tem energia E_1 . A diferença entre essas energias corresponde a um fotão com comprimento de onda $\lambda = 600 \text{ nm}$.

- Determine a razão $\frac{N_1}{N_0}$ entre as populações dos dois níveis para uma temperatura $T = 300 \text{ K}$.
- Para que temperatura se tem $\frac{N_1}{N_0} = \frac{1}{2}$? Que conclusão pode tirar?

Resolução

- Tem-se

$$\begin{aligned} E_1 - E_0 &= h\nu = h\frac{c}{\lambda} \\ &= \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{600 \times 10^{-9}} \approx 3.31 \times 10^{-19} \text{ J} \end{aligned} \quad (1)$$

Para uma temperatura $T = 300$ K,

$$k_B T = 1.38 \times 10^{-23} \times 300 \approx 4.14 \times 10^{-21} \text{ J} \quad (2)$$

Deste modo, tem-se

$$\frac{N_1}{N_0} = \exp\left(-\frac{E_1 - E_0}{k_B T}\right) \approx 10^{-35} \quad (3)$$

Pode-se concluir deste resultado que será bastante improvável encontrar, à temperatura de 300 K, um átomo no estado excitado.

b) Fazendo $\frac{N_1}{N_0} = \frac{1}{2}$ na Eq. (6.6) e calculando o logaritmo de ambos os membros, tem-se

$$T = \frac{E_1 - E_0}{k_B (\ln 2)} = \frac{3.31 \times 10^{-19}}{(1.38 \times 10^{-23})(\ln 2)} = 34600 \text{ K} \quad (4)$$

Este valor é muito superior à temperatura na superfície do sol. Torna-se claro que, para se conseguir a inversão da população destes dois níveis, o aumento da temperatura não é a solução, devendo-se usar alguma forma de bombeamento de energia.

PR 6.3. Mostre que a evolução da intensidade de um feixe constituído por radiação perfeitamente monocromática num meio activo é dada por pelas Eq.s (6.16) e (6.17).

Resolução

O número de fotões, p_{ij} , ganhos em cada segundo pelo feixe ao passar pelo meio activo pode-se escrever à custa da intensidade nas posições z e $z + \Delta z$, na forma:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{ij}}{dt} &= [I(z + \Delta z) - I(z)] \frac{A}{h\nu_{ij}} \\ &= \frac{dI(z)}{dz} \Delta z \frac{A}{h\nu_{ij}} \end{aligned} \quad (1)$$

onde A é a área da secção do feixe e se assumiu na última igualdade que Δz era suficientemente pequeno. Por outro lado, a taxa de variação do número de fotões pode ser escrita em termos das taxas de emissão e de absorção estimuladas:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{ij}}{dt} &= N_j \frac{I(z)}{c} B_{ij} - N_i \frac{I(z)}{c} B_{ij} \\ &= B_{ij} (N_j - N_i) \frac{I(z)}{c} \end{aligned} \quad (2)$$

onde na última igualdade se usou a Eq. (6.11) e N_i e N_j são o número de átomos nos estados de energia inferior e superior, respectivamente, no elemento de volume considerado.

A partir das Eq.s (1) e (2) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\frac{dI(z)}{dz} &= B_{ij}(N_j - N_i) \frac{I(z)}{c} \frac{\hbar v_{ij}}{\Delta z A} \\ &= B_{ij}(n_j - n_i) \frac{\hbar v_{ij}}{c} I(z)\end{aligned}\quad (3)$$

onde $n_i = N_i / A\Delta z$ e $n_j = N_j / A\Delta z$ representam o número de átomos por unidade de volume, ou densidade de população, dos dois estados de energia.

Integrando a Eq. (3), obtém-se

$$I(z) = I(0) \exp(\beta z) \quad (4)$$

onde

$$\beta = B_{ij}(n_j - n_i) \frac{\hbar v_{ij}}{c} \quad (5)$$

é o coeficiente de ganho. Este coeficiente será positivo se $n_j > n_i$, ou seja, se se verificar a inversão da população. Usando a Eq. (6.10), pode-se escrever a Eq. (5) na forma

$$\beta = (n_j - n_i) \frac{c^2 A_{ij}}{8\pi v_{ij}^2} \quad (6)$$

PR 6.4. Um laser de Hélio-Néon emitindo a 632.8 nm tem uma cavidade ressonante formada por dois espelho planos espaçados de 0.5 m. Determine o número de modos longitudinais que contribuem para a emissão do laser, sabendo que a largura espectral da linha de emissão espontânea do Ne a 632.8 nm é de 0.0016 nm.

Resolução

De acordo com a Eq. (6.26), a separação em frequência entre modos longitudinais sucessivos do laser é

$$\begin{aligned}\Delta\nu &= \frac{c}{2d} \\ &= \frac{3 \times 10^8}{2(0.5)} = 3 \times 10^8 \text{ Hz}\end{aligned}\quad (1)$$

Por outro lado, a largura espectral no domínio das frequências da linha do Ne a 632.8 nm é

$$\begin{aligned}\Delta\nu' &= c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \\ &= 3 \times 10^8 \frac{1.6 \times 10^{-8}}{(632.8 \times 10^{-9})^2} = 12 \times 10^{-8} \text{ Hz}\end{aligned}\quad (2)$$

Deste modo, tem-se:

$$N^{\circ} \text{ modos} = \frac{\Delta\nu'}{\Delta\nu} = 4 \quad (3)$$

pelo que o laser funcionará com quatro modos longitudinais.

PR 6.5. Obtenha a matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ para o sistema unitário correspondente a uma volta na cavidade ressonante representada na figura 6.5.

Resolução

A matriz do sistema unitário correspondente a uma volta na cavidade ressonante representada na figura 6.5 é dada pelo produto de quatro matrizes: uma matriz de transferência (distância d) entre o espelho 1 e o espelho 2, uma matriz de reflexão no espelho 2 (raio R_2), uma matriz de transferência (distância d) entre o espelho 2 e o espelho 1 e uma matriz de reflexão no espelho 1 (raio R_1). Deste modo, tem-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Multiplicando as matrizes no membro direito da Eq. (1), obtém-se os seguintes resultados para os elementos da matriz do sistema:

$$A = 1 + \frac{2d}{R_2} \quad (2a)$$

$$B = 2d + \frac{2d^2}{R_2} \quad (2b)$$

$$C = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{4d}{R_1 R_2} \quad (2c)$$

$$D = \frac{4d}{R_1} + \frac{2d}{R_2} + \frac{4d^2}{R_1 R_2} + 1 \quad (2d)$$

PR 6.6. Mostre que a condição de estabilidade para a cavidade ressonante da Fig. 6.5 é dada pela Eq. (6.27).

Resolução

Se x_p e γ_p representarem a altura e a inclinação do raio, respectivamente, após p voltas na cavidade, os respectivos valores após $p+1$ voltas são dados pela seguinte relação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_{p+1} \\ \gamma_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \gamma_p \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ é a matriz unitária obtida no problema PR 6.5. Pode-se verificar que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = 1 \quad (2)$$

Nestas circunstâncias, como se viu no Capítulo 2, a solução da Eq. (1) é dada, na forma:

$$x_p = x_{\max} \sin(p\varphi + \varphi_0), \quad (3)$$

onde

$$\varphi = \cos^{-1} q, \quad (4)$$

$$q = \frac{A+D}{2} \quad (5)$$

Usando as Eqs (2a) e (2d) do problema PR 6.5, tem-se que

$$q = 2 \left(1 + \frac{d}{R_1} \right) \left(1 + \frac{d}{R_2} \right) - 1 \quad (6)$$

A solução dada pela Eq. (3) é válida se φ for real, o que acontece se

$$-1 \leq q \leq 1. \quad (7)$$

Introduzindo os parâmetros

$$g_1 = 1 + \frac{d}{R_1} \quad \text{e} \quad g_2 = 1 + \frac{d}{R_2} \quad (8)$$

a Eq. (7) pode ser apresentada na forma:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (9)$$

que corresponde à condição de estabilidade da cavidade ressonante.

PR 6.7. Obtenha uma expressão para o espaçamento em frequência, $\Delta\nu$, entre os modos longitudinais adjacentes de um laser semicondutor, tendo em consideração a dependência do seu índice de refracção, n , com a frequência, ν . Calcule esse espaçamento para o caso de um laser semicondutor de comprimento $l = 300 \mu\text{m}$ e índice de refracção $n = 3.6$, cuja variação com a frequência é tal que $\frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu} \approx 0.4$.

Resolução

As frequências correspondentes aos modos longitudinais de oscilação de um laser semicondutor são dadas pela condição de ressonância da cavidade, indicada na Eq. (6.25):

$$\nu = \frac{c}{2n(\nu)l} p, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

onde l é o comprimento da cavidade e $n(\nu)$ é o índice de refracção do material semicondutor.

O espaçamento $\Delta\nu$ entre frequências de oscilação adjacentes pode ser obtido da Eq. (1) na forma:

$$\Delta\nu = \nu_{p+1} - \nu_p = (p+1) \frac{c}{2n(\nu + \Delta\nu)l} - p \frac{c}{2n(\nu)l} \quad (2)$$

Pode-se usar uma expansão do índice de refracção na forma:

$$n(\nu + \Delta\nu) = n(\nu) + \frac{dn}{d\nu} \Delta\nu \quad (3)$$

obtendo-se então o resultado

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nl} \left(1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu} \right)^{-1} \quad (4)$$

Se se considerar os valores $n = 3.6$, $l = 300 \mu\text{m}$ e $\frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu} \approx 0.4$, tem-se

$$\Delta\nu \approx 100 \text{ GHz} \quad (5)$$

PR 6.8. Considere um laser de Hélio-Néon emitindo luz com comprimento de onda $\lambda = 632.8 \text{ nm}$. Considerando que o nível 2p do átomo de néon tem uma energia de $15.2 \times 10^{-19} \text{ J}$, determine a energia de bombeamento que será necessário usar.

Resolução

A energia de bombeamento deve ser pelo menos igual à diferença de energias entre o nível fundamental e o estado metaestável 3s, $\Delta E_{3s,0}$. Esta diferença de energias é dada por:

$$\Delta E_{3s,0} = \Delta E_{2p,0} + \Delta E_{3s,2p} \quad (1)$$

onde $\Delta E_{2p,0}$ é a energia do nível 2p relativamente ao nível fundamental e $\Delta E_{3s,2p}$ é a diferença entre as energias dos níveis 3s e 2p, dada por:

$$\Delta E_{3s,2p} = E_{3s} - E_{2p} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (2)$$

Substituindo os valores dados, tem-se:

$$\Delta E_{3s,2p} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{6.328 \times 10^{-9}} = 3.12 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (3)$$

Portanto, a energia de bombeamento que será necessário usar é:

$$\begin{aligned} \Delta E_{3s,0} &= \Delta E_{2p,0} + \Delta E_{3s,2p} \\ &= 15.2 \times 10^{-19} + 3.12 \times 10^{-19} = 18.32 \times 10^{-19} \text{ J} \end{aligned} \quad (4)$$

PR 6.9. Calcule o ganho limiar, β_{\lim} , e o tempo de vida dos fotões, τ_f , num laser semicondutor com comprimento $l = 300 \mu\text{m}$, índice de refracção $n = 3.5$, faces com reflectâncias $R_1 = R_2 = 0.30$ e atenuação $\alpha_p = 10 \text{ cm}^{-1}$.

Resolução

Na situação limiar, o coeficiente de ganho é igual à soma das perdas por absorção no material com as perdas correspondentes à emissão de luz para o exterior. Considerando que $R_j = r_j^2$, $j = 1, 2$ e usando as Eq.s (6.21) e (6.22) e tem-se:

$$\beta_{\text{lim}} = \alpha_p + \frac{1}{2l} \ln \left(\frac{1}{R_1 R_2} \right) = 50 \text{ cm}^{-1} \quad (1)$$

O tempo de vida dos fotões corresponde ao tempo médio que um fotão demora dentro da cavidade do laser antes de ser absorvido ou de ser emitido para o exterior. Usando a Eq. (6.44), tem-se:

$$\tau_f = \frac{n}{c\beta_{\text{lim}}} = \frac{3.5}{(3 \times 10^8)(5 \times 10^3)} = 2.3 \text{ ps} \quad (2)$$

PR 6.10.

- Represente esquematicamente as transições dominantes para o caso de um sistema de quatro níveis, análogo ao representado na Fig. 6.4. Considere as transições devidas à emissão espontânea apenas entre níveis vizinhos e assuma uma taxa de bombeamento constante, R , do nível fundamental para o nível de energia mais elevado.
- Escreva as equações de taxas para a população de cada nível de energia;
- Assumindo a situação estacionária, obtenha o resultado dado pela Eq. (6.29) para a diferença de populações entre os níveis N_1 e N_2 .

Resolução

a) A fig. 6.16 ilustra as transições dominantes entre os quatro níveis de energia do sistema laser, considerando a taxa de bombeamento, R , entre o nível fundamental e o nível 3, as taxas da emissão espontânea entre níveis adjacentes, definidas pela Eq. (6.2), assim como a taxa da absorção estimulada do nível 1 para o nível 2, dada pela Eq. (6.3), e a taxa da emissão estimulada do nível 1 para o nível 1, dada pela Eq. (6.4).

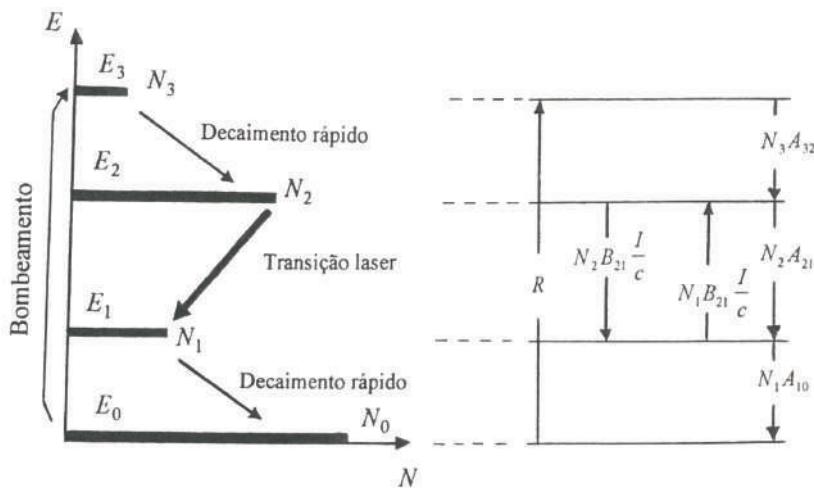


Figura 6.16 – Esquema representando os processos de transição dominantes num sistema de quatro níveis.

- Considerando as transições indicadas na Fig. 6.16, as taxas de variação das populações, em cada um dos quatro níveis, são dadas pelas seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dN_3}{dt} = R - N_3 A_{32} \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_3 A_{32} + N_1 B_{21} \frac{I}{c} - N_2 B_{21} \frac{I}{c} - N_2 A_{21} \quad (2)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = N_2 B_{21} \frac{I}{c} + N_2 A_{21} - N_1 B_{21} \frac{I}{c} - N_1 A_{10} \quad (3)$$

$$\frac{dN_0}{dt} = N_1 A_{10} - R \quad (4)$$

onde A_{32} , A_{21} , A_{10} e B_{21} são os coeficientes de Einstein para as transições entre os níveis 0, 1, 2 e 3.

c) No estado estacionário, tem-se

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_0}{dt} = 0. \quad (5)$$

Da Eq. (1) tira-se que $N_3 A_{32} = R$. Substituindo este resultado, somando e subtraindo $N_1 A_{21}$ na Eq. (2), tem-se

$$0 = R + N_1 B_{21} \frac{I}{c} - N_2 B_{21} \frac{I}{c} - N_2 A_{21} + N_1 A_{21} - N_1 A_{21} \quad (6)$$

A Eq. (6) pode ser reescrita na forma

$$R = (N_2 - N_1) B_{21} \frac{I}{c} + (N_2 - N_1) A_{21} + N_1 A_{21} \quad (7)$$

Colocando $(N_2 - N_1)$ em evidência e substituindo $N_1 = R/A_{10}$ no último termo, obtém-se o resultado:

$$N_2 - N_1 = \frac{R(A_{10} - A_{21})}{A_{10} \left[A_{21} + B_{21} \left(\frac{I}{c} \right) \right]} \quad (8)$$

PR 6.11. Quando um laser semicondutor é modulado através da corrente injectada, o índice de refracção da cavidade varia. Supondo que a variação relativa do índice de refracção é $\frac{\Delta n}{n} = 10^{-6}$, calcule a variação correspondente do comprimento de onda e da frequência. Considere que o laser emite luz com um comprimento de onda $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.

Resolução

Da Eq. (6.25) tem-se:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2nl} p \quad (1)$$

A variação do comprimento de onda, $\Delta\lambda$, correspondente à variação Δn do índice de refracção é então

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda \frac{\Delta n}{n} \\ &= (1.55 \times 10^{-6})(10^{-6}) = 1.55 \times 10^{-12} \text{ nm}\end{aligned}\quad (2)$$

A variação correspondente da frequência é:

$$\begin{aligned}\Delta\nu &= \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda \\ &= \frac{3 \times 10^{-8}}{(1.55 \times 10^{-6})^2} (1.55 \times 10^{-12}) = 193.5 \text{ MHz}\end{aligned}\quad (3)$$

PR 6.12. Obtenha o semi-ângulo de divergência para

- a) um feixe emitido por um laser de He-Ne ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) com uma cavidade de comprimento $L = 30 \text{ cm}$;
- b) um feixe laser com um comprimento de onda de 300 nm e uma cintura de diâmetro $D_0 = 1 \text{ cm}$.

Resolução

- a) Usando a Eq. (6.54), tem-se:

$$D_0 = \left(\frac{(2)(632.8 \times 10^{-9})(0.3)}{3.14} \right)^{1/2} = 0.35 \text{ mm.} \quad (1)$$

O semi-ângulo de divergência, dado pela Eq. (6.52), é neste caso:

$$\phi = \frac{(0.64)(632.8 \times 10^{-9})}{3.5 \times 10^{-4}} \approx 1.2 \text{ mrad.} \quad (2)$$

Este valor corresponde à divergência típica de um feixe laser.

- b) Neste caso, tem-se:

$$\phi = \frac{(0.64)(300 \times 10^{-9})}{1 \times 10^{-2}} \approx 1.92 \times 10^{-5} \text{ rad} \quad (3)$$

Verifica-se que a divergência do feixe é, neste caso, reduzida 63 vezes relativamente à situação da alínea a).

PR 6.13. Considere o feixe de um laser de He-Ne com uma potência de 1 mW focado por uma lente convergente com $F = 1$. Calcule o diâmetro da mancha luminosa no plano focal da lente e a respectiva intensidade.

Resolução

- Usando a Eq. (6.56), tem-se que o diâmetro do feixe no plano focal da lente é dado por:

$$2w_f = \frac{(4)(632.8 \times 10^{-9})}{3.14}(1) = 806 \text{ nm.} \quad (1)$$

Assumindo-se uma distribuição uniforme da potência, tem-se que a intensidade no plano focal da lente é dada por

$$I = \frac{P}{\pi w_f^2} \approx 2 \times 10^9 \text{ W/m}^2. \quad (2)$$

PR 6.14. Um laser de He-Cd emite um feixe de luz com um raio de 1 mm e contendo os comprimentos de onda 325 nm e 488 nm. Supondo que a luz se propaga no espaço livre, a que distância do laser a diferença entre os raios das duas componentes do feixe é de 2 cm?

Resolução

O raio do feixe a uma distância z do laser é dado a partir da Eq. (6.52) por:

$$w(z) = \frac{\lambda z}{\pi w_0} \quad (1)$$

A diferença entre os raios das duas componentes do feixe é dada por

$$w_2 - w_1 = \frac{z}{\pi w_0} (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (2)$$

A distância para a qual a diferença entre os dois raios é 2 cm é:

$$z = \frac{\pi w_0}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (w_2 - w_1) = \frac{3.14 \times 10^{-3}}{(4.88 - 3.25) \times 10^{-7}} 2 \times 10^{-2} = 385 \text{ m} \quad (3)$$

6.10. Problemas propostos

PP 6.1. Considere a equação $\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1$ para o decaimento da população do nível de energia E_1 devido à emissão espontânea. Mostre que uma população inicial N_{10} decresce para um valor N_{10}/e ao fim de um tempo $\tau = 1/A_{10}$. A constante τ é conhecida por *tempo de vida da emissão espontânea*.

PP 6.2. Explique por que razão será mais difícil realizar um laser que emita luz com um comprimento de onda na região do ultravioleta do que na região do infravermelho. Assente a sua explicação na razão A_{10}/B_{10} e no significado dos coeficientes A_{10} e B_{10} .

PP 6.3. Considerando um sistema em equilíbrio térmico e um comprimento de onda $\lambda = 10 \mu\text{m}$, determine a temperatura para a qual as taxas de emissão espontânea e de emissão estimulada são iguais.

PP 6.4. Dados dois espelhos com raios de curvatura $R_1 = -100$ cm e $R_2 = -200$ cm, determine para que valores da separação entre eles a configuração é i) estável, ii) instável e iii) condicionalmente estável.

PP 6.5. Assumindo que o comprimento de onda central de um laser de He-Ne é $\lambda = 632.8$ nm, qual é a frequência correspondente? Se a separação entre os espelhos da cavidade for 50 cm, qual o valor do número inteiro q correspondente ao modo mais próximo do centro da linha? Se a largura da curva de ganho do laser de He-Ne for 1 GHz, qual o número de modos longitudinais para esta cavidade?

PP 6.6. Obtenha o resultado dado pela Eq. (6.33) para a intensidade dentro da cavidade laser acima do limiar.

PP 6.7. As extremidades de um cristal de rubi ($n = 1.76$) são cortadas e polidas de modo a constituírem os espelhos de um laser, que emite luz com um comprimento de onda $\lambda = 694.3$ nm. Considerando que o cristal tem um comprimento de 12 cm e um diâmetro de 6 mm, discuta a importância da difracção no cômputo das perdas de energia na cavidade desse laser.

PP 6.8. Uma corrente de 40 mA é injectada num LED de GaAsP emitindo luz com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm. Supondo que a eficiência quântica interna do GaAsP é 0.1, determine a potência gerada pelo LED.

PP 6.9. Um laser de InGaAsP ($n = 3.5$), com comprimento $l = 400$ μm, tem uma largura espectral de 1.2 THz. Supondo desprezável a variação do índice de refracção com a frequência, determine o espaçamento entre os modos longitudinais e o número desses modos em que o laser pode oscilar. Qual o comprimento máximo do laser que poderá garantir o seu funcionamento num único modo?

PP 6.10. O composto quaternário $In_{1-x}Ga_xAs_yP_{1-y}$ apresenta um acordo de rede com o composto binário InP quando $x = 0.45$. A banda de energia proibida do composto InGaAsP é dada por:

$$E_g(y) = 1.35 - 0.72y + 0.12y^2 \text{ eV}$$

Determine a composição da camada activa de um laser semicondutor de InGaAsP projectado para emitir luz com um comprimento de onda $\lambda = 1550$ nm.

PP 6.11. O feixe emitido por um laser é gaussiano, ou seja, a amplitude do campo varia numa dada secção transversal com a coordenada radial r na forma $E = A \exp\{-r^2/w^2\}$, onde A é uma constante e w é o raio do feixe.

a) Obtenha, em função de w , o raio r_0 do disco, no interior do qual a intensidade é superior a metade do seu valor máximo.

b) Verifica-se que o feixe é difractado durante a sua propagação. Obtenha a distribuição da intensidade correspondente à difracção de Fraunhofer do feixe. Determine o ângulo de difracção θ_0 correspondente ao disco no interior do qual a intensidade é superior a metade do seu valor máximo. Assuma os valores $\lambda = 632.8$ nm e $w = 0.5$ mm.

PP 6.12. O feixe emitido por laser de rubi ($\lambda = 694.3$ nm) é dirigido para um alvo situado à distância de 5000 km. Supondo que o feixe tem um diâmetro de 1 cm à saída do laser, que valor terá esse diâmetro na posição do alvo?

PP 6.13. Compare o comprimento de coerência das seguintes fontes:

- a) uma lâmpada de filamento emitindo luz branca numa banda de comprimentos de onda 400-700 nm;
- b) um laser de He-Ne com uma cavidade de 40 cm oscilando com três modos longitudinais;
- c) Um laser estabilizado de Nd-YAG funcionando num único modo longitudinal, com largura espectral $\Delta\nu = 30$ kHz.

PP 6.14. Considere uma superfície plana elementar, com diâmetro h , iluminada uniformemente pela luz emitida por um laser de He-Ne ($\lambda = 632.8$ nm). O padrão formado pelo granulado laser num ecrã situado a 1 m da superfície difusora é observado a uma distância de 25 cm desse ecrã. Determine para que valor do diâmetro da superfície difusora a estrutura mais fina do granulado laser deixa de poder ser observada. Considere que a resolução mínima da vista é de 47 segundos de arco.

6.11. Referências bibliográficas

1. P. W. Miloni e J. H. Eberly, *Laser Physics*, Wiley, 2010.
2. D. C. O'shea, *Introduction to Lasers and their Applications*, 2^a Ed., Addison-Wesley, 1978.
3. F. L. Pedrotti, L. M. Pedrotti e L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, 3rd Ed., Cambridge University Press, 2018.
4. A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, 1986.
5. O. Svelto, *Principles of Lasers*, Springer US, 1998.
6. A. Yariv, *Optical Electronics in Modern Communications*, 5^a Ed. Oxford University Press, 1997
7. G. P. Agrawal e N. Dutta, *Semiconductor Lasers*, 2^a Ed., Springer, 2014.
8. P. K. Cheo, *Fibre Optics and Optoelectronics*, 2^a Ed., Prentice Hall, 1990.
9. K. Petermann, *Laser Diode Modulation and Noise*, Springer Netherlands, 1988.
10. B. A. Saleh e M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, 2nd Ed. Wiley-Interscience, 2007.

Capítulo 7

HOLOGRAFIA

A holografia foi inventada pelo cientista britânico Dennis Gabor em 1948, quando procurava melhorar a qualidade da imagem proporcionada pelo microscópio electrónico. Quanto à palavra holografia, ela tem a sua raiz no termo grego *holos*, que significa totalidade. De facto, enquanto que na fotografia tradicional apenas a intensidade da luz é registada, na holografia tanto a amplitude como a fase da onda proveniente do objecto são registadas, após a sua interferência com uma dada onda de referência. Para este efeito, torna-se necessário usar luz coerente, de modo a existir uma relação de fase fixa entre essas duas ondas. No sentido de reconstruir a imagem tridimensional do objecto, Gabor sugeriu que bastaria iluminar o holograma com uma onda semelhante à onda de referência usada durante o registo.

Na realidade, a ideia da holografia acabou por não se mostrar útil no âmbito da microscopia electrónica, tendo permanecido praticamente ignorada até à descoberta do laser, em 1960. O interesse das comunidades científica e artística por esta ideia aumentou significativamente com o desenvolvimento da técnica de registo fora do eixo, proposta por Emmett Leith e Juris Upatnieks em 1962.

7.1. Fotografia versus Holografia

Uma fotografia convencional regista apenas a variação de intensidade correspondente a um objecto ou a uma cena. Dado tratar-se de um registo bidimensional, ela não proporciona nenhuma informação acerca da profundidade da cena. Quando se olha para uma fotografia parece, por vezes, que se tem uma percepção dessa profundidade. Contudo, isto acontece geralmente apenas porque a cena nos é já familiar.

Por contraste com a fotografia convencional, o holograma permite registar a cena com a sensação de profundidade e a paralaxe com que a podemos observar na realidade. Isto é possível porque toda a informação da frente de onda, nomeadamente a sua amplitude e a sua fase, é registada. Quando um holograma é iluminado nas condições adequadas, essa frente de onda é completamente reconstruída e o observador pode contemplar a cena original através da “janela” definida pelo holograma.

As características da imagem proporcionada por um holograma devem-se, sobretudo, à preservação da informação relativa à fase da frente de onda, para além da sua amplitude. O registo dessa informação é importante, dado que as fases das ondas originadas em pontos distintos de um objecto são também diferentes. Para registar essas variações de fase torna-se necessário convertê-las em variações de amplitude, o que pode ser conseguido através da interferência de duas ondas: a onda proveniente do objecto e uma outra onda coerente, dita de referência.

7.2. O processo holográfico

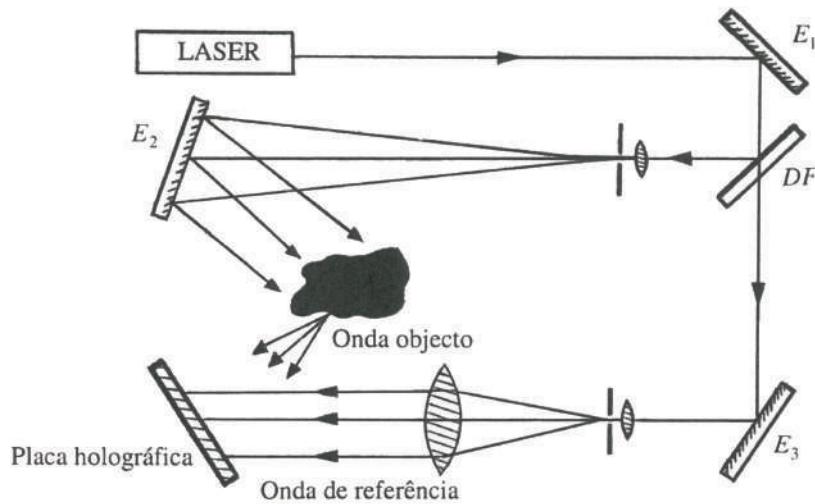


Figura 7.1 – Montagem experimental típica para o registo de um holograma. E_1 , E_2 e E_3 : espelhos; DF : divisor de feixe.

Na Fig. 7.1 mostra-se uma montagem típica utilizada para o registo de um holograma. O feixe laser inicial é dividido em dois feixes mutuamente coerentes. Um deles dirige-se directamente para a placa de registo e constitui a chamada *onda de referência*. O outro feixe ilumina o objecto em causa e a luz por ele reflectida constitui a *onda objecto*. As ondas objecto e de referência interferem na placa holográfica, na qual existe um meio sensível à luz que regista a distribuição espacial de intensidade do padrão de interferência.

Num momento posterior, a placa holográfica pode ser iluminada por uma réplica da onda de referência, designada por *onda de reconstrução*. O padrão de interferência registado na placa difracta essa onda de reconstrução, permitindo reobter a onda objecto.

Analisa-se a seguir com mais detalhe os aspectos principais do processo holográfico, nomeadamente os que se referem às fases de registo e de reconstrução da imagem holográfica.

7.2.1. Registo holográfico

Considere-se o registo holográfico de um objecto, realizado numa placa fotográfica que se situa no plano xy . A onda objecto apresenta nesse plano uma amplitude complexa $E_O(x, y)$. Se apenas existisse esta onda, o filme seria escurecido em função da sua intensidade, dada por:

$$I_O = |E_O|^2 = E_O E_O^* \quad (7.1)$$

Neste caso, o registo não conteria nenhuma informação relativa à fase da onda objecto. Contudo, na presença igualmente de uma onda de referência com uma amplitude complexa $E_R(x, y)$, o campo eléctrico resultante no ponto (x, y) da placa fotográfica é dado por:

$$E(x, y) = E_O(x, y) + E_R(x, y), \quad (7.2)$$

Deste modo, a intensidade registada é dada por:

$$I(x, y) = |E_O(x, y) + E_R(x, y)|^2 = E_R E_R^* + E_O E_O^* + E_R^* E_O + E_R E_O^* \quad (7.3)$$

O padrão de distribuição da intensidade, dado pela Eq. (7.3), pode ser registado usando diferentes métodos. Considera-se a seguir o caso em que o meio de registo é um filme fotográfico, cujas características são dadas pela chamada curva de Hurter-Drifffield (H&D) (Fig. 7.2). Esta curva mostra a variação da densidade da emulsão depois do registo, D , com o logaritmo da exposição B (energia/área), dada por:

$$B = It_B \quad (7.4)$$

onde t_B é o tempo de exposição. A densidade óptica da emulsão depois do registo é definida na forma:

$$D = \log \frac{1}{\tau^2} \quad (7.5)$$

onde τ representa o coeficiente de transmissão em amplitude da emulsão.

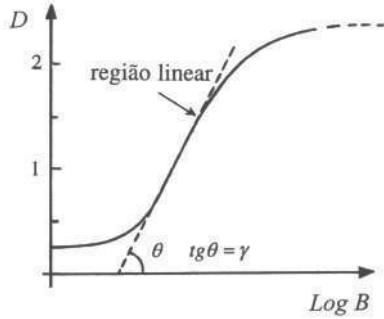


Figura 7.2 – Aspecto típico da curva H&D.

No caso do registo fotográfico convencional, e para que esse registo seja linear em termos da intensidade, procura-se controlar o tempo de exposição de modo a operar-se na região linear da curva H&D. Neste regime, tem-se a relação:

$$D = \gamma_N \log B - D_0 = \gamma_N \log (It_B) - D_0 \quad (7.6)$$

onde γ_N é o chamado gama do filme, dado pelo declive da parte linear da curva H&D. O índice N neste parâmetro indica o facto deste registo corresponder ao negativo do sinal original. Iluminando esse negativo com uma onda de reconstrução com intensidade I_R , tem-se que a intensidade transmitida é dada por:

$$I_t = I_R \tau^2 = I_R 10^{-D} \quad (7.7)$$

Substituindo a Eq. (7.6) na Eq. (7.7) obtém-se:

$$I_t = C_N I_R I^{-\gamma_N} \quad (7.8a)$$

onde

$$C_N = 10^{D_0} t_B^{-\gamma_N} \quad (7.8b)$$

Como se verifica da Eq. (7.8), a intensidade transmitida não é uma reprodução linear da intensidade original I . Contudo, como se faz habitualmente em fotografia, pode-se obter a partir desse negativo um registo positivo do sinal original. Iluminando essa cópia positiva com uma onda de reconstrução $E_R(x, y)$, tem-se que a intensidade transmitida é dada por:

$$I_{tP} = C_p I_R I^{\gamma_P \gamma_N} \quad (7.9)$$

onde γ_P é o gama associado com o registo da cópia positiva. Verifica-se da Eq. (7.9) que a relação entre as intensidades transmitida e registada é linear se se verificar a condição $\gamma_N \gamma_P = 1$.

Em holografia, o processo de registo deve ser tal que o holograma proporcione uma onda transmitida cuja amplitude corresponda a uma reprodução linear do padrão de interferência criado pelas ondas objecto e de referência. A partir da Eq. (7.9) verifica-se que, neste caso, se deverá ter

$$\gamma_N \gamma_P = 2 \quad (7.10)$$

A exposição correcta para um registo holográfico linear corresponde a um funcionamento, não na região linear da curva H&D, mas antes na região linear da curva de τ vs B , representada na Fig. 7.3. Nessa zona, tem-se:

$$\tau = \tau_0 + \beta B = \tau_0 + \beta I t_B \quad (7.11)$$

onde τ_0 e β são constantes.

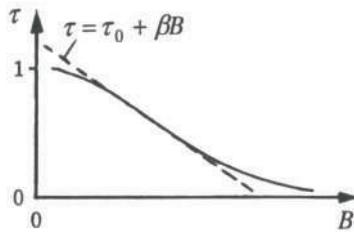


Figura 7.3 – Coeficiente de transmissão em amplitude de uma placa holográfica em função da energia de exposição B .

7.2.2. Reconstrução e localização da imagem

Iluminando o holograma com uma onda igual à onda de referência (agora chamada onda de reconstrução), pode-se obter uma réplica da onda objecto original. O campo correspondente à luz transmitida pelo holograma é dado por:

$$\begin{aligned} E_t(x, y) &= \tau(x, y) E_R \\ &= \tau_0 E_R + \beta t_B E_R (E_R E_R^* + E_O E_O^* + E_O E_R^* + E_R E_O^*) \end{aligned} \quad (7.12)$$

onde se usou as Eq.s (7.11) e (7.3).

Os três primeiros termos resultantes do membro direito da Eq. (7.12) correspondem a uma versão modulada em amplitude da onda de reconstrução. Considerando o holograma como uma rede de difracção, estes termos representam o feixe luminoso não deflectido, isto é, a ordem zero, enquanto que o quarto e quinto termos na Eq. (7.12) representam as ondas difractadas de primeira ordem. O quarto termo proporciona uma imagem directa

(virtual) do objecto original, localizada atrás do holograma. O quinto termo corresponde a uma imagem conjugada (real) do mesmo objecto, situada à frente do holograma. A Fig. 7.4 mostra a localização das imagens quando a direcção de propagação das ondas de referência e de reconstrução é perpendicular ao holograma o holograma.

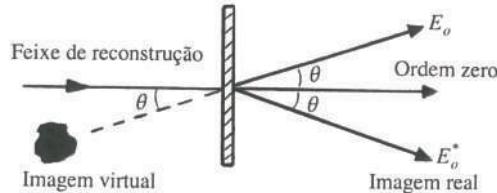


Figura 7.4 – Localização das imagens quando a direcção de propagação das ondas de referência e de reconstrução é perpendicular ao holograma.

Atendendo às suas características, a imagem conjugada é geralmente de utilidade reduzida. De facto, esta imagem mostra o objecto de dentro para fora, sendo a profundidade da cena invertida ao longo do eixo de visão. Os pontos do objecto mais próximos do observador revelam-se mais afastados na imagem real.

O quarto termo no membro direito da Eq. (7.12) reproduz, a menos de um factor constante, a onda objecto E_o . Olhando através do holograma como se fosse uma janela, pode-se ver uma imagem tridimensional da cena, com os objectos situados exactamente nas suas posições originais. Os efeitos de paralaxe são facilmente observados, podendo-se ver aspectos diferentes da cena movendo um pouco a cabeça.

De modo a obter-se a onda objecto, E_o , em boas condições, deve-se procurar evitar a sua interferência com as outras ondas. Este objectivo pode ser facilmente conseguido desde que as ondas objecto e de referência façam entre si um ângulo conveniente, como se mostra no problema PR 7.5.

7.3. Hologramas de fase

No caso mais geral, o coeficiente de transmissão da placa holográfica é uma função complexa e pode escrever-se na forma:

$$\tilde{\tau}(x, y) = \tau(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \quad (7.13)$$

Podem-se considerar dois casos limites no registo de um holograma: o holograma de amplitude ($\phi = \text{const.}$) e o holograma de fase ($\tau = \text{const.}$). Em ambos os casos toda a informação contida na onda objecto é registada na placa holográfica.

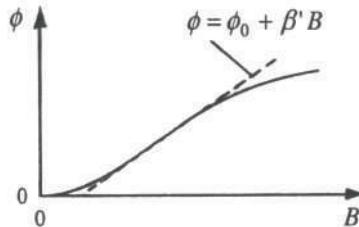


Figura 7.5 – Fase do coeficiente de transmissão de uma placa holográfica em função da energia de exposição B .

A fase do coeficiente de transmissão de uma placa holográfica varia com a exposição B como se representa na Fig. 7.5. Na zona linear dessa curva pode escrever-se:

$$\varphi(I) = \varphi_0 + \beta' I t_B \quad (7.14)$$

Quando $\varphi(I) \ll \pi/2$ o coeficiente de transmissão do holograma de fase pode ser aproximado por uma função linear da intensidade I :

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \exp[i\varphi(I)] \approx 1 + i\varphi(I) \\ &= (1 + i\varphi_0) + i\beta' I t_B \end{aligned} \quad (7.15)$$

Quando a imagem é reconstituída a partir de um holograma de fase obtém-se:

$$\begin{aligned} E_t(x, y) &\approx (1 + i\varphi(I(x, y))) E_R \\ &= (1 + i\varphi_0) E_R + i\beta' t_B E_R (E_R E_R^* + E_O E_O^* + E_O E_R^* + E_R E_O^*) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Como acontece na Eq. (7.11) para o caso do holograma de amplitude, também aqui se tem cinco termos. Contudo, em consequência da aproximação adicional $\exp(i\varphi) \approx 1 + i\varphi$, verifica-se que os efeitos não-lineares são mais acentuados nos hologramas de fase do que nos hologramas de amplitude.

7.4. Configurações holográficas

Uma condição essencial para a realização de um holograma é a existência de uma fonte de luz monocromática e suficientemente coerente. As ondas objecto e de referência devem ser mutuamente coerentes para que a sua sobreposição resulte num padrão de interferência estável. Nesse sentido, a geometria da montagem deve ser tal que os percursos das duas ondas sejam semelhantes. De facto, se a diferença entre esses percursos for superior ao comprimento de coerência da luz, não chegará a formar-se o padrão de interferência desejado no filme fotográfico. Estas limitações podem ser ultrapassadas com relativa facilidade quando a fonte de luz é um laser.

7.4.1. Holografia em linha

O método mais simples de realizar um holograma consiste em iluminar uma placa holográfica com um feixe laser expandido através do objecto, o qual deve ser suficientemente transparente para o efeito (Fig. 7.6). Este método foi introduzido por Gabor e é pouco exigente no que se refere à coerência da luz utilizada. A onda objecto é formada pela luz dispersa pelas partículas do objecto, enquanto que a onda de referência é constituída pela luz que passa entre essas partículas sem ser afectada.

No caso de um objecto com dimensões muito reduzidas, a onda difundida é praticamente esférica e o padrão de interferência na placa fotográfica é constituído por uma série de franjas circulares concêntricas. Esta distribuição

de intensidade é semelhante à que se obtém no caso de uma placa zonada de Fresnel. Como se viu no capítulo 4, uma placa zonada de Fresnel funciona como uma lente. Pode considerar-se que cada ponto de um objecto extenso dá origem a uma placa zonada de Fresnel e que o holograma corresponde à sobreposição de todas essas placas zonadas.

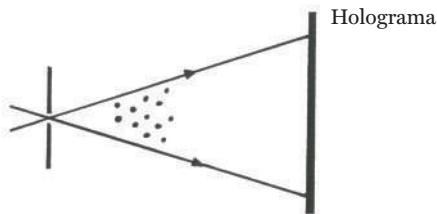


Figura 7.6 – Registo de um holograma colinear

7.4.2. Holografia fora do eixo

A configuração em linha considerada antes e utilizada por Gabor tem o grande inconveniente de a imagem conjugada se formar na mesma direcção da imagem verdadeira. O método utilizado para resolver este problema consiste em fazer com que as ondas objecto e de referência tenham direcções diferentes. Esta técnica parece constituir uma modificação trivial da configuração em linha utilizada por Gabor; contudo, passaram cerca de dez anos após o trabalho pioneiro de Gabor até que a nova técnica tivesse sido sugerida por Leith e Upatnieks.

A Fig. 7.1 mostra uma montagem típica para realizar a holografia fora do eixo. A luz do laser é dividida em dois feixes, os quais são depois expandidos usando objectivas microscópicas. A luz difundida pelo objecto interfere com a onda de referência e o padrão de interferência resultante é registado na placa holográfica. Devido ao comprimento de coerência limitado da fonte, deve procurar-se que os percursos ópticos das ondas objecto e de referência sejam semelhantes, optimizando desse modo o contraste do padrão de interferência na placa holográfica. Quando a reconstrução do holograma é feita usando a mesma montagem, deve proceder-se à obstrução da onda objecto, ou simplesmente à remoção do divisor de feixe.

O padrão de interferência deve permanecer estacionário durante o tempo de exposição para que o seu registo se processe de modo satisfatório. A qualidade do holograma é bastante afectada, mesmo no caso de o movimento do padrão corresponder a uma pequena fração do período espacial das franjas. Importa, por isso, que as posições de todos os componentes da montagem que possam afectar os percursos ópticos das ondas objecto e de referência — espelhos, divisores-de-feixe, o próprio objecto, etc. — permaneçam fixas durante a exposição da placa holográfica. Estas exigências poderão ser satisfeitas com relativa facilidade se a montagem holográfica se encontrar sobre uma mesa óptica suficientemente massiva e sustentada por um conjunto de cilindros pneumáticos. A massa elevada da mesa proporciona inércia mecânica, enquanto que o sistema pneumático isola de modo eficaz a mesa das vibrações que possam afectar o laboratório.

7.5 Classificação dos hologramas

Os hologramas podem ser classificados de acordo com o ângulo feito entre as direcções de propagação das ondas objecto e de referência.

7.5.1. Hologramas finos

Na maioria dos casos, as emulsões fotográficas apresentam uma espessura entre 5 e 16 μm . Neste caso, quando o ângulo feito entre as ondas objecto e de referência, é pequeno ($\phi \leq 10^\circ$), o espaçamento entre as franjas de interferência das duas ondas é semelhante à espessura da emulsão. Neste caso, o meio de registo pode considerar-se bidimensional e o holograma assim obtido é chamado *holograma fino*. Quando os ângulos de incidência das ondas objecto e de referência, medidos relativamente à normal à superfície holográfica, são simétricos, as franjas registadas são perpendiculares a essa superfície.

7.5.2. Hologramas espessos

Quando o ângulo entre as ondas objecto e de referência é moderadamente grande, situando-se no intervalo compreendido entre os 10° e os 120° , o espaçamento entre as franjas é inferior à espessura do meio de registo e o holograma resultante é designado por holograma espesso (Fig. 7.7a). Quando as duas ondas incidem simetricamente em relação à normal a essa superfície as franjas registadas na emulsão fotográfica são perpendiculares à superfície do holograma.

Tipicamente, a frequência espacial do padrão de interferência que se pretende registar é de várias centenas, chegando mesmo a ser da ordem das 1000 linhas por milímetro. Estruturas tão finas como estas não podem ser registadas em filmes fotográficos normais, cuja capacidade de registo se limita a cerca de 100 linhas/mm. São necessárias para o efeito emulsões fotográficas especiais, tais como as da Eastman Kodak tipo 649F e as da Agfa Gevaert tipo 8E70.



Figura 7.7 – Representação das fases (a) de registo de um holograma espesso e (b) de reconstrução da onda objecto a partir desse holograma.

A teoria usada para descrever a luz difractada por um holograma espesso (Fig. 7.7b) tem por base a lei de Bragg. Supondo que o espaçamento entre as franjas é d e que o ângulo entre o plano dessas franjas e a onda de reconstrução é α , a condição de Bragg é dada por:

$$2d \sin \alpha = n\lambda, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

A necessidade de satisfazer a condição de Bragg faz com que a reconstrução da imagem holográfica, a partir de um holograma espesso, seja muito sensível ao ângulo que a onda de reconstrução faz com o holograma. Por outro lado, essa dependência angular faz com que seja possível, usando ondas de referência com diferentes ângulos, registar vários hologramas na mesma emulsão. A partir de cada holograma pode-se reconstruir a respectiva onda objecto, sem que isso implique a reconstrução das outras ondas objecto também registadas na mesma placa. A Eq. (7.17) evidencia que a onda difractada por um holograma espesso é também sensível ao comprimento de onda usado na reconstrução.

Tanto nos hologramas espessos como nos hologramas finos, considerados na secção anterior, o observador olha através do holograma para ver a imagem holográfica. Trata-se, pois, em ambos os casos, de *hologramas de transmissão*, que se obtém sempre que as ondas objecto e de referência incidem no mesmo lado da emulsão (Fig. 7.7a).

7.5.3. Hologramas de reflexão

A configuração que proporciona um ângulo máximo entre as ondas objecto e de referência corresponde à situação em que essas ondas incidem em lados opostos da emulsão, como se representa na Fig. 7.8a. Neste caso, obtém-se uma rede de difração tridimensional denominada *holograma de reflexão*. De facto, no processo de reconstrução, estes hologramas reflectem a luz na direcção do observador (Fig. 7.8b), o qual vê uma imagem virtual atrás do holograma (como se fosse num espelho).

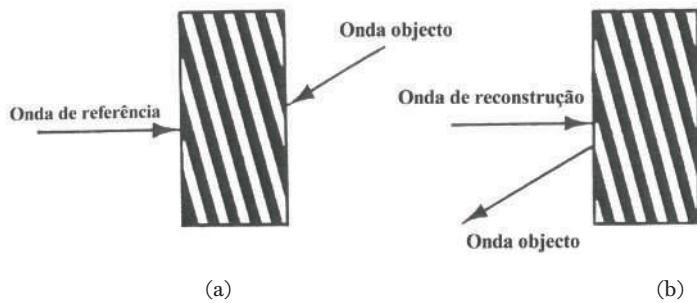


Figura 7.8 – Representação das fases (a) de registo de um holograma de reflexão e (b) de reconstrução da onda objecto a partir desse holograma.

A teoria usada para descrever a luz difractada por um holograma de reflexão tem por base a condição de Bragg dada pela Eq. (7.17). Supondo que se tem $n = 1$ nesta equação e considerando um dado ângulo de observação α , a interferência construtiva entre as ondas reflectidas acontece apenas para um certo comprimento de onda λ_α , sem que se verifique qualquer perturbação das ondas com outros comprimentos de onda. Ou seja, quando iluminado por luz branca, este tipo de hologramas funciona como um filtro de comprimentos de onda, permitindo a reconstrução da imagem apenas para o comprimento de onda λ_α .

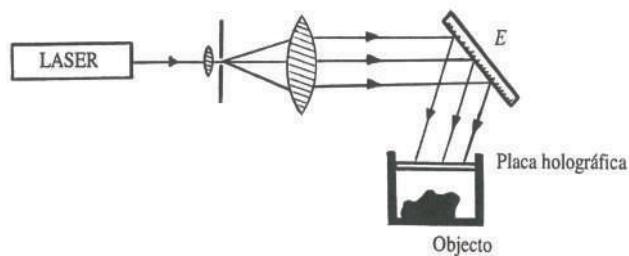


Figura 7.9 – Montagem para o registo de hologramas de luz branca.

A Fig. 7.9 mostra uma montagem que permite a obtenção de hologramas de luz branca. Para o registo é necessário utilizar uma fonte de luz coerente (laser). O feixe laser é expandido, colimado e dirigido através da placa fotográfica para o objecto. A onda de referência corresponde à luz que provém directamente do laser, enquanto que a onda objecto corresponde à luz que é difundida por esse objecto.

7.6. Interferometria holográfica

Uma das aplicações mais importantes da holografia reside na área da interferometria. De facto, a holografia permite guardar a amplitude e a fase da onda objecto que poderá ser usada posteriormente para fins interferométricos. Esta técnica torna igualmente possível a comparação de um objecto consigo próprio num instante posterior.

Dada a sua grande sensibilidade, a interferometria holográfica pode ser usada para obter informação importante no que respeita às características estruturais de um dado objecto, observando o movimento da sua superfície quando ele é sujeito a uma tensão. Assim, esta técnica permite realizar uma grande variedade de inspecções não-destrutivas, sempre que o parâmetro de interesse se manifesta através de descontinuidades no deslocamento da superfície desse objecto. Essas descontinuidades aparecem como uma anomalia num padrão de franjas de interferência que seria em princípio regular, permitindo deste modo identificar a região defeituosa.

Interferometria holográfica em tempo real

Neste método, começa-se por obter e processar o holograma do objecto. Em seguida, ilumina-se o holograma com a onda de referência e faz-se interferir a imagem reconstruída com a onda proveniente directamente do objecto. As franjas de interferência indicam a deformação actual do objecto relativamente à situação em que a sua imagem foi registada no holograma. Essa deformação pode ser acompanhada em tempo real através desse sistema de franjas. Neste método, o objecto não pode geralmente ser removido da sua posição, dado que se torna praticamente impossível recolocá-lo exactamente na mesma situação relativamente ao holograma.

Método da dupla-exposição

Neste método a placa holográfica é exposta duas vezes: uma primeira vez com o objecto não perturbado e depois uma outra vez com o objecto sob o efeito da perturbação. Deste modo, ambas as frentes de onda são registadas na mesma placa holográfica. Quando o holograma é iluminado com a onda de referência, ambas as ondas são reconstruídas e interferem, dando origem a um padrão de franjas que traduz o deslocamento dos vários pontos do objecto. A descrição teórica deste método é semelhante à que foi apresentada na secção anterior para o método da holografia em tempo real.

Método da holografia em tempo médio

O método da holografia em tempo médio é mais adequado para o caso de objectos sujeitos a um movimento vibratório periódico. A exposição, neste caso, ocorre durante um tempo relativamente longo, quando comparado com o período de vibração. A imagem final pode ser considerada como o resultado da sobreposição de um grande número de imagens, formando um padrão de ondas estacionárias. As franjas claras revelam as zonas nodais, que se mantêm estacionárias durante a exposição, enquanto que as linhas de contorno (franjas escuras) correspondem a zonas com amplitude de vibração constante.

7.7. Outras aplicações da Holografia

Para além da interferometria holográfica descrita na Secção 7.6, a holografia proporciona uma grande variedade de outras aplicações. Entre elas pode-se referir o *reconhecimento de padrões*. Neste âmbito, pode-se, por exemplo, pretender examinar um texto à procura de uma dada palavra. A luz proveniente desse texto passa através de um holograma da palavra procurada num sistema óptico adequado. A presença da palavra em causa é indicada, no local onde ela se encontra, pelo aparecimento de uma mancha brilhante. O holograma funciona, assim, como um filtro, que reconhece e transmite apenas o padrão de frequências espaciais semelhante ao que se encontra registado nele. Esta técnica poderá, eventualmente, vir a ser usada por robôs, levando à identificação de certos objectos e ao consequente direcccionamento do seu movimento.

Outra aplicação muito importante da holografia reside no *armazenamento de informação*. Atendendo a que a técnica holográfica permite reduzir essa informação a dimensões da ordem do comprimento de onda, adivinha-se que um único holograma de volume poderá armazenar uma enorme quantidade de informação. Esta quantidade pode ser aumentada rodando o holograma e realizando sucessivamente novas exposições. Aliás, em vez de uma placa fotográfica convencional, pode-se usar para este efeito certos cristais fotossensíveis, como seja o cristal de niobato de lítio. Teoricamente, supõe-se que toda a informação de uma grande biblioteca poderá ser armazenada num destes cristais com as dimensões de um cubo de açúcar!

Outro aspecto fascinante do armazenamento holográfico de informação refere-se à sua segurança. Esta característica tem que ver com o facto de qualquer dado ficar registado em todo o volume do holograma. Deste modo, a danificação de uma parte do holograma não impede a reconstrução posterior desse dado a partir da parte não danificada. Essa danificação terá algum impacto apenas ao nível da razão sinal-ruído na imagem reconstruída.

As ondas usadas na realização de um holograma não têm de ser necessariamente de natureza electromagnética, podendo-se usar para o efeito também ondas ultra-sónicas. Atendendo à capacidade destas ondas para penetrar objectos que são opacos para a luz visível, reconhece-se facilmente que os hologramas realizados com estas ondas – os chamados *hologramas ultra-sónicos* – poderão ser bastante úteis. A holografia ultra-sónica poderá, por exemplo, proporcionar imagens tridimensionais de estruturas ou cavidades existentes dentro dos mais variados corpos opacos, nomeadamente do corpo humano.

7.8. Problemas resolvidos

PR 7.1. Assuma que as posições do objecto e da fonte do feixe de referência se encontram ambas a 100 cm do meio de registo e separadas entre si 10 cm. Determine a resolução mínima que o filme holográfico deve ter se se usar luz com um comprimento de onda $\lambda = 500 \text{ nm}$. Que tipo de holograma será registado neste caso?

Resolução

O problema pode ser tratado com base nos resultados obtidos no capítulo 3 para a interferência entre duas ondas coerentes. No caso presente, o objecto e a fonte do feixe de referência assumem o papel das duas fendas, separadas de h , na experiência de Young. O espaçamento, Δy , entre franjas consecutivas no padrão de interferência formado a uma distância D é dado pela Eq. (3.25):

$$\Delta y = \frac{D}{h} \lambda . \quad (1)$$

Usado os dados do problema, tem-se $D = 100$ cm e $h = 10$ cm, pelo que,

$$\Delta y = \frac{1}{10^{-1}} 5 \times 10^{-7} = 5 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (2)$$

Para poder registar o padrão de interferência, o filme holográfico deve ter uma resolução mínima:

$$R = \Delta y^{-1} = 2 \times 10^5 \text{ linhas/m} \quad (3)$$

O ângulo entre as ondas objecto e de referência é dado por:

$$\phi = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{5 \times 10^{-2}}{1} \right) \approx 0.1 \text{ rad} \approx 6^\circ \quad (4)$$

pelo que se trata de um holograma fino.

PR 7.2. Pretende-se produzir uma rede de difracção usando a técnica holográfica e a luz emitida por um laser de Hélio-Néon ($\lambda = 532.8$ nm). Calcule os ângulos a considerar para que a rede tenha 500 linhas por milímetro. Qual é a frequência máxima possível da rede?

Resolução

A rede de difracção pode ser produzida registando o padrão de interferência de duas ondas planas numa placa holográfica. Os campos das duas ondas planas incidentes na placa podem ser representadas por

$$E_1 = A_1 e^{-i\phi_1}, \quad E_2 = A_2 e^{-i\phi_2}. \quad (1)$$

Supondo que a placa se situa no plano xy e que as ondas se propagam no plano yz , as suas fases podem escrever-se na forma

$$\phi_1 = k \operatorname{sen} \theta_1 y, \quad \phi_2 = k \operatorname{sen} \theta_2 y \quad (2)$$

onde θ_1 e θ_2 são os ângulos que os vectores de onda fazem com a normal à placa (coincidente com o eixo dos z).

A menos de um factor constante, a distribuição de intensidade na placa holográfica é dada por:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2|A_1||A_2| \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (3)$$

Haverá uma franja brilhante quando $\cos(\phi_1 - \phi_2) = 1$, ou seja,

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} y [\operatorname{sen} \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_2] = p 2\pi, \quad (4)$$

sendo p um número inteiro. Da Eq. (4) tira-se que a posição da franja brilhante de ordem p é:

$$y_p = \frac{p\lambda}{\operatorname{sen} \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_2} \quad (5)$$

O espaçamento entre franjas consecutivas é dado por

$$\Delta y = y_{p+1} - y_p = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_2} \quad (6)$$

Se a normal à placa bissectar o ângulo (φ) formado entre as duas ondas, tem-se $\theta_1 = -\theta_2 = \varphi/2$, pelo que a frequência espacial $f = 1/\Delta y$ se pode escrever na forma

$$f = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi/2)}{\lambda} \quad (7)$$

Considerando uma frequência de 500 linhas por milímetro, tem-se

$$\varphi = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{\lambda}{2} f\right) = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{632.8 \times 10^{-9}}{2} \times 5 \times 10^5\right) = 18.20^\circ \quad (8)$$

Assim, as duas ondas devem fazer um ângulo de 9.1° com a normal.

A frequência máxima obtém-se quando $\operatorname{sen}(\varphi/2) = 1$, sendo dada por

$$f = \frac{2}{\lambda} = 3160,6 \text{ /mm} \quad (9)$$

PR 7.3. Considere a interferência entre duas ondas luminosas planas, com a mesma amplitude e monocromáticas, com um comprimento de onda no vazio $\lambda = 632.8 \text{ nm}$. A onda 1 propaga-se na direcção do eixo dos z , enquanto a onda 2 se propaga no plano xz , fazendo um ângulo $\theta = 0.1 \text{ rad}$ com o eixo dos z . O padrão de interferência é registado numa placa holográfica, situada no plano xy e de largura $l = 10 \text{ cm}$ na direcção do eixo dos x . Determine o número de franjas brilhantes registadas nessa placa holográfica.

Resolução

Os campos das duas ondas no plano xy são dados por

$$E_1 = E_0 \exp(-\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) = E_0 \quad (1)$$

$$E_2 = E_0 \exp(-\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) = E_0 \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} x \operatorname{sen} \theta\right) \quad (2)$$

O campo resultante é obtido usando o princípio da sobreposição:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \left[1 + \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} x \operatorname{sen} \theta\right) \right] \quad (3)$$

A distribuição de intensidade no padrão de interferência é dada por

$$I = EE^* = 2E_0^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \operatorname{sen} \theta\right) \right] \quad (4)$$

O espaçamento entre as franjas corresponde ao período espacial da distribuição de intensidade:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \theta} \approx \frac{\lambda}{\theta} \quad (5)$$

Substituindo os valores dados, tem-se

$$\Delta x = \frac{632.8 \times 10^{-9}}{0.1} = 6.3 \mu\text{m} \quad (6)$$

O número de franjas registadas na placa holográfica é:

$$N = \frac{l}{\Delta x} = 15873 \quad (7)$$

PR 7.4. Quando iluminada por uma onda luminosa, a placa holográfica desenvolvida no problema PR 7.3 funciona como uma rede de difracção. Supondo que essa onda é semelhante à onda 1, mostre que o campo transmitido pode ser considerado como a soma de três ondas. Interprete este resultado.

Resolução

O coeficiente de transmissão em amplitude da placa holográfica é dado pela Eq. (7.11):

$$\tau = \tau_0 + \beta I t_B = \tau_0 + 2\beta t_B E_0^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta\right) \right] \quad (1)$$

Onde τ_0 , β , e t_B são constantes, enquanto I foi substituído pela Eq. (5) do problema PR 7.3. Quando iluminado pela onda 1, o campo transmitido pela placa holográfica é dado por:

$$E_t = \tau E_1 = A \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} z\right) + B \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta + z)\right] + C \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta - z)\right] \quad (2)$$

onde

$$A = \tau_0 E_0 + 2\beta t_B E_0^3, \quad (3)$$

$$B = \beta t_B E_0^3 \quad (4)$$

O primeiro termo na Eq. (2) representa a onda transmitida directamente através da placa holográfica (ordem zero da difracção), enquanto os segundo e terceiro termos representam as ondas difractadas de primeira ordem, fazendo ângulos θ e $-\theta$ com o eixo dos z , respectivamente. Em particular, o terceiro termo representa a onda 2 do problema PR 7.3 reconstruída.

PR. 7.5. Obtenha uma expressão para o ângulo segundo o qual se forma a imagem conjugada, assumindo que a onda objecto é uma onda plana e que incide no holograma fazendo um ângulo θ com a normal, enquanto as ondas de referência e de reconstrução são igualmente ondas planas, incidindo segundo um ângulo γ com a normal. Indique uma condição para os ângulos θ e γ que garanta o desaparecimento dessa imagem conjugada.

Resolução

Assumindo que a onda objecto é uma onda plana e que incide no holograma, situado no plano xy , fazendo um ângulo θ com a normal, tem-se

$$E_O = \exp(-ikx \sin \theta) \quad (1)$$

onde se omitiu um factor comum $\exp(i\omega t)$. A onda conjugada da onda objecto, E_O^* , é dada por

$$E_O^* = \exp(ikx \sin \theta) = \exp[-ikx \sin(-\theta)] \quad (2)$$

Ou seja, a onda E_O^* deixa o holograma fazendo um ângulo $-\theta$ com a normal.

Se as ondas de referência e de reconstrução, E_R , forem igualmente ondas planas, incidindo no holograma segundo um ângulo γ com a normal, tem-se:

$$E_R = \exp(-ikx \sin \gamma) \quad (3)$$

$$E_R^2 = \exp(-ikx_2 \sin \gamma) \quad (4)$$

Usando as Eq.s (2) e (4), obtém-se o seguinte resultado para o último termo na Eq. (7.12), $E_R^2 E_O^*$, correspondente à imagem conjugada:

$$E_R^2 E_O^* = \exp[-ikx(2\sin\gamma + \sin(-\theta))] = \exp(-ikx \sin\phi) \quad (5)$$

onde

$$\operatorname{sen} \phi = 2 \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen}(-\theta). \quad (6)$$

Na Eq. (6), ϕ é o ângulo que a onda correspondente à imagem conjugada faz com a normal ao holograma. A imagem conjugada deixa de ser observada quando

$$2 \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen}(-\theta) > 1. \quad (7)$$

PR 7.6. Pretende-se analisar a deformação de um objecto usando o método da integerometria holográfica em tempo real. Considere um ponto P na superfície do objecto, que sofre um deslocamento d , de apenas alguns comprimentos de onda, para o ponto P' , como se representa na Fig. 7.10. Assumindo que as amplitudes das ondas E e E' , provenientes do holograma (onda reconstruída) e do objecto, respectivamente, são iguais em módulo, obtenha uma expressão para a intensidade do padrão de interferência em função de d e dos ângulos γ e θ .

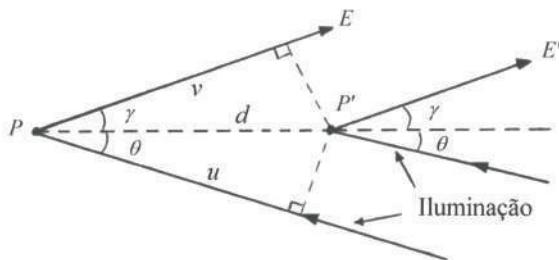


Figura 7.10 – Geometria para o cálculo da diferença de fase entre os campos E e E' , quando o ponto objecto é deslocado de P para P' .

Resolução

Assumindo que as amplitudes das ondas E e E' , provenientes do holograma (onda reconstruída) e do objecto, respectivamente, são iguais em módulo, verifica-se apenas uma diferença de fase $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$ entre elas, tendo-se:

$$E' = E \exp(i\Delta\psi) \quad (1)$$

A intensidade correspondente à sobreposição das duas ondas é dada por:

$$I = (E + E')(E + E')^* = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\psi}{2} \quad (2)$$

onde $I_0 = EE^*$. A Eq. (2) é semelhante à Eq. (3.7), obtida para o caso da experiência de Young. A diferença de fase $\Delta\psi$ é determinada pela diferença de percursos entre as ondas interferentes. Considerando a geometria da Fig. 7.10, tem-se que essa diferença de percursos é $s = u + v$ e

$$u = d \cos \theta, \quad v = d \cos \gamma \quad (3)$$

Deste modo, a diferença de fase é dada por

$$\Delta\psi = k(u + v) = kd(\cos \theta + \cos \gamma) \quad (4)$$

onde k é o número de onda. Substituindo a Eq. (4) na Eq. (2), obtém-se

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{kd}{2} (\cos \gamma + \cos \theta) \right) \quad (5)$$

Os ângulos γ e θ , assim como o número de onda k , podem ser conhecidos a partir da configuração experimental.

PR 7.7. Numa experiência de interferometria holográfica, a superfície a estudar é iluminada perpendicularmente por luz com comprimento de onda $\lambda = 500$ nm. Se o deslocamento a ser determinado é de 4000 nm, diga quantas franjas serão contadas quando

- a) o deslocamento é perpendicular à superfície;
- b) o deslocamento faz um ângulo de 60° com a normal.

Resolução

a) Como se viu no Capítulo 3, quando um dos espelhos do interferômetro de Michelson sofre uma translação de $\lambda_0 / 2$, cada franja no padrão de interferência desloca-se de modo a ocupar o lugar da franja adjacente. Deste modo, a uma distância Δd percorrida pela superfície a estudar na direcção da normal corresponde um número, N , de franjas que passam por uma dada posição de referência, dado por:

$$N = \frac{2\Delta d}{\lambda_0} \quad (1)$$

Usando os valores $\lambda_0 = 500$ nm e $\Delta d = 4000$ nm, tem-se

$$N = \frac{2 \times 4 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-7}} = 16 \text{ franjas} \quad (2)$$

b) Se o deslocamento fizer um ângulo de 60° com a normal, tem-se

$$N = \frac{2\Delta d}{\lambda_0} \cos \theta = 16 \times \cos 60^\circ = 8 \text{ franjas} \quad (3)$$

PR 7.8. Considere o caso de um objecto oscilando de modo sinusoidal, com uma amplitude d e uma frequência angular ω . Tendo por base a geometria da Fig. 7.10 para o caso $\gamma = \theta = 0$, obtenha uma expressão para a intensidade da onda objecto reconstruída e represente-a graficamente.

Resolução

Pode-se escrever a onda objecto na forma:

$$E_o(t) = A \exp(-ik2d \sin \omega t) \quad (1)$$

A energia de exposição pode ser obtida na forma:

$$B = \int_0^{t_B} I(t) dt \quad (2)$$

sendo a intensidade resultante dada por:

$$I(t) = (E_o(t) + E_R)(E_o(t) + E_R)^* \quad (3)$$

Por outro lado, o coeficiente de transmissão em amplitude da emulsão fotográfica na zona linear da Fig. 7.3 pode ser escrita na forma:

$$\tau = \tau_0 + \beta B \quad (4)$$

Usando como onda de reconstrução a onda de referência E_R , obtém-se os quatro termos referidos na Secção 7.2, um dos quais corresponde à imagem directa do objecto, dada por:

$$\begin{aligned} E_d &= \beta |E_R|^2 \int_0^{t_B} E_o(t) dt \\ &= \beta |E_R|^2 \int_0^{t_B} A \exp(-ik2d \sin \omega t) dt \end{aligned} \quad (5)$$

O integral do membro direito na Eq. (5) pode exprimir-se em termos da função de Bessel de ordem zero, J_0 , que é definida do modo:

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\alpha \sin t) dt \quad (6)$$

Deste modo, a intensidade da onda objecto reconstruída pode ser dada na forma:

$$I_d = E_d E_d^* \propto J_0^2(2kd) \quad (7)$$

Na Fig. 7.11 mostra-se o gráfico da função J_0^2 . A função tem zeros para $\alpha \approx 2.405, 5.52, \dots$, que não são equidistantes. Por outro lado, a altura dos máximos de ordem superior diminui com o aumento da diferença de fase.

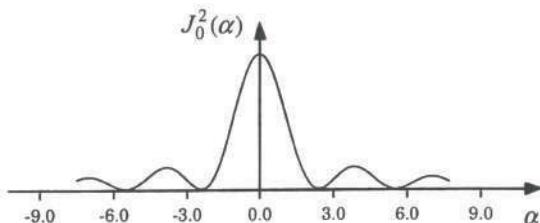


Figura 7.11 – Gráfico da função $J_0^2(\alpha)$.

7.9 Problemas propostos

PP 7.1. Descreva o princípio da holografia, comparando-a com a fotografia. Justifique a importância da coerência da luz usada no registo holográfico.

PP 7.2. Partindo das Eq.s (7.5) e (7.6), obtenha as Eq.s (7.8a) e (7.8b) para a intensidade transmitida quando o negativo do registo holográfico é iluminado por uma onda de reconstrução com intensidade I_R .

PP 7.3. Mostre que, no sentido de o holograma proporcionar uma onda transmitida cuja amplitude seja uma reprodução linear da intensidade registada, os gamas correspondentes às cópias negativa e positiva devem satisfazer a condição $\gamma_N \gamma_P = 2$.

PP 7.4. Explique por que razão os efeitos não-lineares são mais acentuados nos hologramas de fase do que nos hologramas de amplitude.

PP 7.5. O filme fotográfico Kodak Tri-X tem uma resolução máxima de cerca de 50 linhas/mm. Qual é o ângulo máximo entre as ondas objecto e de referência para este filme se se usar luz com comprimento de onda $\lambda = 632.8$ nm?

PP 7.6. Regista-se um holograma, de tal modo que as ondas objecto e de referência incidem no filme segundo um ângulo de 25° e de 45° , respectivamente. Usando a mesma onda de referência durante a reconstrução, segundo que ângulo se formará a imagem conjugada? Para que valor do ângulo de incidência da onda de reconstrução se verifica o desaparecimento da imagem conjugada?

PP 7.7. Pretende-se produzir uma rede de difracção usando a técnica holográfica e luz com um comprimento de onda $\lambda = 550$ nm. Esboce um esquema da montagem a utilizar e calcule os ângulos a considerar para que a rede tenha 500 linhas por milímetro.

PP 7.8. Um holograma de luz branca é registado usando luz com comprimento de onda $\lambda = 660$ nm, de tal modo que as ondas objecto e de referência são ambas perpendiculares à placa holográfica. Durante a reconstrução, para que valor do ângulo de incidência aparece a imagem com uma cor verde ($\lambda = 500$ nm)?

7.10. Referências bibliográficas

1. R. Collier, C. Burckhardt e L. Lin, *Optical Holography*, Academic Press, New York, 1971.
2. R. Guenther, *Modern Optics*, 2nd Ed., Oxford University Press, 2015.
3. R. Jones e C. Wykes, *Holographic and Speckle Interferometry*, 2nd Ed., Cambridge University Press, 1989.
4. P. Hariharan, *Optical Holography*, 2nd Ed., Cambridge University Press, 2012.
5. C. M. Vest, *Holographic Interferometry*, Wiley, New York, 1979.
6. F. L. Pedrotti, L. M. Pedrotti e L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, 3rd Ed., Cambridge University Press, 2018.

Capítulo 8

ÓPTICA NÃO-LINEAR

Assim como um sistema mecânico simples (por exemplo, uma mola) pode manifestar uma resposta não-linear quando se encontra sujeito a forças suficientemente intensas, também é razoável supor que um dado meio material, quando percorrido por um feixe luminoso de intensidade elevada, evidencie efeitos não-lineares. De facto, estes efeitos tornaram-se facilmente observáveis com o advento de fontes de luz suficientemente intensa e coerente, como sucede com os lasers. Nestas circunstâncias, verifica-se que as propriedades ópticas do meio variam com a intensidade da luz e que a interferência de duas ou mais ondas luminosas nesse meio deixa de satisfazer o princípio da sobreposição. A primeira experiência no âmbito da óptica não-linear foi realizada por Peter A. Franken e seus colaboradores na Universidade de Michigan, em 1961, quando observaram pela primeira vez os fenómenos da geração do segundo harmónico e de rectificação óptica.

Neste capítulo serão referidos apenas alguns dos fenómenos mais importantes na área da óptica não-linear, sendo alguns deles discutidos no caso em que o meio não-linear é uma fibra óptica. Na realidade, o domínio da óptica não-linear é actualmente bastante extenso, contemplando muitos outros fenómenos para além dos referidos neste capítulo.

8.1. O meio não-linear

No tratamento habitual da propagação da luz num meio material assume-se uma relação linear entre o campo óptico e a resposta desse meio, i. e., a polarização, dada por

$$P = \varepsilon_0 \chi E \quad (8.1)$$

onde χ é a *susceptibilidade* do meio e ε_0 a permitividade do vácuo. No caso de um meio com características não-lineares, a susceptibilidade pode ser escrita como uma série de potências, na forma:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 E + \chi_3 E^2 + \dots \quad (8.2)$$

Deste modo, substituindo a Eq. (8.2) na Eq. (8.1), tem-se que a polarização pode ser apresentada na forma:

$$P = \varepsilon_0 \chi_1 E + P_{NL} \quad (8.3)$$

O primeiro termo no membro direito da Eq. (8.3) corresponde à parte linear da polarização, enquanto que o termo P_{NL} corresponde à parte não-linear e é dado por:

$$P_{NL} = \epsilon_0(\chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \dots) = P_2 + P_3 + \dots \quad (8.4)$$

Os coeficientes linear e não-lineares da susceptibilidade, assim como a relação entre P e E dada pelas Eq.s (8.3) e (8.4), descrevem completamente a resposta do meio ao campo eléctrico.

De entre os fenómenos resultantes do termo de segunda ordem na Eq. (8.4), $P_2 = \epsilon_0 \chi_2 E^2$, pode-se referir a geração do segundo harmónico, a mistura de três ondas, a rectificação óptica, a amplificação paramétrica e o efeito Pockels. Contudo, verifica-se que esse termo se anula e estes fenómenos deixam de ser observados quando o meio material é centrossimétrico. Quanto ao termo de terceira ordem na Eq. (8.4),

$$P_3 = \epsilon_0 \chi_3 E^3, \quad (8.5)$$

ele dá origem a fenómenos como a mistura de quatro ondas, a conjugação óptica da fase, a dispersão Raman, a dispersão Brillouin e o efeito Kerr.

8.2. Propagação de ondas num meio não-linear

Considere-se um meio homogéneo, livre de cargas, isolador e não magnético, cujas relações constitutivas são dadas por:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.6)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (8.7)$$

A polarização do meio, \vec{P} , pode ser decomposta numa parte que depende de um modo linear e noutra que depende de um modo não-linear relativamente ao campo \vec{E} , como se indica na Eq. (8.3). A lei de Ampére, dada pela Eq. (1.10), pode-se escrever com base nos vectores campo magnético, \vec{H} , e deslocamento eléctrico, \vec{D} , na forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8.8)$$

onde se considerou que $\vec{J} = \vec{0}$. Manipulando as Eq.s (1.9), (8.3) e (8.6)-(8.8) de modo a eliminar o campo magnético, pode-se obter a seguinte equação de onda para o campo eléctrico num meio não-linear:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (8.9)$$

onde

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) \quad (8.10)$$

Em contraste com o que acontece com a equação de onda linear, não é possível obter soluções analíticas de âmbito geral para a Eq. (8.9). Por este motivo, analisar-se-á a seguir um caso específico, correspondente ao problema da interacção de três ondas na presença de uma não-linearidade quadrática.

8.2.1. Interacção de três ondas

Considere-se a situação em que o campo eléctrico é composto por três ondas planas com frequências ω_1 , ω_2 e ω_3 , relacionadas na forma:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad (8.11)$$

Supondo que as três ondas se propagam segundo o eixo dos z , pode-se escrever os respectivos campos do modo:

$$E(\omega_i) = E_i = \frac{1}{2} [E_i(z) \exp\{i(\omega_i t - k_i z)\} + E_i^*(z) \exp\{-i(\omega_i t - k_i z)\}], i=1, 2, 3 \quad (8.12)$$

Assumindo que a amplitude complexa das ondas varia lentamente com a distância z , tem-se que o primeiro termo no membro esquerdo da Eq. (8.9) dá:

$$\nabla^2 E_i = -\frac{1}{2} \left(k_i^2 E_i + 2ik_i \frac{\partial E_i}{\partial z} \right) \exp\{i(\omega_i t - k_i z)\} + c.c. \quad (8.13)$$

onde *c.c.* indica o complexo conjugado da expressão anterior.

Considera-se que a parte não-linear da polarização é dada apenas pelos termos de segunda ordem, podendo ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} P_{NL} &= P_{NL}(\omega_1) + P_{NL}(\omega_2) + P_{NL}(\omega_3) \\ &= d [E^*(\omega_3)E(\omega_3) + E^*(\omega_1)E(\omega_3) + E(\omega_1)E(\omega_2)] \end{aligned} \quad (8.14)$$

onde d é o chamado *coeficiente não-linear*. Usando as Eq.s (8.11)-(8.14), pode-se obter da Eq. (8.9) três equações acopladas, dadas por:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -\frac{i\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}} d E_3 E_2 * \exp\{-i(k_3 - k_2 - k_1)z\} \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = -\frac{i\omega_2}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} d E_3 E_1 * \exp\{-i(k_3 - k_2 - k_1)z\} \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial z} = -\frac{i\omega_3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_3}} d E_1 E_2 \exp\{-i(k_1 + k_2 - k_3)z\} \quad (8.17)$$

No caso geral, existe uma diferença de fase entre a onda com frequência ω_3 e as ondas com frequências ω_1 e ω_2 correspondente a:

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1 \quad (8.18)$$

Quando $\Delta k = 0$ pode-se multiplicar cada uma das Eq.s (8.15)-(8.17) por E_i^* e obter a seguinte identidade:

$$\frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} \frac{\partial}{\partial z} (E_1 E_1^*) = \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu}} \frac{\partial}{\partial z} (E_2 E_2^*) = -\frac{1}{\omega_3} \sqrt{\frac{\epsilon_3}{\mu}} \frac{\partial}{\partial z} (E_3 E_3^*) \quad (8.19)$$

A Eq. (8.19) corresponde à lei da conservação da energia, sendo conhecida por *relação de Manley-Rowe*.

As Eq.s (8.15)-(8.17) podem ser usadas para caracterizar vários fenómenos não-lineares, tais como a geração da frequência soma, – como se mostra no problema PR 8.3 –, a amplificação paramétrica – como se mostra no problema PR 8.4 – e a geração do segundo harmónico, que considera a seguir.

8.3. Geração do segundo harmónico

Consideremos o caso em que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ e $\omega_3 = 2\omega$, $\Delta k = 0$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$. Assume-se que os campos são dados por $E_1 = E_2 = E(\omega) \exp\{i\phi(\omega)\}$ e $E_3 = E(2\omega) \exp\{i\phi(2\omega)\}$ e que o meio não-linear se situa na região $z \geq 0$. Admite-se ainda que $E_3 = 0$ e $E_1 = E_0 \exp\{i\phi(\omega)\}$ para $z = 0$.

Nestas condições, as Eq.s (8.15)-(8.17) resumem-se apenas a duas, que se podem escrever na forma:

$$\frac{\partial E(\omega)}{\partial z} = -i \frac{1}{2} A E(\omega) E(2\omega) \exp\{-i\Delta\psi\} \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial E(2\omega)}{\partial z} = -i A E^2(\omega) \exp\{i\Delta\psi\} \quad (8.21)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} d\omega \quad (8.22a)$$

e

$$\Delta\psi = 2\phi(\omega) - \phi(2\omega) \quad (8.22b)$$

De modo a favorecer o incremento do segundo harmónico, assumir-se-á a condição:

$$\Delta\psi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Nesta situação e usando a lei da conservação da energia, pode-se reescrever a Eq. (8.21) na forma:

$$\frac{\partial E(2\omega)}{\partial z} = A [E_0^2(\omega) - E^2(2\omega)] \quad (8.23)$$

Integrando a Eq. (8.23) obtém-se a seguinte solução para a amplitude do segundo harmónico a uma distância z no meio não-linear:

$$E(2\omega) = E_0(\omega) \tanh[AE_0(\omega)z] \quad (8.24)$$

Usando a Eq. (8.24) e o princípio da conservação da energia pode-se obter igualmente a seguinte solução para a evolução da amplitude da onda incidente:

$$E(\omega) = E_0(\omega) \operatorname{sech}[AE_0(\omega)z] \quad (8.25)$$

Na Fig. 8.1 ilustra-se o comportamento das intensidades do segundo harmónico, $I(2\omega) \propto E^2(2\omega)$, e da onda incidente, $I(\omega) \propto E^2(\omega)$.

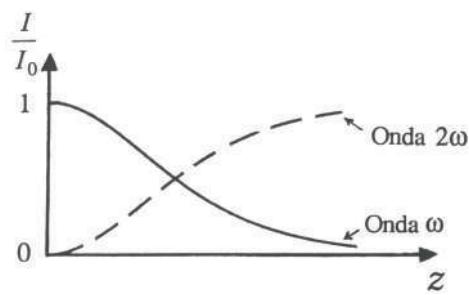


Figura 8.1 – Evolução das intensidades do segundo harmónico (2ω) e da onda incidente (ω).

8.4. Conjugação óptica da fase

A *conjugação óptica da fase* (COF) é um fenómeno não-linear que deve o seu nome ao facto da parte espacial do feixe resultante da interacção ser igual ao complexo conjugado da parte espacial da onda incidente. Ou seja, a onda gerada propaga-se no sentido contrário ao da onda original, reproduzindo exactamente a forma dessa onda em cada posição. Deste modo, pode-se considerar o meio não-linear que produz a onda com fase conjugada como um espelho, designado habitualmente por *espelho de conjugação da fase* (ECF). As características deste espelho são geralmente distintas dos espelhos ordinários.

Considere-se o caso de uma onda plana:

$$E_i = E_0 \exp\{i(\omega t - kz)\}, \quad (8.26)$$

incidindo normalmente num espelho plano ordinário. Neste caso, a onda reflectida é também uma onda plana, dada por:

$$E_r = E_0 \exp\{i(\omega t + kz)\}. \quad (8.27)$$

Ou seja, do ponto de vista matemático, se se exceptuar o termo ωt , a onda reflectida é o complexo conjugado da onda incidente e apresenta as características da onda com fase conjugada referida antes.

Se a onda incidente no espelho plano ordinário não for uma onda plana, ou se a incidência não for normal, a onda reflectida por esse espelho já não tem as características da onda com fase conjugada. No caso de uma onda esférica gerada num dado ponto, é possível ter uma onda com fase conjugada, que converge para esse mesmo ponto, apenas se se tiver um espelho côncavo com uma curvatura exactamente igual à da frente de onda nele incidente.

Em contraste com os espelhos ordinários, um ECF pode produzir uma onda com fase conjugada para uma frente de onda incidente com forma arbitrária, sendo ainda capaz de responder de modo imediato às alterações espaciais ou temporais dessa mesma frente de onda.

A COF pode ser entendida como holografia em tempo real. Como se viu no Capítulo 7, quando o holograma é iluminado por uma onda de reconstrução, E_R , exactamente igual à onda de referência utilizada no registo desse holograma, obtém-se duas imagens do objecto original: uma virtual e outra real. A imagem virtual localiza-se exactamente na posição em que se encontrava o objecto original. Contudo, se o holograma for iluminado pela onda de referência conjugada, E_R^* , então a Eq. (7.12) para o campo difractado é substituída por:

$$E_t(x, y) = \tau(x, y)E_R^* = \tau_{_0}E_R^* + \beta t_B E_R^*(E_R E_R^* + E_O E_O^* + E_O E_R^* + E_R E_O^*) \quad (8.28)$$

O último termo na Eq. (8.28), que é proporcional a $|E_R|^2 E_O^*$, corresponde à onda objecto com fase conjugada, E_O^* , que proporciona uma imagem real na própria posição do objecto original.

No processo de COF os processos de registo e de reconstrução holográfica ocorrem em tempo real. A Fig. 8.2 mostra o ECF exposto às ondas de referência original e conjugada, E_R e E_R^* (que funcionam como ondas de bombeamento), assim como às ondas objecto e imagem, E_O e E_O^* , respectivamente. Pode-se considerar que as ondas E_R e E_O interferem e produzem um holograma em tempo real. A onda E_R^* é difractada por este holograma, produzindo a onda com fase conjugada E_O^* . Esta técnica de produzir a COF é chamada *mistura de quatro ondas*, dado que corresponde, de facto, à interferência de quatro ondas num meio não-linear.

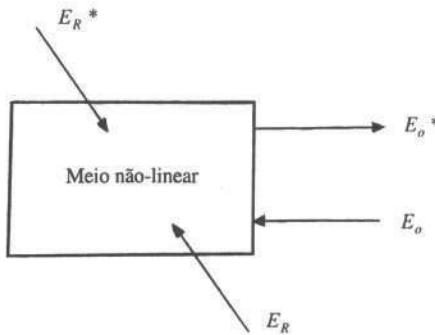


Figura 8.2 – Geometria para a conjugação óptica da fase por mistura de quatro ondas.

Quando uma frente de onda é distorcida, devido, por exemplo, às flutuações do índice de refracção existentes numa dada região, a onda com fase conjugada, ao propagar-se na direcção oposta, encontra as mesmas variações, mas de modo inverso. Como consequência, a onda com fase conjugada deixa essa região com a frente de onda original completamente restaurada.

8.5. Efeitos não-lineares em fibras ópticas

Os efeitos não-lineares nas fibras ópticas podem dividir-se de modo genérico em duas categorias. Uma dessas categorias contempla as dispersões estimuladas, nomeadamente a dispersão Brillouin estimulada e a dispersão Raman estimulada, que resultam da interacção entre os sinais ópticos e as vibrações acústicas ou moleculares do material da fibra. Apesar de ambos os processos apresentarem um ganho exponencial, o seu impacto nos sistemas de comunicação é bastante diferente, como se verá a seguir. A segunda categoria de efeitos não-lineares é devida à modulação do índice de refracção da sílica pelas variações da amplitude do sinal. Este facto dá origem a fenómenos como a auto-modulação da fase, a modulação cruzada da fase e a nistura de quatro ondas.

8.5.1. Dispersão Raman estimulada

A dispersão Raman estimulada (DRE) pode ser descrita como um processo envolvendo três ondas: uma onda de bombeamento (com frequência ω_b), uma onda de excitação do material, correspondente aos seus modos de vibração (com frequência ω_v), e uma onda dispersa, ou onda de Stokes (com frequência ω_s). A Fig. 8.3 ilustra as três ondas envolvidas neste processo. No caso de uma fibra óptica, o sentido de propagação da onda de Stokes pode ser igual ou oposto ao da onda de bombeamento. No que se segue considerar-se-á apenas a primeira situação.

As potências de bombeamento (P_b) e de Stokes (P_s) envolvidas no processo de DRE numa fibra óptica satisfazem as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{dP_b}{dz} + \alpha_b P_b = -\frac{g_r \lambda_s P_b P_s}{A_{ef} \lambda_b} \quad (8.29)$$

$$\frac{dP_s}{dz} + \alpha_s P_s = \frac{g_r P_b P_s}{A_{ef}} \quad (8.30)$$

onde A_{ef} é a área efectiva do modo, α_b e α_s são as constantes de atenuação na fibra para os comprimentos de onda de bombeamento e de Stokes, respectivamente, e g_r é o coeficiente de ganho Raman, que está relacionado com a parte imaginária da susceptibilidade de terceira ordem χ_3 .

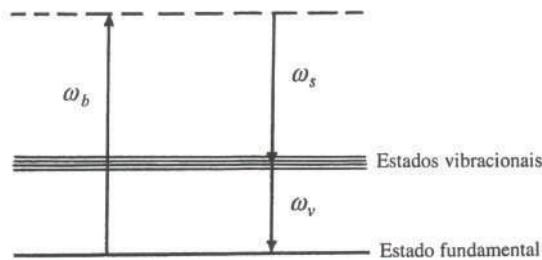


Figura 8.3 – Representação das transições correspondentes a cada uma das ondas envolvidas no processo da DRE.

Apesar de não haver uma expressão teórica exacta para o coeficiente de ganho g_r na sílica fundida, ele pode ser obtido a partir das medidas do espectro da dispersão Raman espontânea ou a partir das medidas relativas à interacção entre uma onda de bombeamento e uma onda de sinal. Uma característica importante do coeficiente de ganho Raman é a banda de frequências relativamente larga em que ele se estende (cerca de 40 THz), verificando-se a existência de um pico dominante para um desvio de cerca de 13 THz como se mostra na Fig. 8.4. Contudo, o valor máximo deste coeficiente na sílica fundida é duas a três ordens de grandeza inferior ao valor máximo do coeficiente de ganho Brillouin, referido na próxima secção.

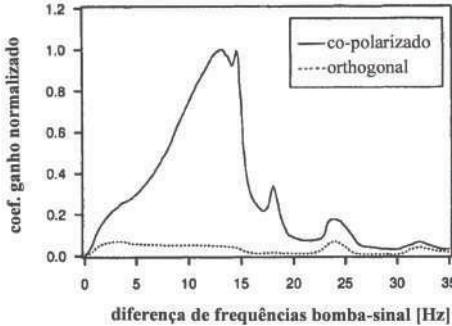


Figura 8.4 – Coeficiente de ganho normalizado para os casos de polarização paralela (curva a cheio) ou ortogonal (curva a ponteado) das ondas de bombeamento e de sinal. (Bromage, J. Lightwave Technol. 22, 79 (2004)).

Quando a atenuação não-linear da potência de bombeamento é pouco significativa, pode-se desprezar o membro direito da Eq. (8.29), e obtendo-se então a solução:

$$P_b(z) = P_b(0) \exp\{-\alpha_b z\} \quad (8.31)$$

onde $P_b(0)$ é a potência de bombeamento lançada na fibra. Substituindo a Eq. (8.31) na Eq. (8.30) obtém-se o seguinte resultado para a potência de Stokes à saída da fibra:

$$P_S(L) = P_S(0) \exp\left\{g_r P_b(0) \frac{L_{ef}}{A_{ef}} - \alpha_s L\right\} \quad (8.32)$$

onde $P_S(0)$ é o sinal injectado à entrada da fibra e L_{ef} é a distância efectiva de interacção dada por

$$L_{ef} = \frac{1 - e^{-\alpha_s L}}{\alpha_s} \quad (8.33)$$

Na prática, quando apenas um feixe (o feixe de bombeamento) é lançado na fibra, não existe o sinal $P_S(0)$ e o processo de DRE tem a sua origem na dispersão Raman espontânea gerada ao longo da fibra. Os fotões gerados deste modo experimentam um ganho exponencial de acordo com a Eq. (8.32). A potência de bombeamento limiar (P_{bl}) corresponde à situação em que a potência de Stokes, originada a partir da dispersão espontânea, atinge um valor igual à potência de bombeamento à saída da fibra, sendo dada por:

$$P_{bl} \approx \frac{16 A_{ef}}{g_r L_{ef}} \quad (8.34)$$

Considerando os valores típicos $g_r = 6.7 \times 10^{-14} \text{ m/W}$, $A_{ef} = 50 \mu\text{m}^2$ e $L_{ef} \approx 20 \text{ km}$, tem-se $P_{bl} \approx 600 \text{ mW}$.

O valor obtido para a potência limiar da DRE é relativamente elevado e pode sugerir que este efeito não constitui qualquer limitação para os sistemas de comunicação por fibra óptica. Todavia, essas limitações podem

fazer-se sentir, de facto, ao nível dos sistemas de comunicação com múltiplos canais, dado que a potência total neste caso pode exceder facilmente aquele limiar. Actualmente, o maior problema suscitado pela DRE tem que ver com o acoplamento de canais nestes sistemas, em cujo processo se verifica a transferência de energia de um dado canal para os canais com comprimento de onda superior.

A DRE pode ser utilizada na realização de amplificadores de fibra óptica. Na Fig. 8.5 representa-se esquematicamente um amplificador Raman de fibra óptica. Estes amplificadores caracterizam-se, nomeadamente, por poderem operar em qualquer comprimento de onda e por apresentarem uma curva de ganho bastante larga (> 5 THz), pelo que podem ser usados num sistema de comunicação com múltiplos canais para amplificar simultaneamente todos esses canais. A mesma característica permite que esses amplificadores possam ser usados para amplificar impulsos de luz ultracurtos.

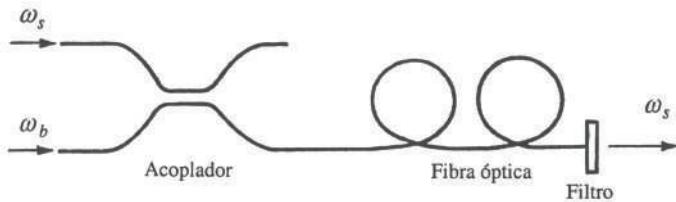


Figura 8.5 – Representação esquemática de um amplificador Raman de fibra óptica.

8.5.2. Dispersão Brillouin estimulada

O processo de dispersão Brillouin estimulada (DBE) tem alguma semelhança com o processo de DRE, podendo também ser descrito como uma interacção de três ondas acopladas: a onda incidente, ou onda de bombeamento, com frequência ω_b , uma onda acústica gerada no meio com frequência ω_a e uma onda dispersa, ou onda de Stokes, com frequência ω_s . A onda de bombeamento, origina uma onda de pressão no meio, que, por sua vez, determina uma modulação periódica do seu índice de refracção. Esta modulação do índice de refracção provoca a dispersão da onda de bombeamento, dando assim origem à onda de Stokes. Na Fig. 8.6 representa-se de modo esquemático a interacção entre as três ondas envolvidas no processo da DBE.

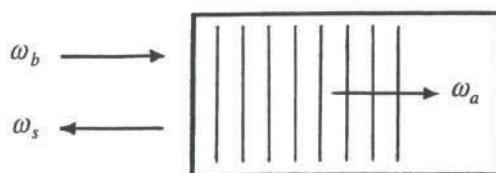


Figura 8.6 – Representação da interacção entre as três ondas envolvidas no processo da DBE.

As três ondas envolvidas no processo da DBE satisfazem as leis de conservação da energia e do momento, pelo que as suas frequências e vectores de onda se relacionam na forma:

$$\omega_a = \omega_b - \omega_s \quad (8.35)$$

$$\vec{k}_a = \vec{k}_b - \vec{k}_s \quad (8.36)$$

onde os índices a , b e S se referem às ondas acústica, de bombeamento e de Stokes, respectivamente. A frequência ω_a e o vector de onda \vec{k}_a da onda acústica satisfazem a seguinte relação de dispersão:

$$\omega_a = k_a v_a = 2v_a k_b \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (8.37)$$

onde $k_a = |\vec{k}_a|$, $k_b = |\vec{k}_b|$, v_a é a velocidade da onda acústica e ϕ é o ângulo entre as ondas de bombeamento e de Stokes. Da Eq. (8.37) pode ver-se que a frequência da onda acústica é máxima quando $\phi = \pi$ rad, anulando-se para $\phi = 0$ rad.

No caso de uma fibra óptica, a onda de Stokes gerada pelo efeito Brillouin propaga-se em sentido contrário à onda de bombeamento. A frequência da onda de Stokes é inferior à da onda de bombeamento de um valor igual à frequência acústica, dada a partir da Eq. (8.37), com $\phi = \pi$ rad, por:

$$f_a = \frac{2nv_a}{\lambda_b} \quad (8.38)$$

onde n é o índice de refracção e λ_b o comprimento de onda da luz de bombeamento. Considerando os valores típicos $v_a = 5.96$ km/s e $n = 1.45$, tem-se $f_a = 11.1$ GHz para $\lambda_b = 1.55$ μm.

O coeficiente de ganho Brillouin, $g_B(\Delta f)$, é dado por:

$$g_B(\Delta f) = \frac{2\pi n^7 p_{12}^2 \gamma}{c \lambda_b^2 \rho_0 v_a \Delta f_B} \frac{\Delta f_B^2}{4\Delta f^2 + \Delta f_B^2} \quad (8.39)$$

onde $\Delta f = f_b - f_S - f_a$ representa uma possível dessintonia entre as frequências das ondas de bombeamento, de Stokes e acústica, p_{12} é o coeficiente elasto-óptico longitudinal e ρ_0 o valor médio da densidade. O factor γ descreve o efeito da diferença de polarizações entre as ondas de bombeamento e de Stokes. Quando as polarizações das duas ondas são paralelas tem-se $\gamma = 1$ e quando são ortogonais tem-se $\gamma = 0$. Numa fibra longa e que não mantenha a polarização da luz, a direcção relativa dessas polarizações varia continuamente, tendo-se então $\gamma \approx 0.5$.

O coeficiente de ganho Brillouin dado pela Eq. (8.39) apresenta um perfil Lorentziano, com largura total a meia altura Δf_B . Esta largura é proporcional a $1/\lambda_b^2$, pelo que o valor máximo do coeficiente de ganho é independente do comprimento de onda da luz de bombeamento. Supondo que $\gamma = 1$, $\lambda_b = 1$ μm e considerando os valores típicos para a sílica fundida $p_{12} = 0.286$, $\rho_0 = 2.21 \times 10^3$ kg.m⁻³ e, $\Delta f_B = 55$ MHz, tem-se para o valor máximo do coeficiente de ganho Brillouin $g_B(0) = 4 \times 10^{-11}$ m/W.

A Eq. (8.39) é válida quando a luz de bombeamento apresenta uma largura espectral inferior à largura da curva de ganho Δf_B . Quando esta condição não é satisfeita, e admitindo que a linha de emissão do laser de bombeamento tem um perfil Lorentziano com largura Δf_B , o espectro de ganho Brillouin é dado ainda pela Eq. (8.39) mas com um valor de pico inferior, dado por:

$$g_B^{ef}(0) = g_B(0) \frac{\Delta f_B}{\Delta f_b + \Delta f_B} \quad (8.40)$$

A potência máxima transportada pela onda de Stokes é dada por:

$$P_S(0) = P_b(L) \exp\left\{g_B(0) \frac{P_b L_{ef}}{A_{ef}} - \alpha L\right\} \quad (8.41)$$

onde P_b é a potência de bombeamento, A_{ef} é a área efectiva da secção transversal do modo na fibra e L_{ef} é a distância efectiva de interacção, dada pela Eq. (8.33). Quando apenas uma onda (a onda de bombeamento) é lançada na fibra, a onda de Stokes tem a sua origem na dispersão Brillouin espontânea e experimenta, depois,

um ganho exponencial. Define-se um valor limiar para a potência de bombeamento, P_{bl} , tal que a onda de Stokes adquire uma potência semelhante a essa potência de bombeamento à entrada da fibra. Pode-se mostrar que essa potência limiar é dada aproximadamente pela expressão:

$$P_{bl} \approx \frac{21A_{ef}}{L_{ef}g_B(0)} \quad (8.42)$$

Se se considerar os valores típicos de uma fibra monomodo operando a $1.55 \mu\text{m}$, com $A_{ef} = 40 \mu\text{m}^2$, $L_{ef} \approx 20 \text{ km}$ e $g_B(0) \approx 4 \times 10^{-11} \text{ m/W}$, tem-se $P_{bl} \approx 1 \text{ mW}$. Este valor relativamente baixo para a potência limiar faz da DBE o efeito não-linear dominante em muitas situações. Isto verifica-se, por exemplo, no âmbito dos sistemas ópticos coerentes de comunicação, onde as fontes laser utilizadas apresentam larguras espetrais bastante inferiores à largura da curva Brillouin (Δf_B).

Quando a potência transmitida numa fibra óptica excede o limiar Brillouin, uma parte significativa dessa potência é convertida na radiação de Stokes e passa a propagar-se no sentido contrário, o que constitui um facto duplamente indesejável. Por um lado, a potência do sinal no receptor torna-se inferior à que seria recebida na ausência da dispersão Brillouin estimulada. Por outro lado, a onda de Stokes constitui uma realimentação externa para o laser emissor, podendo desestabilizar o seu funcionamento. Deste modo, é importante que a potência lançada na fibra seja inferior ao limiar Brillouin. Uma técnica que permite elevar o valor desta potência limiar consiste em aumentar a largura espectral efectiva da luz de bombeamento, Δf_b . Deste modo, o coeficiente de ganho Brillouin é reduzido, de acordo com a Eq. (8.40).

No caso dos sistemas coerentes bidireccionalis a DBE pode determinar o acoplamento de canais cuja separação seja próxima do desvio Brillouin ($\approx 11 \text{ GHz}$ a $1.55 \mu\text{m}$). Esse acoplamento traduz-se na amplificação de um canal à custa da potência transportada por outro. Contudo, dada a largura relativamente reduzida da banda de frequências em que o acoplamento pode acontecer ($\approx 100 \text{ MHz}$), este efeito pode, na prática, ser facilmente evitado.

Para além das limitações apontadas acima, a DBE pode ser aproveitada de modo positivo para realizar amplificadores de fibra óptica. Estes amplificadores podem proporcionar ganhos elevados com potências de bombeamento muito modestas, embora a largura da sua curva de ganho seja relativamente pequena. Esta última característica pode ser utilizada com vantagem, por exemplo, para conseguir a amplificação selectiva de um dado canal em sistemas de comunicação com múltiplos canais.

8.5.3. Auto-modulação da fase

Mostra-se no problema PR 8.2 que se pode exprimir a dependência do índice de refracção das fibras ópticas relativamente à intensidade da onda óptica, na forma:

$$n = n_0 + n_2 I \quad (8.43)$$

onde n_0 é a parte linear do índice de refracção, dada por:

$$n_0 = \sqrt{1 + \chi_1} \quad (8.44)$$

sendo χ_1 a susceptibilidade linear. Por outro lado, n_2 é o coeficiente não-linear, conhecido por *coeficiente de Kerr*, dado por:

$$n_2 = \frac{3}{4} \frac{\chi_3}{c \epsilon_0 n_0^2} \quad (8.45)$$

onde χ_3 é a susceptibilidade de terceira ordem.

A intensidade I na Eq. (8.43) pode ser escrita de modo aproximado na forma

$$I \approx \frac{P}{A_{ef}} \quad (8.46)$$

onde P é a potência transportada por um modo da fibra e A_{ef} a área efectiva da secção transversal desse modo.

No caso das fibras ópticas, tem-se:

$$n_0 \approx 1.46, \quad n_2 \approx 3.2 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W} \quad (8.47)$$

Se se considerar uma fibra monomodo com uma área efectiva $A_{ef} = 50 \mu\text{m}^2$ e uma potência $P = 100 \text{ mW}$, o valor da parte não-linear do índice de refracção é

$$n_2 \frac{P}{A_{ef}} \approx 6.4 \times 10^{-11} \quad (8.48)$$

Apesar deste valor ser bastante pequeno, os seus efeitos tornam-se significativos devido aos longos comprimentos de interacção (10 - 10000 km) proporcionados pelas fibras ópticas.

A variação do índice de refracção determina uma variação da constante de propagação do modo, que se pode escrever aproximadamente na forma:

$$\beta = \frac{n\omega_0}{c} = \frac{\omega_0}{c} \left[n_0 + \frac{n_2 P}{A_{ef}} \right] = \beta_L + \beta_{NL} \quad (8.49)$$

onde

$$\beta_L = \frac{n_0 \omega_0}{c} \quad (8.50)$$

e

$$\beta_{NL} = \frac{\omega_0 n_2 P}{c A_{ef}} \quad (8.51)$$

correspondem à parte linear e não-linear da constante de propagação, respectivamente. Deste modo, uma onda incidente na forma:

$$E(z=0, t) = A \exp\{i\omega_0 t\} \quad (8.52)$$

assume o seguinte aspecto depois de percorrer uma distância z :

$$\begin{aligned} E(z, t) &= A \exp\{i(\omega_0 t - \beta z)\} \\ &= A \exp\left\{i\left(\omega_0 t - \beta_L z - \frac{\omega_0 n_2 P}{c A_{ef}} z\right)\right\} \end{aligned} \quad (8.53)$$

No caso de a onda incidente corresponder a um impulso com uma potência $P(t)$ dependente do tempo, o impulso à saída é trinado. Este fenómeno é chamado de *auto-modulação da fase* (AMF), dado que a variação da potência do impulso com o tempo determina a modulação da sua própria fase.

A frequência instantânea dentro do impulso pode ser apresentada na forma:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\omega_0 n_2 z}{c A_{ef}} \frac{dP}{dt} \quad (8.54)$$

A Eq. (8.54) mostra que na parte da frente do impulso, em que se tem $dP/dt > 0$, a frequência instantânea é inferior a ω_0 , enquanto que, na parte de trás do impulso, em que se tem $dP/dt < 0$, essa frequência é superior a ω_0 . A frequência central do impulso, ω_0 , mantém-se inalterada. Deste modo, a AMF impõe um trinado ao impulso, como se representa na Fig. 8.7.

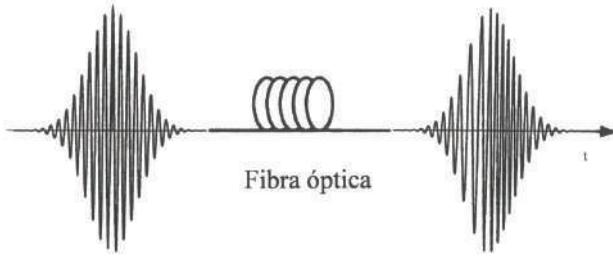


Figura 8.7 – Representação esquemática do trinado imposto ao impulso pela auto-modulação da fase.

No regime de dispersão normal, os trinados devidos à dispersão e à AMF actuam do mesmo modo. Como consequência, o trinado global do impulso tende a acentuar-se para potências mais elevadas do impulso, situação em que a não-linearidade da fibra mais se faz sentir. Entretanto, no regime de dispersão anómala, os trinados devidos aos dois efeitos actuam do modo oposto, tendendo a compensar-se. Se a compensação for total, o impulso mantém a sua forma constante durante a propagação, sendo então designado por solitão.

8.5.4. Solitões em fibras ópticas

O campo eléctrico associado a uma sequência de impulsos que se propagam numa fibra óptica alinhada segundo o eixo dos z pode ser escrito na forma:

$$E = \frac{1}{2} \left(F(r, \phi) U(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \right) \quad (8.55)$$

onde $U(z, t)$ descreve a amplitude complexa da envolvente do campo na posição z , $F(r, \phi)$ descreve a distribuição transversal do modo fundamental da fibra e β_0 é a constante de propagação do modo na frequência da portadora, ω_0 .

A única grandeza que varia durante a propagação é a amplitude $U(z, t)$. Dado que a componentes espectrais diferentes do campo óptico correspondem constantes de propagação ligeiramente diferentes, torna-se conveniente trabalhar no domínio das frequências. A evolução de uma dada componente espectral $\tilde{U}(z, \omega)$ é dada por:

$$\tilde{U}(z, \omega) = \tilde{U}(0, \omega) \exp[i\beta(\omega)z - i\beta_0 z] \quad (8.56)$$

onde $\tilde{U}(0, \omega)$ é a transformada de Fourier do sinal à entrada da fibra $U(z = 0, t)$ e $\beta(\omega)$ é a constante de propagação, que pode ser escrita como a soma de uma parte linear, β_L , e de uma parte não-linear, β_{NL} , como se indica nas Eqs. (8.49)-(8.51).

Pode-se expandir $\beta_L(\omega)$ numa série de Taylor em torno da frequência ω_0 , como se fez no Capítulo 5 – ver as Eq.s (5.32)-(5.34). Retendo nessa expansão apenas os termos até à segunda ordem em $(\omega - \omega_0)$, substituindo na Eq. (8.56), calculando a derivada $\partial\tilde{U}/\partial z$ e convertendo a equação resultante para o domínio dos tempos, usando a transformada de Fourier e a relação

$$\Delta\omega \leftrightarrow i\frac{\partial}{\partial} \quad (8.57)$$

obtém-se a equação

$$i\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial}\right)U - \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2}{\partial^2}U + \beta_{NL}U = 0 \quad (8.58)$$

Normalizando a amplitude U de tal modo que o quadrado do seu módulo seja igual à potência, $P = |U|^2$, tem-se $\beta_{NL} = \gamma|U|^2$, onde

$$\gamma = \frac{\omega_0 n_2}{c A_{eff}} \quad (8.59)$$

é o chamado *parâmetro não-linear da fibra*.

Considerando um referencial que se move com a velocidade de grupo e usando a nova variável temporal

$$\tau = t - \frac{z}{v_g} \quad (8.60)$$

a Eq. (8.58) pode ser escrita na forma:

$$i\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} + \gamma|U|^2U = 0 \quad (8.61)$$

A Eq. (8.61) é conhecida como a *equação não-linear de Schrödinger* (ENLS) e descreve a propagação de impulsos num fibra óptica sob os efeitos da dispersão da velocidade de grupo e da não-linearidade da fibra.

Pode-se considerar uma amplitude normalizada Q dada por:

$$U(z, \tau) = \sqrt{P_0}Q(z, \tau) \quad (8.62)$$

onde P_0 é a potência de pico do impulso na entrada da fibra. Usando as Eqs. (8.61) e (8.62), verifica-se que $Q(z, \tau)$ satisfaz a equação:

$$i\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 Q}{\partial\tau^2} + \gamma P_0|Q|^2Q = 0 \quad (8.63)$$

Pode-se definir uma *distância não-linear*, L_{NL} , do modo

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (8.64)$$

Pode-se definir igualmente uma *distância de dispersão*, L_D , na forma:

$$L_D = \frac{t_0^2}{|\beta_2|} \quad (8.65)$$

onde t_0 é a largura do impulso. L_{NL} e L_D correspondem a distâncias de propagação ao fim das quais os fenómenos não-lineares e dispersivos, respectivamente, se tornam relevantes na evolução do impulso.

Usando a distância Z , normalizada pela distância de dispersão L_D , e a variável temporal T , normalizada pela largura do impulso t_0 , a Eq. (8.63) fica:

$$i \frac{\partial Q}{\partial Z} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} + N^2 |Q|^2 Q = 0 \quad (8.66)$$

onde

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 t_0^2}{|\beta_2|} \quad (8.67)$$

No segundo termo da Eq. (8.66), o sinal mais corresponde ao caso da dispersão anómala ($\beta_2 < 0$), enquanto que o sinal menos corresponde à dispersão normal ($\beta_2 > 0$).

No regime de dispersão anómala e considerando $N=1$, a Eq. (8.66) possui uma solução na forma:

$$Q(Z, T) = \operatorname{sech}(T) \exp(iZ/2) \quad (8.68)$$

A solução anterior representa o chamado *solitão brilhante fundamental*, que se caracteriza pelo facto de a sua forma – representada na Fig. 8.8 – se manter constante durante a propagação. Contudo, nesse mesmo regime, a Eq. (8.66) admite igualmente soluções correspondentes a solitões de ordem superior, correspondentes a valores inteiros $N>1$, cujas formas variam periodicamente com a distância de propagação. O valor de N indica a ordem do solitão. Na Fig. 8.9 mostra-se a evolução do solitão de segunda ordem, obtida a partir de um impulso inicial dado por:

$$Q(0, T) = 2 \operatorname{sech}(T) \quad (8.69)$$

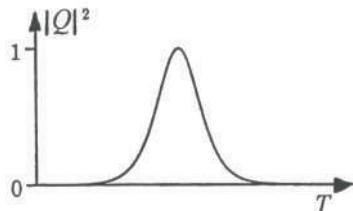


Figura 8.8 – Representação da intensidade do solitão brilhante fundamental.

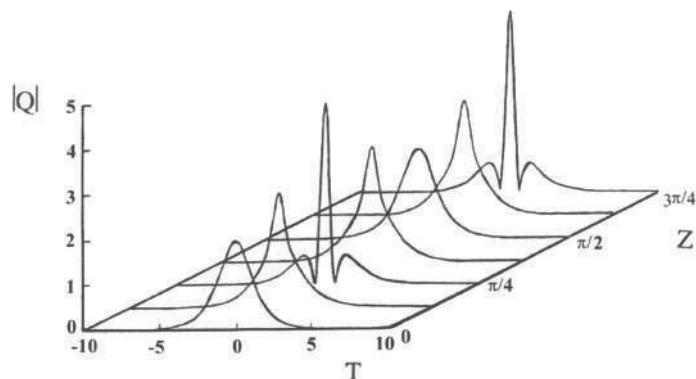


Figura 8.9 – Evolução do solitão de segunda ordem, governado pela Eq. (8.66).

No regime de dispersão normal, a Eq. (8.66), apresenta igualmente uma solução do tipo solitão, dada por:

$$Q(Z, T) = \tanh(T) \exp(iZ) \quad (8.70)$$

Esta solução, conhecida por *solitão escuro*, representa um impulso de intensidade reduzida num fundo de intensidade constante e mais elevada.

O facto de os solitões brilhantes fundamentais poderem propagar-se nas fibras ópticas sem se deformarem apresenta potencialidades enormes no domínio do processamento todo óptico do sinal e dos sistemas de comunicação de elevado débito.

8.6. Problemas resolvidos

PR 8.1. Assumindo um meio com simetria de inversão, em que a não-linearidade de terceira ordem é dominante, mostre que a polarização do material se pode escrever na forma:

$$P = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\hat{E}|^2 \right) E$$

Considere para o efeito que as condições de ajuste de fase para a geração do terceiro harmônico não são satisfeitas.

Resolução

Um meio com simetria de inversão apresenta uma susceptibilidade de segunda ordem nula. Por outro lado, a não-linearidade de terceira ordem pode apresentar-se na forma:

$$P_{NL}^{(3)} = \epsilon_0 \chi^{(3)} EEE \quad (1)$$

Considere-se o campo eléctrico de uma onda plana, dado por:

$$E = \frac{1}{2} (\hat{E}(z) e^{-i\omega t} + c.c.) \quad (2)$$

onde c.c. indica o complexo conjugado. Substituindo a Eq. (2) na Eq. (1), tem-se

$$P_{NL}^{(3)} = \epsilon_0 \chi^{(3)} (\hat{E} e^{-i\omega t} + \hat{E}^* e^{i\omega t})^3 = \frac{1}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} \left((\hat{E}^3 e^{-i3\omega t} + c.c.) + 3|\hat{E}|^2 (\hat{E} e^{-i\omega t} + c.c.) \right) \quad (3)$$

Se as condições de ajuste de fase para a geração do terceiro harmônico não forem satisfeitas, tem-se que o primeiro termo no membro direito da Eq. (3) pode ser desprezado, tendo-se então:

$$P_{NL}^{(3)} \approx \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} |\hat{E}|^2 E \quad (4)$$

Tendo em consideração este resultado e a Eq (8.3), a polarização do material vem dada por:

$$P = \varepsilon_0 \chi_1 E + P_{NL}^{(3)} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\hat{E}|^2 \right) E \quad (5)$$

PR 8.2. Usando o resultado obtido no problema PR 8.1, mostre que o índice de refracção do material varia com a intensidade, I , como se apresenta na Eq. (8.31).

Resolução

A intensidade da onda plana é dada pelo módulo do valor médio do vector de Poynting, dado pela Eq. (1.58):

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n_0 |\hat{E}|^2 \quad (1)$$

onde n_0 é a parte linear do índice de refracção. Substituindo a equação anterior na Eq. (5) do problema PR 8.1, tem-se que a polarização se pode escrever na forma:

$$P = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} + \frac{3}{2} \frac{\chi^{(3)}}{c \varepsilon_0 n_0} I \right) E \quad (2)$$

Por outro lado, a polarização e o índice de refracção de um meio relacionam-se genericamente na forma:

$$P = \varepsilon_0 (n^2 - 1) E \quad (3)$$

Comparando as Eq.s (2) e (3), pode-se obter o seguinte resultado para o índice de refracção

$$n = \sqrt{1 + \chi^{(1)} + \frac{3}{2} \frac{\chi^{(3)}}{c \varepsilon_0 n_0} I} \approx n_0 + n_2 I \quad (4)$$

onde

$$n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}} \quad (5)$$

é a parte linear do índice de refracção e

$$n_2 = \frac{3}{4} \frac{\chi^{(3)}}{c \varepsilon_0 n_0^2} \quad (6)$$

é o coeficiente da parte não linear do índice de refracção, também conhecido como *coeficiente de Kerr*.

PR 8.3. Considere que as duas ondas incidentes num meio não-linear (ondas de bombeamento), com frequências ω_1 e ω_2 , mantêm a sua amplitude constante. Suponha que o meio não-linear se situa na região $z \geq 0$ e que a amplitude da onda com frequência soma $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ é nula no plano $z = 0$. Obtenha uma expressão para a intensidade da onda com a frequência ω_3 e comente esse resultado para os casos $\Delta k \neq 0$ e $\Delta k = 0$.

Resolução

Assumindo as condições do problema, pode-se integrar a Eq. (8.17) e obter o resultado:

$$E_3 = -\frac{i \omega_3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}} dE_1 E_2 \frac{\exp\{i \Delta k z\} - 1}{i \Delta k} \quad (1)$$

A intensidade da onda com frequência ω_3 é dada por:

$$I_3(z) \propto E_3(z)E_3^*(z) = \omega_3^2 \frac{\mu}{\varepsilon_3} d^2 |E_1|^2 |E_2|^2 \frac{\sin^2[\Delta kz/2]}{(\Delta k)^2}, \quad \Delta k \neq 0 \quad (2)$$

A Eq. (2) mostra que, quando se consideram constantes as amplitudes das ondas de bombeamento, a variação da intensidade da onda com frequência soma tem a forma da função seno quadrado. Note-se que o máximo da intensidade é inversamente proporcional ao quadrado de Δk . Para $\Delta k = 0$, essa intensidade é proporcional ao quadrado da distância, resultado que é válido apenas para valores suficientemente pequenos de z . De facto, para valores elevados de z as ondas incidentes E_1 e E_2 não podem ser consideradas constantes, impondo-se nesse caso uma resolução mais rigorosa do sistema de equações diferenciais (8.15)-(8.17).

PR 8.4. Considere um sinal óptico com frequência ω_1 e uma onda de bombeamento suficientemente intensa com frequência $\omega_3 > \omega_1$ que se propagam num meio não-linear. Partindo do sistema de equações (8.15)-(8.17) e assumindo que a onda de bombeamento tem uma amplitude real e constante $E_3(z) = E_3(0)$, mostre que a onda de sinal é amplificada e que se verifica o aparecimento de uma terceira onda com frequência $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Assuma a condição de ajuste de fase $\Delta k = k_3 - k_2 - k_1 = 0$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Esboce um gráfico para a evolução da intensidade das ondas com frequências ω_1 e ω_2 .

Resolução

Nas circunstâncias indicadas, pode-se escrever a Eq. (8.15) e o conjugado da Eq. (8.16) na forma:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -\frac{i\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} dE_3 E_2^* \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_2^*}{\partial z} = \frac{i\omega_2}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} dE_3 E_1 \quad (2)$$

De acordo com as condições do problema, as Eq.s (1) e (2) devem ser resolvidas admitindo a existência de um sinal $E_1(0) \neq 0$, enquanto que se tem $E_2(0) = 0$. Obtém-se então as soluções:

$$E_1(z) = E_1(0) \cosh(Kz) \quad (3)$$

e

$$E_2^*(z) = i \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} E_1(0) \operatorname{senh}(Kz) \quad (4)$$

onde

$$K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 \mu}{\varepsilon}} dE_3 \quad (5)$$

Na Fig. 8.10 mostra-se a evolução das intensidades normalizadas

$$\bar{I}_1 \equiv \frac{I_1(z)}{I_{10}} = \cosh^2(Kz) \quad (6)$$

e

$$\bar{I}_2 \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{I_2(z)}{I_{10}} = \operatorname{senh}^2(Kz) \quad (7)$$

onde $I_i(z) \propto E_i^2(z)$ e $I_{10} \propto E_i^2(0)$. Observa-se da figura que, numa fase inicial, enquanto a onda com frequência ω_2 é gerada, a amplificação do sinal com frequência ω_1 é modesta. Contudo, essa amplificação torna-se significativa numa fase posterior. Uma característica única do amplificador óptico paramétrico reside na possibilidade que ele oferece de gerar luz com frequências que não correspondem a qualquer transição atómica.

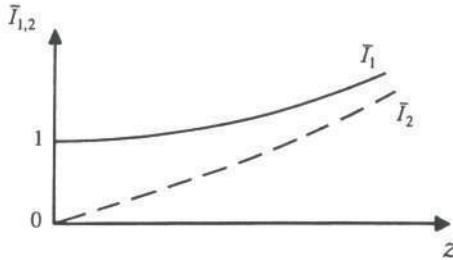


Figura 8.10 - Evolução das intensidades normalizadas do sinal (\bar{I}_1) e da onda gerada (\bar{I}_2) num amplificador óptico paramétrico.

PR 8.5. Explique o significado de desprezar o membro direito da Eq. (8.29) e diga em que condições isso é aceitável. Assumindo essa aproximação, confirme os resultados dados pelas Eq.s (8.32) e (8.33) para a potência da onda de Stokes e para a distância efectiva de interacção, respectivamente, no processo DRE e obtenha uma expressão para o ganho não saturado de um amplificador Raman.

Resolução

Desprezar o membro direito da Eq. (8.29) equivale a ignorar a perda de potência da onda de bombeamento determinada pela interacção não-linear com a onda de Stokes. Esta aproximação é razoável se a potência desta onda for relativamente baixa. Em tal caso, a Eq. (8.29) reduz-se a

$$\frac{dP_b}{dz} = -\alpha_b P_b \quad (1)$$

A integração da Eq. (1) permite obter o resultado

$$P_b(z) = P_b(0) \exp\{-\alpha_b z\} \quad (2)$$

onde $P_b(0)$ é a potência de bombeamento lançada na fibra. Substituindo a Eq. (2) na Eq. (8.30) e rearranjando, tem-se

$$\frac{dP_S}{P_S} = \left[-\alpha_S + \frac{g_r}{A_{ef}} P_b(0) \exp\{-\alpha_b z\} \right] dz \quad (3)$$

Integrando ambos os membros da Eq. (3) entre $z=0$ e $z=L$, obtém-se o seguinte resultado para a potência à saída da fibra:

$$P_S(L) = P_S(0) \exp \left\{ g_r P_b(0) \frac{L_{ef}}{A_{ef}} - \alpha_S L \right\} \quad (4)$$

onde $P_S(0)$ é o sinal injectado à entrada da fibra e

$$L_{ef} = \frac{1 - e^{-\alpha L}}{\alpha} \quad (5)$$

representa a distância efectiva de interacção. O ganho do amplificador Raman é dado por

$$G = \frac{P_s(L)}{P_s(0) \exp(-\alpha_s L)} = \exp \left\{ g_r P_b(0) \frac{L_{\text{ef}}}{A_{\text{ef}}} \right\} \quad (6)$$

O resultado anterior mostra que o ganho, em dBs, aumenta linearmente com a potência de bombeamento lançada na entrada da fibra.

PR 8.6. Discuta algumas possibilidades para se ter uma fibra altamente não-linear (parâmetro não-linear elevado).

Resolução

De acordo com a Eq.(8.59), o parâmetro não-linear da fibra é dado por

$$\gamma = \frac{\omega_0 n_2}{c A_{\text{eff}}} \quad (1)$$

Desta expressão verifica-se que existem duas técnicas para aumentar a não-linearidade da fibra: i) reduzir a área efectiva do modo, A_{eff} , ou ii) aumentar o coeficiente de Kerr do material de que a fibra é feita.

A técnica i) pode ser implementada reduzindo o diâmetro do núcleo e aumentando a diferença entre os índices de refracção do núcleo e da bainha. Quanto a este último aspecto, a situação limite ocorre quando o índice de refracção da bainha é igual a 1, tendo-se então que o núcleo está rodeado por ar. Esta situação acontece realmente nas chamadas fibras adelgaçadas e, de uma maneira aproximada, nas chamadas fibras ópticas microestruturadas cuja bainha tenha uma elevada percentagem de ar.

Relativamente à técnica ii), pode-se aumentar o coeficiente de Kerr dopando adequadamente a sílica constituinte do núcleo da fibra, nomeadamente usando germânio. Contudo, esse aumento pode ser muito mais significativo usando alguns tipos de vidro com uma não-linearidade superior à da sílica. Conjugando esta técnica com a técnica i), pode-se conseguir uma aumento do parâmetro não-linear da fibra de várias ordens de grandeza.

PR 8.7. Calcule a potência que deve ser usada para gerar um solitão fundamental de largura $t_0 = 6$ ps numa fibra que apresenta uma dispersão da velocidade de grupo $\beta_2 = -1 \text{ ps}^2/\text{km}$ e um parâmetro não-linear $\gamma = 3 \text{ W}^{-1}/\text{km}$. Explique por que razão os solitões fundamentais são preferíveis aos solitões de ordem superior no âmbito dos sistemas de comunicação por fibra óptica.

Resolução

De acordo com a Eq. (8.67) a potência de pico de um solitão numa fibra óptica é dada por:

$$P_0 = \frac{N^2 |\beta_2|}{\gamma t_0^2} \quad (1)$$

Considerando o caso de um impulso com duração $t_0 = 6$ ps propagando-se numa fibra com uma dispersão da velocidade de grupo $\beta_2 = -1 \text{ ps}^2/\text{km}$ e um parâmetro não linear $\gamma = 3 \text{ W}^{-1}/\text{km}$, tem-se que a potência de pico necessária para a formação de um solitão fundamental ($N = 1$) é $P_0 \sim 10 \text{ mW}$.

A potência de pico necessária para formar um solitão de ordem N é N^2 vezes superior à potência de pico de um solitão fundamental. Por outro lado, um solitão de ordem superior varia periodicamente o seu perfil durante a propagação, enquanto um solitão fundamental mantém o seu perfil estacionário. Este facto, conjuntamente com a potência mais baixa para a sua formação, faz com que o solitão fundamental seja preferível no âmbito dos sistemas de comunicação por fibra óptica.

PR 8.8. Partindo da Eq. (8.61) e desprezando os efeitos da dispersão e da não-linearidade da fibra, mostre que um impulso se propaga com a velocidade de grupo v_g mantendo inalterada a sua forma. Mostre ainda que a energia do impulso se propaga com a mesma velocidade de grupo.

Resolução

Desprezando os efeitos da dispersão e da não-linearidade da fibra, a Eq. (8.61) reduz-se à forma

$$\frac{\partial U(z, \tau)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ou

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (2)$$

A Eq. (1) tem como solução geral:

$$U = U_0(\tau) = U_0(t - z/v_g) \quad (3)$$

onde U_0 representa o valor inicial ($z = 0$) de U . Conclui-se da Eq. (3) que, na ausência de dispersão e de não-linearidade, o impulso se propaga sem alteração do seu perfil com uma velocidade de grupo v_g .

Multiplicando ambos os membros da Eq. (2) por U^* e o complexo conjugado da mesma equação por U e adicionando as duas equações resultantes, tem-se

$$\frac{\partial |U|^2}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} = 0 \quad (4)$$

Conclui-se, assim, que a energia do impulso, que é proporcional a $|U|^2$, também se propaga com a velocidade de grupo v_g .

PR 8.9. Partindo da Eq. (8.61) desprezando o termo não-linear, mostre que a dispersão cromática determina uma aumento da largura do impulso durante a propagação. Considere para o efeito o caso de um impulso Gaussiano, descrito pela Eq. (5.36).

Resolução

Desprezando o termo não-linear, tem-se que a Eq. (8.61) se reduz à forma:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1)$$

Usando método da separação de variáveis, pode-se obter a seguinte solução geral:

$$U(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U(0, \omega) e^{i \left(\frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 z - \omega \tau \right)} d\omega \quad (2)$$

onde $U(0, \omega)$ representa o espectro do impulso na entrada da fibra. No caso de um impulso Gaussiano, esse espectro é dado pela Eq. (1) do problema PR 5.8. A Eq. (2) acima é semelhante à Eq. (2) do mesmo problema, no qual foi demonstrado que o impulso se alarga e adquire trinado durante a sua propagação.

PR 8.10. Desprezando o termo de dispersão na Eq. (8.61), mostre que

- i) o quadrado do módulo da amplitude da envolvente mantém o seu perfil durante a propagação e
- ii) a não-linearidade da fibra determina uma modulação da fase que é proporcional à intensidade do impulso.

Resolução

Desprezando o segundo termo na Eq. (8.61) tem-se

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \gamma |U|^2 U = 0 \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros da Eq. (1) por U^* e o complexo conjugado da mesma equação por U e subtraindo as duas equações resultantes, tem-se

$$\frac{\partial |U|^2}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

A Eq. (2) tem como solução geral:

$$|U|^2 = f(\tau) = f(t - z/v_g) \quad (3)$$

A Eq. (3) mostra que, desprezando a dispersão, o quadrado do módulo da amplitude mantém o seu perfil durante a propagação. Com base neste resultado, a solução da Eq. (2) pode ser escrita na forma:

$$U(z, \tau) = U_0(\tau) e^{i\phi(z, \tau)} \quad (4)$$

onde $U_0(\tau)$ e $\phi(z, \tau)$ são funções reais. Das Eq.s (1) e (4) obtém-se

$$\phi(z, \tau) = \gamma |U_0(\tau)|^2 z \quad (5)$$

Este resultado mostra que a não-linearidade da fibra determina uma modulação da fase do impulso que é directamente proporcional à intensidade desse impulso e à distância de propagação. Este fenómeno é conhecido como *auto-modulação da fase* e foi descrito na secção 8.5.3.

8.10. Problemas propostos

PP 8.1. Partindo das Eq.s (1.9), (8.3) e (8.6)-(8.8) obtenha a equação de onda para o campo eléctrico num meio não-linear, dada pela Eq. (8.9).

PP 8.2. Partindo da Eq. (8.9) e usando as Eq.s (8.11)-(8.14), obtenha o sistema de equações (8.15)-8.17).

PP 8.3. Partindo das Eq.s (8.15)-(8.17), obtenha a relação de Manley-Rowe, dada pela Eq. (8.19).

PP 8.4. a) Verifique, por substituição, que a Eq. (8.24) é realmente solução da Eq. (8.23). b) Usando a Eq. (8.24) e o princípio da conservação da energia, mostre que a evolução da amplitude da onda incidente é dada pela Eq. (8.25).

PP 8.5. Usando as Eq.s (8.15) e (8.17) para a geração do segundo harmónico, i. e. $E_1 = E_2$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\omega_3 = 2\omega$ e $\Delta k = 0$, mostre que a soma das intensidades das ondas incidente e do segundo harmónico é constante ao longo do percurso.

PP 8.6. O feixe de um laser ($\lambda = 700$ nm), apresenta uma intensidade $I_\omega = 100$ MWcm⁻² e incide num cristal de fosfato dihidrogenado de potássio (KDP). Determine o comprimento que deverá ter esse cristal para que a intensidade do segundo harmónico chegue a metade daquele valor ($I_{2\omega} = I_\omega / 2$). Considere que o índice de refracção do cristal é $n = 1.51$, que se tem $\Delta k = 0$ e $A = \sqrt{\mu/\varepsilon} d\omega = 1.2 \times 10^{-2}$ V⁻¹.

PP 8.7. Descreva a origem física dos fenómenos da dispersão Brillouin estimulada e da dispersão Raman estimulada nas fibras ópticas, referindo as semelhanças e as diferenças entre eles.

PP 8.8.

- a) Descreva o fenómeno da auto-modulação da fase nas fibras ópticas, referindo a sua origem física.
- b) Mostre que o referido fenómeno determina um alargamento espectral dos impulsos que se propagam nas fibras ópticas.
- c) Descreva os efeitos que podem resultar da acção combinada da auto-modulação da fase e da dispersão cromática da fibra óptica.

PP 8.9. Mostre que, tanto o solitão brilhante, dado pela Eq. (8.68), como o solitão escuro, dado pela Eq. (8.70), são soluções da Eq. (8.66).

PP 8.10. Mostre que a grandeza

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |Q|^2 dT$$

é invariante no tempo de acordo com a equação não-linear de Schrödinger dada pela Eq. (8.66). Assuma que a solução Q satisfaz as condições fronteira:

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} Q(Z, T) = 0$$

e

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial Q(Z, T)}{\partial T} = 0$$

8.11. Referências bibliográficas

1. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 5th Ed. Academic Press, New York, 2012.
2. M. F. Ferreira, *Nonlinear Effects in Optical Fibers*, John Wiley & Sons, 2011.
3. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 4th Ed., Academic Press, Boston, 2020.
4. P. N. Butcher e D. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
5. P. L. Mills, *Nonlinear Optics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
6. Y. R. Shen, *Principles of Nonlinear Optics*, John Wiley & Sons, 2002.